MANUALUL INGINERULUI ELECTRICIAN

I

EDITURA TEHNICĂ

MANUALUL INGINERULUI ELECTRICIAN

I

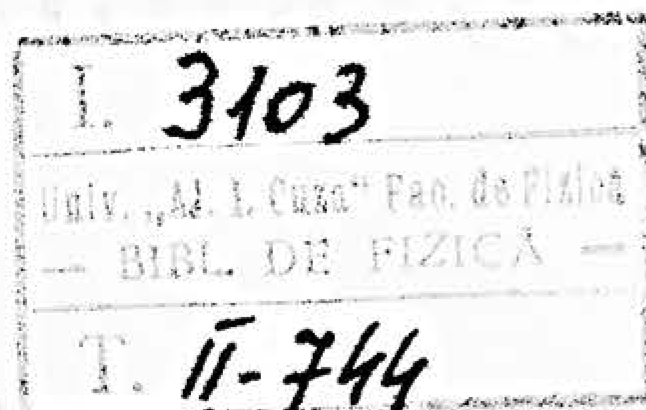
TEORIE GENERALĂ ŞI MĂSURĂTORI



0 000008 70821 BCU IAŞI



EDITURA TEHNICĂ
1953



vol. 1

COLECTIVUL DE ELABORARE

SECŢIUNEA I — TEORIA GENERALĂ

I. MATEMATICI
ING. EUGEN BALAN

II. MĂRIMI ŞI UNITĂŢI
PROF. ING. C. BUDEANU

III. BAZELE FIZICE ŞI TEORETICE ALE ELECTROTEHNICEI
SUB REDACŢIA PROF. ING. C. BUDEANU:

PROF. ING. C. BUDEANU
ŞI PROF. ING. EDM. NICOLAU (SUBCAPITOL A—I)
PROF. ING. C. BUDEANU
ŞI LECTOR ING. C. MOCANU (SUBCAPITOL J—P)
PROF. ING. CONSTANTINESCU (SUBCAPITOL Q—R)
PROF. DR. ING. I. S. ANTONIU (SUBCAPITOL S—W)
CONF. DR. M. HEROVANU (SUBCAPITOL Z)



SECŢIUNEA II — MĂSURĂTORI

IV. MĂSURĂTORI ELECTRICE ŞI MAGNETICE
SUB REDACŢIA PROF. ING. AL. POPESCU

CONF. ING. CHRISTIANA POPESCU
ING. D. IONESCU



COORDONAREA
ING. PAUL BUNESCU ŞI ING. PAUL CARTIANU

TABLA DE MATERII

I. Matematici

A. Determinanţi. Transformări afine 23

1. Definiţii (23). 2. Valoarea determinanţilor de ordinul 2 şi 3 (23). 3. Proprietăţile determinanţilor (24). 4. Suma a doi determinanţi (24). 5. Produsul a doi determinanţi (24). 6. Determinanţi minori (25). 7. Determinanţi simetrici (25). 8. Wronskianul (25). 9. Aplicarea determinanţilor la rezolvarea ecuaţiilor liniare (25). 10. Transformări afine (26). 11. Proprietăţie caracteristice ale transformărilor afine sau liniare (27). 12. Transformări în general (27). 13. Iacobianul (27).

B. Calculul diferenţial 28

14. Reguli de diferenţiere (28). 15. Transformarea expresiilor diferenţiale (28). 16. Diferenţiala totală (30). 17. Formula mediei în calculul diferenţial (30). 18. Teorema lui Taylor (30). 19. Derivatele funcţiilor elementare (31).

C. Calculul integral 31

20. Metode de integrare (31). 21. Integrale fundamentale (33). 22. Formule de recurenţă (36). 23. Integrarea unor tipuri speciale de fracţii (36). 24. Integrale definite (38).

D. Curbe şi suprafeţe 40

25. Curbe în plan (40). 26. Curbe în spaţiu (42). 27. Suprafeţe în spaţiu (42). 28. Lungimea arcelor (43). 29. Aria suprafeţelor plane (44). 30. Aria suprafeţelor curbe (44). 31. Calculul volumelor (45).

E. Serii 45

32. Definiţii (45). 33. Criterii de convergenţă a seriilor infinite (46). 34. Seria Taylor (47). 35. Seria Mac Laurin (47). 36. Funcţii trigonometrice (47). 37. Funcţii hiperbolice (50). 38. Funcţiile e^x şi a^x (51). 39. Relaţii între funcţiile transcendente (51). 40. Diferite relaţii între funcţiile transcendente (53). 41. Diferite serii transcendente (54). 42. Funcţiile Legendre (55). 43. Funcţiile Bessel (55).

F. Serii Fourier. Analiza armonică 56

44. Definiţie (56). 45. Calculul coeficienţilor (56). 46. Cazuri speciale (59). 47. Puncte de discontinuitate (59). 48. Integrare şi derivare (59). 49. Seria Fourier în termeni complexi (60). 50. Proprietate specială a coeficienţilor Fourier (60). 51. Exemple de desvoltare în serie Fourier (60). 52. Analiza armonică (65). 53. Metode analitice, grafice, etc. (66). 54. Câteva serii Fourier (67). 55. Integrala Fourier (69).

G. Numere complexe. Funcţii de variabilă complexă 71

56. Definiţii (71). 57. Reprezentarea numerelor complexe (71). 58. Adunarea şi scăderea numerelor complexe (71). 59. Produsul numerelor complexe (71). 60. Puterea unui număr complex (72). 61. Rădăcina unui număr complex (72). 62. Calculul cu numere complexe (72). 63. Operatorul j (72). 64. Numere complexe conjugate (72). 65. Moduri de exprimare a numerelor complexe (73). 66. Exemple de calcul cu mărimi complexe (73). 67. Variabile complexe (74).

68. Funcţii analitice (74). 69. Teorema lui Cauchy (75). 70. Formula lui Cauchy (75). 71. Derivarea şi integrarea funcţiilor analitice (75). 72. Seria Taylor (76). 73. Puncte singulare (76). 74. Desvoltarea în serie Laurent (77). 75. Reziduuri şi teorema reziduurilor (77). 76. Exemple de calcul al integralelor definite (77). 77. Transformări conforme (79).

H. Ecuaţii diferenţiale **80**

78. Definiţii (80). 79. Ecuaţiile diferenţiale de ordinul I şi de gradul I (80). 80. Tipuri speciale de ecuaţii diferenţiale de ordin superior (83). 81. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior, la care ordinul poate fi redus (84). 82. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul n. Generalităţi (84). 83. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul n, cu coeficienţi constanţi (85). 84. Ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili (86). 85. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul II (87). 86. Metoda lui Lagrange de variaţie a oonstantelor (89). 87. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul II cu coeficienţi constanţi (90). 88. Integrare prin desvoltare în serie (94). 89. Sisteme de ecuaţii diferenţiale (96). 90. Sisteme de ecuaţii diferenţiale omogene liniare de primul ordin cu coeficienţi constanţi (97). 91. Ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul I (98). 92. Ecuaţiile cu derivate parţiale liniare de ordinul II (99). 93. Metoda separării variabilelor (101).

I. Calculul operaţional **104**

94. Definiţie (104). 95. Operatorul diferenţial (104). 96. Legea de translaţie a lui Heaviside (107). 97. Operatorul integral al lui Heaviside (107). 98. Metoda generală a calculului operaţional, după Heaviside(109). 99. Teorema desvoltării a lui Heaviside (111). 100. Integrala lui Duhamel (111). 101. Inmulţirea a doi operatori (112). 102. Transformarea lui Carson (Laplace). (113). 103. Reguli de calcul cu transformarea lui Carson (114). 104. Calculul unor operatori exponenţiali (116). 105. Calculul unor operatori singulari (117). 106.. Concluzii (117).

K. Calculul vectorial **122**

a) *Algebra vectorială* 122

107. Definiţii. (122). 108. Operaţii cu vectori (123). 109. Vectori coliniari şi coplanari (124). 110. Proiecţia unui vector pe o axă (124). 111. Sensul de rotaţie (124). 112. Sisteme de axe de coordonate (124). 113. Componentele unui vector (124). 114. Vectorul de poziţie (125). 115. Produsul scalar a doi vectori (125). 116. Produsul vectorial a doi vectori (126). 117. Produsul a trei sau mai mulţi vectori (127). 118. Vectori axiali şi vectori polari (128).

b) *Operaţii diferenţiale în raport cu un argument scalar* 128

119. Vectori variabili ca funcţie de argument scalar (128). 120. Derivata unui vector (128). 121. Integrala unui vector variabil (130).

c) *Câmpuri scalare* 131

122. Funcţia de punct (131). 123. Suprafeţe de nivel (131). 124. Derivata unei funcţii scalare în raport cu o direcţie dată. Gradient (131). 125. Derivata normală (132). 126. Operatorul ∇ (133).

d) *Câmpuri vectoriale* 133

127. Funcţii vectoriale de punct (133). 128. Linii vectoriale (134). 129. Fluxul unui vector printr'o suprafaţă (134). 130. Divergenţa unui vector (135). 131. Formula lui Green-Ostrogradschi (136). 132. Circulaţia unui vector. Rotorul. Teorema lui Stokes (137). 133. Derivata unui vector în raport cu o direcţie dată (139). 134. Operaţii diferenţiale de ordinul II (139). 135. Formulele lui Green (140). 136. Diferite tipuri de câmpuri (140). 137 Exprimarea formulelor diferenţiale în coordonate curbilinii (142).

L. Matrice. Calculul cu matrice **144**

138. Definiţii (144). 139. Matrice egale (145). 140. Adunarea a două matrice (145). 141. Produsul unui număr cu o matrice

(146). 142. Produsul a două matrice (146). 143. Diverse matrice speciale (146). 144. Matrice transpusă (147). 145. Matricea inversă (147). 146. Matricea hermitică (148). 147. Matricea adjunctă (148). 148. Ecuaţia caracteristică a unei matrice (148). 149. Funcţii de matrice (150). 150. Derivata unei matrice (153). 151. Integrarea unei matrice (153).

M. Elemente asupra tensorilor **153**

152. Definiţii (153). 153. Spaţiu vectorial afin. Spaţiu metric. (154). 154. Schimbarea axelor de coordonate (154). 155. Covarianţa şi contravarianţa în sistemul de axe rectilinii (155). 156. Definiţia generală a unui tensor (156). 157. Operaţii cu tensori (157). 158. Coordonate curbilinii (159). 159. Spaţiul metric (159).

II. Mărimi şi Unităţi

A. Consideraţii generale **163**

1. Mărimi şi relaţii fizice (163). 2. Mărime, unitate, valoare (163). 3. Etaloane (164). 4. Expresii fizice (164). 5. Coeficienţi numerici (164). 6. Unităţi fundamentale şi derivate (164). 7. Ecuaţii de definiţie (165). 8. Coerenţă (165). 9. Dimensiune (165). 10. Omogenitate (165). 11. Sisteme de etaloane, de unităţi şi de referinţă (165).

B. Mărimi şi simboluri literale **166**

12. Consideraţii generale (166). 13. Mărimi electrice (166). 14. Mărimi magnetice (169). 15. Mărimi electromagnetice şi electroenergetice (172). 16. Mărimi fotometrice (174). 17. Mărimi calorice (174).

C. Sisteme de unităţi **174**

18. Generalităţi (174). 19. Sistemul metric (175). 20. Sistemul mecanic (175). 21. Sistemul CGS electromagnetic. (CGSem) (175). 22. Sistemul CGS electrostatic (CGSes) (176). 23. Sistemul CGS electrodinamic (177). 24. Sistemul MTS (177). 25. Sistemul MKS (177). 26. Sistem practic general (177). 27. Sistemul internaţional şi absolut (178). 28. Sisteme simetrice (178). 29. Sistemul Gauss (180).

D. Operaţia raţionalizării **181**

30. Consideraţii şi proprietăţi generale ale raţionalizării (181). 31. Trecerea dela regimul clasic la cel raţionalizat şi invers (182). 32. Proprietăţile generale ale operaţiei raţionalizării (183). 33. Situaţia adoptării raţionalizării (184).

E. Tabele şi date numerice **185**

a) *Unităţile fundamentale ale sistemelor generale* 185

1. Unităţile de lungime (185). 2. Unităţile de masă (185). 3. Unitatea de timp (185).

b) *Unităţile geometrice ale sistemelor generale* 185

c) *Unităţile geometrice în afara sistemelor generale* 186

d) *Unităţile mecanice ale sistemelor generale* 188

e) *Unităţile sistemului mecanic MKfS* 190

f) *Unităţile mecanice cu denumiri speciale* 192

g) *Unităţile derivate electrice şi magnetice* 193

h) *Tabela formulelor electromagnetice* 198

i) *Unităţile fotometrice* 200

k) *Prefixe şi simboluri pentru multiplii şi submultiplii zecimali* .. 202

l) *Dimensiunile unităţilor electrice şi magnetice în sistemul practic cu patru unităţi fundamentale şi în trei variante de referinţe dimensionale* 203

m) *Corelaţia dimensiunilor şi unităţilor electromagnetice şi electrostatice ale mărimilor electrice şi magnetice*.... 204

n) *Indicaţii asupra folosirii simbolurilor literale ale mărimilor electrotehnice* 205

o) *Proiectul de terminologie al electrotehnicei teoretice* 206

Noţiuni fundamentale 207

1. Electrotehnică teoretică (207). 2. Electricitate (207). 3. Sarcina electrică (207). 4. Particulă încărcată (207). 5. Câmp electromagnetic (207). 6. Câmp electric (207).

7. Câmp magnetic (207). 8. Câmp electrostatic (207). 9. Inducție electrostatică (207). 10. Câmpul electric coulombian (207). 11. Vid (207). 12. Energie electrică (207). 13. Energie magnetică (207). 14. Energie electromagnetică (207).

Sarcini electrice 208

15. Sarcină electrică de volum (208). 16. Sarcină electrică de suprafață (208). 17. Sarcină electrică liniară (208). 18. Sarcină electrică punctiformă (208). 19. Densitatea de volum a sarcinii electrice într'un anumit punct (208). 20. Densitatea de suprafață a sarcinii electrice într'un anumit punct (208). 21. Densitatea liniară a sarcinii electrice într'un anumit punct (208). 22. Dipol electric (208). 23. Momentul electric al dipolului electric (208). 24. Momentul electric al corpului (208).

Caracteristicile electrice fundamentale ale diferitelor medii și ale câmpului electric 208

25. Intensitatea câmpului electric (208). 26. Polarizarea electrică (208). 27. Dielectric (208). 28. Polarizație electrică (208). 29. Constantă de polarizare electrică (208). 30. Inducția electrică (209). 31. Permitivitatea (209). 32. Permitivitate relativă (209). 33. Potențial electric (209). 34. Diferența de potențial electric dintre două puncte (209). 35. Conductanță (209). 36. Conductor (209). 37. Izolant (209). 38. Capacitate electrică (209). 39. Condensator (209). 40. Capacitatea condensatorului (209). 41. Capacitate parțială (210). 42. Câmp electric necoulombian (210). 43. Intensitatea câmpului electric necoulombian (210). 44. Forța electromotoare. F.e.m. (210). 45. Tensiunea electrică între două puncte în lungul unui drum dat (210). 46. Potențial electrodinamic vectorial (210). 47. Potențial electrodinamic scalar (210).

Curent electric...................... 210

48. Curent electric (210). 49. Curent electric de conducție (210). 50. Curent electric de polarizare (210). 51. Curent electric de convecție (210). 52. Curent electric de deplasare în vid (211). 53. Curent electric de deplasare (211). 54. Densitate de curent electric de conducție (211). 55. Densitatea de curent electric de polarizare (211). 56. Densitatea de curent electric de convecție (211). 57. Densitatea de curent electric de deplasare în vid (211). 58. Densitatea de curent electric de deplasare (211). 59. Densitate de curent electric (211). 60. Puterea curentului electric (211). 61. Linie de curent electric (211).

Circuit electric, elementele lui și caracteristicile lor.................. 212

62. Rezistența electrică (212). 63. Conductivitate electrică (212). 64. Rezistivitatea electrică (212). 65. Coeficientul de temperatură al rezistenței electrice (212). 66. Circuit electric (212). 67. Circuit electric liniar (212). 68. Circuit electric neliniar (212). 69. Multipol (212). 70. Multipol pasiv (212) 71. Multipol activ (212).

Caracteristice magnetice fundamentale ale câmpului magnetic 212

72. Inducție magnetică (212). 73. Linie de inducție magnetică (212). 74. Tub de inducție magnetică (212). 75. Flux magnetic (212). 76. Dipol magnetic (213). 77. Moment magnetic al unui circuit elementar cu curent electric (213). 78. Moment magnetic al unui corp (213). 79. Magnetizare (213). 80. Forță de magnetizare (213). 81. Polarizare magnetică (213). 82. Intensitatea de magnetizare (213). 83. Intensitatea câmpului magnetic (213). 84. Potențial magnetic scalar (213). 85. Diferența de potențial magnetic scalar între două puncte (213). 86. Constanta de polarizare magnetică (213). 87. Permeabilitate magnetică (213). 88. Permeabilitatea magnetică relativă (213) 89. Curbă de primă magnetizare (213). 90. Hysteresis (214). 91. Ciclu hysteresis. (214). 92. Forță coercitivă (214). 93. Magnetizare remanentă (214). 94. Magnet (214). 95. Electromagnet (214). 96. Inducție remanentă. (214). 97. Câmp magnetostatic (214). 98. Pol magnetic nord (214). 99. Pol magnetic sud (214). 100. Circuit magnetic (214). 101. Reluctanța circuitului magnetic (214). 102. Permeanța circuitului magnetic (214). 103. Reluctanță (214). 104. Permeanță magnetică (214). 105. Flux total (214). 106. Flux total de inducție proprie (214). 107. Flux total de inducție mutuală (214). 108. Inducție electromagnetică (214). 109. Inducție proprie (214). 110. Inducție mutuală (214). 111. Inductanță (215). 112. Inductanță mutuală (215).

Curent alternativ 215

113. Valoarea instantanee a curentului electric (215). 114. Curent electric periodic (215). 115. Perioada (215). 116. Frecvența curentului alternativ (215). 117. Pulsație, frecvență unghiulară (215). 118. Curent neperiodic (215). 119. Impuls de curent (215). 120. Curent electric alternativ (215). 121. Curent electric pulsatoriu (215). 122. Curent electric sinusoidal (215). 123. Curent electric nesinusoidal (215). 124. Faza unei mărimi sinusoidale (215). 125. Defazare (216). 126. Fază inițială (216). 127. Puterea instantanee a curentului electric (216). 128. Valoarea eficace a curentului electric periodic (216). 129. Componenta continuă a curentului electric periodic (216). 130. Valoarea medie a curentului electric alternativ (216). 131. Factor de formă al unei curbe periodice (216). 132. Puterea aparentă a curentului electric periodic (216). 133. Puterea activă a curentului electric periodic (216). 134. Factor de putere (216). 135. Tensiune și curent sinusoidal echivalente (216). 136. Puterea reactivă a curentului sinsuoidal (216). 137. Puterea reactivă a curentului electric periodic (216). 138. Puterea deformantă a curentului electric periodic (216). 139. Rezistența unui circuit de curent electric periodic (216). 140. Conductanța unui circuit de curent electric periodic (216). 141. Impedanța unui circuit decurent sinusoidal (216). 142. Admitanța circuitului de curent sinusoidal (217). 143. Reactanța circuitului de curent sinusoidal (217). 144. Reactanța inductivă a unui circuit de curent sinusoidal (217). 145. Reactanța capacitivă a unui circuit de curent sinusoidal (217). 146. Susceptanța circuitului unui curent sinusoidal (217). 147. Componenta activă a curentului sinusoidal (217). 148. Componenta activă a tensiunii sinusoidale (217). 149. Componenta reactivă a curentului sinusoidal (217). 150. Componenta reactivă a tensiunii sinusoidale (217). 151. Amplitudinea complexă a curentului sinusoidal (217). 152. Expresia complexă a curentului sinusoidal (217). 153. Impedanța complexă a unui circuit de curent sinusoidal (218). 154. Admitanța complexă a unui circuit de curent sinusoidal (218). 155. Impedanța echivalentă a circuitului sau a unei porțiuni a circuitului de curent sinusoidal (218). 156. Schema echivalentă (218). 157. Impedanța de intrare a unui circuit de curent sinusoidal (218). 158. Rezonanță (218). 159. Rezonanță de tensiune (218). 160. Rezonanță de curent (218). 161. Frecvență de rezonanță (218). 162. Ferorezonanță (218)

Sisteme polifazate 218

163. Sistem monofazat (218). 164. Sistem bifazat (219). 165. Sistem polifazat (219). 166. Sistem polifazat simetric (219). 167. Sistem trifazat simetric (219). 168. Sistem polifazat echilibrat (219). 169. Circuit monofazat (219). 170. Circuit polifazat (219). 171. Fază (219). 172. Circuit polifazat legat (219). 173. Circuit polifazat simetric (219). 174. Circuit polifazat nesimetric (219). 175. Componente simetrice ale unui sistem polifazat nesimetric (219).

Procese tranzitorii 219

176. Proces tranzitoriu într'un circuit electric (219). 177. Curent electric permanent (219). 178. Curent electric tranzitoriu (220). 179. Curent electric liber (220). 180. Curent liber oscilant (220). 181. Curent liber aperiodic (220). 182. Admitanță tranzitorie (220). 183. Circuit oscilant (220). 184. Frecvența proprie a circuitului oscilant (220). 185. Amortizare (220). 186. Decrementul logaritmic al amortizării (220). 187. Constanta de timp a circuitului (220) 188. Atenuare (220).

Circuite cu constante repartizate 220

189. Circuit electric cu constante concentrate (220). 190. Circuit electric cu constante repartizate (220). 191. Impedanța caracteristică (220). 192. Constantă de propagare (220). 193. Constantă de atenuare (220). 194. Constantă de fază (220).

III. Bazele fizice şi teoretice ale electrotehnicei

A. Electrocinetica 221

1. Forţa electromotoare (221). 2. Curentul electric (221). 3. Rezistenţa electrică (221). 4. Legea lui Ohm (221). 5. Rezistenţa conductorilor cilindrici (221). 6. Variaţia rezistivităţii, în funcţie de temperatură (222). 7 Legile lui Kirchhoff (222). 8. Precauţii de luat la scrierea legilor lui Kirchhoff (222). 9. Montarea rezistenţelor şi rezistenţele echivalente (223). 10. Montarea forţelor electromotoare (224). 11. Tensiune şi potenţial electric (224). 12. Sarcina electrică (225). 13. Principii de teoria reţelelor (225). 14. Exemple de calcule a reţelelor (227).

B. Electrostatica şi câmpul electric .. 230

15. Fenomene generale electrostatice (230). 16. Câmpul electric (231). 17. Teorema lui Gauss (232). 18. Legile electrostaticii exprimate sub forma locală (punctuală) (233). 19. Potenţialul electrostatic (233). 20. Potenţialul în conductori (234). 21. Imagini (234). 22. Lucrul câmpului electric (235). 23. Lucrul mecanic al deplasării unei sarcini pozitive (235). 24. Condensatori electrici (235). 25. Calculul capacităţii pentru diverse tipuri de condensatori (236). 26. Montarea condensatorilor în serie şi în paralel (238). 27. Dielectricii (238). 28. Polarizarea dielectricilor (239). 29. Refracţia liniilor de forţă electrice (240). 30. Proprietăţile dielectricilor (240).

C. Magnetismul 243

31. Fenomenele generale magnetice (243). 32. Câmpul magnetic (243). 33. Divizarea magneţilor (244). 34. Inducţia magnetică (244). 35. Polarizarea magnetică (245). 36. Paramagnetism (245). 37. Diamagnetism (245). 38. Feromagnetism (245). 39. Magnetizare permanentă (245). 40. Observaţie asupra realităţii fizice a unor mărimi magnetice (246).

D. Electromagnetismul 246

41. Experienţa lui Oersted (246). 42. Legea Biot şi Savart (246). 43. Expresia generală a câmpului magnetic produs de curenţi (246). 44. Legea fundamentală a câmpului magnetic (247). 45. Permeabilitatea magnetică (247). 46. Potenţialul magnetic al câmpului H (247). 47. Câmpul magnetic în interiorul unui conductor parcurs de un curent de densitate uniformă în întreaga secţiune (247). 48. Câmpul magnetic al unui curent rectiliniu infinit (248). 49. Câmpul magnetic în centrul unei spire circulare de raza R (248). 50. Câmpul în interiorul unui tor (248). 51. Fluxul magnetic într'un tor de secţiune dreptunghiulară (248). 52. Câmpul de inducţie şi fluxul într'un solenoid infinit (248). 53. Câmpul magnetic produs, de un solenoid finit, într'un punct de pe axa lui (249). 54. Echivalenţa dintre curenţi şi magneţi (249). 55. Dipolul magnetic echivalent al unui solenoid finit de secţiune foarte mică (249). 56. Dipolul magnetic echivalent al unui solenoid finit şi de secţiune finită (249). 57. Potenţialul vectorial (250). 58. Fluxul produs de mai multe circuite în prezenţă (250). 59. Inductanţa proprie (250). 60. Inductanţa internă (251). 61. Fluxul produs de un sistem de circuite electrice şi străbătând o suprafaţă închisă S ce se sprijină pe un contur C (251). 62. Diverse noţiuni de inductanţă (251). 63. Formula lui Neumann (253). 64. Inductanţa unui tor (253). 65. Inductanţa mutuală a două circuite situate pe acelaşi tor (253). 66. Diverse inductanţe privind o linie de transport, scrise în orice sistem coerent de unităţi (254). 67. Inductanţa privind o linie de transport, dar scrise în cazul particular al sistemului practic, valorile fiind exprimate în Henry pe km. (255). 68. Coeficient de cuplaj (255). 69. Curba de magnetizare (256). 70. Permeabilitatea unui material magnetic (256). 71. Circuitul magnetic (256). 72. Reluctanţa (259). 73. Permeanţa (260). 74. Montarea reluctanţelor în serie (260). 75. Direcţia forţei magnetomotoare (260). 76. Legea lui Kirchhoff (260). 77. Diferenţe dintre circuitele electrice şi cele magnetice (260). 78. Teoriile magnetismului (261). 79. Magnetostricţiunea (265). 80. Noţiuni de magnetism terestru (265). 81. Ipoteze asupra cauzei magnetismului terestru (266). 82. Legea fundamentală a inducţiei (266). 83. Principiul lui Lenz (266). 84. Forţa electromotoare indusă în conductori în mişcare (267). 85. Forţa electromotoare de autoinducţie (267). 86. Regimul tranzitoriu al unui circuit RL supus în mod brusc la acţiunea unei f.e.m. constante (267). 87. Curenţii turbionari (Foucault). 88. Efectul pelicular (268). 89. Efectul Wilson (268).

E. Electroenergetica 268

90. Aspectul general energetic al fenomenelor electrice şi magnetice (268). 91. Principiul conservării energiei (269). 92. Transformarea energiei electrice în energie calorică (269). 93. Legea lui Joule-Lenz (269). 94. Energia debitată de o sursă (269). 95. Surse electrice generatoare şi receptoare (269). 96. Bilanţul energetic al unei reţele conţinând rezistenţe (270). 97. Bilanţul energetic sau principiul conservării într'o reţea electrică (270). 98. Bilanţ energetic aplicat unei părţi închise a unei reţele (271). 99. Energia câmpurilor magnetice produse de circuitele electrice (271). 100. Sarcina electrică a unui condensator (273). 101. Bilanţul energiei produse de sursă (273). 102. Descompunerea energiei transmise mediului electric (273). 103. Energia câmpului de inducţie magnetică pe unitatea de volum (274). 104. Energia câmpului electric pe unitatea de volum (275). 105. Lucrul mecanic efectuat prin deformarea unui circuit electric (275). 106. Lucrul mecanic efectuat în cazul a două circuite în prezenţă (275). 107. Lucrul mecanic efectuat prin deplasarea infinit mică a unui circuit străbătut de un curent constant (275). 108. Forţa de acţiune între două circuite paralele nedeformabile, coaxiale (275). 109. Cuplul la care este supusă o spiră plană situată într'un câmp uniform (276). 110. Forţa de acţiune a unui circuit asupra unui corp feromagnetic situat pe axa circuitului (276). 111. Forţa dintre doi electromagneţi coaxiali (276). 112. Forţa la care este supus un element de conductor situat într'un câmp B (277). 113. Forţa asupra unui conductor liniar finit, străbătut de un curent (277). 114. Forţa dintre doi curenţi paraleli (277). 115. Principiul tensiunii şi repulsiei liniilor de forţă (277). 116. Forţa de atracţie dintre două jumătăţi ale unui tor, separate printr'un plan conţinând axa sa, dar lipite între ele (278). 117. Forţa de atracţie dintre două jumătăţi ale unui tor, separate printr'un plan conţinând axa sa, dar lipite între ele. Secţiunea este de o formă oarecare însă mică faţă de raza fibrei mediane (278). 118. Forţa de atracţie a unui electromagnet cu cursă scurtă (279). 119. Forţa de atracţie a unui electromagnet cu cursă lungă (279). 120. Bilanţ energetic electrodinamic (279). 121. Lucrul mecanic efectuat de un sistem condensator prin variaţia capacităţii (280). 122. Forţa dintre armăturile unui condensator (280). 123. Forţa de acţiune asupra unui corp străin într'un mediu dielectric (280). 124. Aspectul energetic a fenomenelor histerezis şi Foucault (281).

F. Noţiuni de electrochimie teoretică .. 282

125. Electrochimia (282). 126. Electroliţi (282). 127. Electroliza (282). 128. Conducţia electrolitică (282). 129. Legea lui Faraday (282). 130. Ipoteza ionică (282). 131. Ionii (282). 132. Punctul neutru al unei soluţii (283). 133. pH-ul unei soluţii (283). 134. Teoria disociaţiei (283). 135. Presiunea osmotică (283). 136. Potenţial electrolitic (283). 137. Valoarea potenţialului electrolitic (284). 138. Pilele de concentraţie (284). 139. Pila cu gaz (285). 140. Polarizarea electrozilor (285). 141. Aspectul energetic al fenomenelor electrochimice (285).

G. Noţiuni de electronică 285

142. Impasul teoriei câmpului (285). 143. Sarcina electrică elementară (286). 144. Curentul de convecţie (286). 145. Mişcarea unui electron într'un câmp electrostatic (287). 146. Mişcarea electronului într'un câmp magnetic (287). 147. Teoria clasică a electronilor (287). 148. Observaţii generale asupra teoriei electronilor (288). 149. Câmpul unui electron care se mişcă uniform şi încet (289). 150. Mişcarea electronului cu viteze comparabile cu viteza luminii (289). 151. Câmpul produs de electronii în mişcare

(289). 152. Aplicațiile teoriei electronice (289). 153. Efectul Schottky (289). 154. Efectul Hall (290). 155. Electronii în metale (290).

H. Fenomene electrice în vid și gaze.. 290

156. Conducția electrică în vidul înaintat (290). 157. Emisia electronilor din catod (291). 158. Dependența de intensitatea câmpului (291). 159. Intrarea electronilor în anod (291). 160. Emisiunea secundară de electroni (291). 161. Mișcarea ionilor în gaze (291). 162. Mișcarea ionilor sub acțiunea unui câmp electric (291). 163. Parcursul liber (292). 164. Ionizarea gazelor (292). 165. Plasma (292). 166. Descărcările obscure (292). 167. Descărcări cu efect Corona (292). 168. Tensiuni critice ale fenomenului Corona (292). 169. Descărcări luminiscente (293). 170. Caracteristica tensiune-curent (293). 171. Potențial exploziv (293). 172. Legea lui Paschen (294). 173. Descărcări în joasă presiune (294). 174. Descărcarea în arc (294). 175. Raze catodice (294). 176. Tubul catodic (295). 177. Raze pozitive (295). 178. Spectrograful de masă (295). 179. Raze X (295). 180. Tuburile electronice (296). 181. Aplicațiile tuburilor electronice (296).

I. Diferite fenomene electrice........ 297

182. Efectul Seebeck (297). 183. Efectul Peltier (298). 184. Efectul Thomson (Kelvin) (298). 185. Efecte termomagnetice (298). 186. Punct Curie (298). 187. Electrostricțiunea (298). 188. Piezoelectricitatea (298). 189. Fotoelectricitate (299). 190. Celulele fotoelectrice (299). 191. Piroelectricitate (300). 192. Piroelectricitate polară (300). 193. Segnetoelectricitatea (300). 194. Variația rezistivității metalelor supuse unui câmp magnetic (301).

J. Noțiuni generale privind curenții alternativi..................... 301

a) *Funcții periodice* 301

195. Mărimea periodică (301). 196. Curentul periodic (301). 197. Curentul alternativ (301). 198. Curentul electric alternativ simetric (301). 199. Curentul electric pulsatoriu (301). 200. Curentul electric alternativ sinusoidal (301). 201. Curentul alternativ nesinusoidal (301). 202. Valoarea instantanee (301). 203. Valoarea de vârf (301).

b) *Noțiuni privind curenții alternativi*.. 302

204. Perioada T (302). 205. Frecvența (302). 206. Pulsația (302). 207. Amplitudinea (302). 208. Suma a două funcții sinusoidale (302). 209. Produsul a două funcții de aceiași pulsație (302). 210. Suma a două funcții sinusoidale de pulsații diferite și de amplitudini egale (302). 211. Produsul a două funcții sinusoidale de pulsații diferite (303). 212. Valoarea eficace a unei mărimi periodice (303). 213. Valoarea eficace a unei mărimi alternative sinusoidale (303). 214. Valoarea eficace a sumei de funcții sinusoidale de pulsații diferite (304). 215. Valoarea eficace a sumei de funcții sinusoidale de aceiași pulsație (304). 216. Valoarea medie (304). 217. Valoarea medie pe o jumătate de perioadă (304). 218. Factorul de formă (305). 219. Defazaj (305). 220. Faza (305). 221. Funcții în fază (305). 222. Funcții defazate (305). 223. Defazajul de timp (305). 224. Defazajul de unghi (305). 225. Funcții în cuadratură (306). 226. Funcții în opoziție (306). 227. Funcția derivată (306). 228. Funcția integrală. (306).

K. Circuite de curent alternativ în regim sinusoidal 307

229. Producerea forțelor electromotoare sinusoidale (307). 230. Ecuația generală a circuitului cu rezistența R și inductanța L (307). 231. Regimul tranzitoriu și regimul permanent (308). 232. Curent watat și curent dewatat (308). 233. Reactanța (308). 234. Impedanța (309). 235. Căldura desvoltată de un curent alternativ într'un conductor (309). 236. Interpretarea geometrică a ecuației care definește curentul (310). 237. Diferența de potențial alternativă (311). 238. Impedanța conductorilor în serie (311). 239. Circuit cuprinzând R. L. C. (312). 240. Reprezentarea grafică a ecuației circuitului serie (314). 241. Rezistențe și reactanțe în paralel (314).

L. Metode de calcul în curenții alternativi..................... 315

242. Clasificare (315). 243. Metoda analitică (315). 244. Metoda cinematică (316). 245. Suma a două funcții a și b va fi tot o funcție sinusoidală de pulsație (316). 246. Aplicația 1. Produsul a două funcții sinusoidale de aceiași pulsație (317). 247. Aplicația 2. Suma a două funcții sinusoidale de pulsații diferite (317). 248. Metoda geometrică grafică (318). 249. Aplicația 3. Sistem de distribuție având într'o latură o intensitate constantă (318). 250. Metoda vectorială (320). 251. Aplicația 4. (321). 252. Aplicația 5 (321). 253. Aplicarea metodei mărimilor complexe la funcțiile sinusoidale. Precizări asupra reprezentării vectoriale (321). 254. Introducerea mărimilor complexe (322). 255. Operații asupra mărimilor complexe (324). 256. Domeniul de aplicare în electrotehnică a mărimilor complexe (324). 257. Aplicații de calcule prin mărimi complexe în electrotehnică (325). 258. Puntea Wheatstone în curenți alternativi sinusoidali (329). 259. Metoda de calcul prin separația puterilor (329).

M. Fenomenul de rezonanță 329

260. Circuitul serie (329). 261. Circuite în derivație (331). 262. Curbe de rezonanță (331). 263. Aplicații (334).

N. Fenomene energetice în curent sinusoidal..................... 335

264. Generalități (335). 265. Puteri instantanee (335). 266. Puterea reală (sau activă) (336). 267. Puterea fluctuantă (336). 268. Putere aparentă (336). 269. Factor de putere (337). 270. Putere reactivă (338). 271. Exemple de putere (338). 272. Unități de putere (339). 273. Diagrama puterilor instantanee. 274. Calculul puterilor prin reprezentarea vectorială (340). 275. Calculul puterilor prin mărimi complexe (340). 276. Componente watate și dewatate (341). 277. Energii reale și reactive (341). 278. Principiul conservării puterilor (341). 279. Semnificația fizică a noțiunilor de puteri (342). 280. Energia reactivă (342). 281. Diagrama vectorială a puterilor (342). 282. Metoda separației puterilor (343). 283. Aplicație (343).

O. Curenți polifazați............... 343

284. Generalități (343). 285. Ordinea de succesiune a fazelor într'un sistem polifazat (344). 286. Moduri de grupare a circuitelor polifazate (346). 287. Puteri în sisteme polifazate echilibrate (348). 288. Reprezentarea sub formă complexă a sistemelor polifazate echilibrate (349). 289. Calculul puterilor reale, reactive și aparente într'un sistem polifazat echilibrat (349). 290. Realizarea unui sistem polifazat echilibrat (350). 291. Regimul trifazat (351). 292. Operatorul a în sisteme trifazate (352). 293. Impedanțe echilibrate și desechilibrate (353). 294. Curenții pe linie și în laturile unui dispozitiv trifazat (353). 295. Determinarea curenților pe linie (354). 296. Puterile reale și reactive ale unui sistem trifazat (354). 297. Operația compensării factorului de putere în regim trifazat (355). 298. Metoda prin separația puterilor (356).

P. Câmpuri învârtitoare 357

299. Mașini cu poli aparenți și mașini cu întrefier constant (357). 300. Câmpuri radiale (357). 301. Diferența de fază în spațiu (358). 302. Diagrama de spațiu și diagrama de timp (359). 303. Câmp radial cu repartiție sinusoidală (359). 304. Câmp învârtitor (360). 305. Câmp învârtitor bifazat multipolar (360). 306. Câmp învârtitor trifazat multipolar (361). 307. Câmpul polifazat multipolar (361). 308. Câmpuri alternative de spațiu și timp și câmpuri învârtitoare (362). 309. Descompunerea unui câmp alternativ în două câmpuri învârtitoare în sens contrar (363). 310. Aplicațiile câmpurilor învârtitoare (363).

Q. Câmpul electromagnetic.......... 363

311. Observație preliminară (363). (312). Deplasarea electrică (363). 313. Curentul de deplasare (364). 314. Energia câmpului electric (365). 315. Inducție magnetică (366). 316. Potențialul vectorial (366). 317. Energia câmpului magnetic

(366). 318. Ecuațiile lui Maxwell (367). 319. Constantele mediului în diferite sisteme de unități (368). 320. Cazuri particulare (368). 321. Constantele de propagare (369). 322. Ecuația undelor (370). 323. Viteza de propagare (371). 324. Vectorul Umov-Poynting (372). 325. Aplicații (373). 326. Presiunea energiei radiante (373). 327. Câmpul electric în funcție de sarcini și curenți (374). 328. Unde periodice în general (374). 329. Unde plane (374). 330. Unde sferice (375).

R. Propagarea curentului și a tensiunii pe o linie de transmisie 377

331. Ecuațiile propagării (377). 332. Semnificația parametrilor Z_c și γ (380). 333. Semnificația constantelor α și β (380). 334. Soluția ecuațiilor de propagare sub formă reală (381). 335. Viteza de propagare a fazei (382). 336. Propagarea undelor nesinusoidale (383). 337. Cazul liniilor de energie (384). 338. Exemplu de calcul (386). 339. Linii sfert de undă (387).

S. Cuadripoli 387

340. Definiții (387). 341. Ecuațiile cuadripolului (387). 342. Semnificația fizică a constantelor unui cuadripol (388). 343. Determinarea constantelor unui cuadripol (388). 344. Impedanța caracteristică (388). 345. Cuadripol simetric (388). 346. Circuitul T echivalent al unui cuadripol oarecare (389). 347. Circuitul echivalent al unui cuadripol oarecare (389). 348. Diagramele generale ale cuadriopolului. Diagrama de tensiune (389). 349. Diagrama puterilor (diagrama cu doi poli de tensiune sau diagrama cercului) (390). 350. Aplicație. Studiul punții Wheatstone (391). 351. Dipolul (391). 352. Ecuațiile dipolului (392). 353. Diagramele dipolului (392).

T. Regimul deformant 393

354. Regimul deformant (393). 355. Funcție periodică nesinusoidală (393). 356. Funcții armonice (393). 357. Descompunerea și compunerea funcțiilor periodice (393). 358. Două armonice de același ordin sunt în fază (393). 359. Compunerea armonicelor (393). 360. Analiza armonică a funcțiilor nesinusoidale (394). 361. Analiza armonică a curbelor periodice experimentale (395). 362. Mărimile caracteristice ale regimului deformant (397). 363. Criteriul de caracterizare a unui regim deformant (397). 364. Puterea în regimul deformant (397). 365. Conservarea puterilor în regimul deformant (398). 366. Factor de putere în regim deformant (401). 367. Circuite electrice în regim deformant (401). 368. Producerea regimului deformant (402). 369. Efectele regimului deformant (403). 370. Regimul deformant în sisteme trifazate echilibrate (405). 371. Efectele fierului în rețelele trifazate (407).

U. Regimul polifazat desechilibrat 407

372. Generalități (407). 373. Reprezentarea topografică a tensiunilor (407). 374. Problema generală a sistemelor desechilibrate (408). 375. Metodă analitică pentru calcularea punctului neutru al sarcinii și curenții pe faze (408). 376. Metodă grafică pentru determinarea potențialului punctului neutru (408). 377. Calculul curenților când se cunosc tensiunile între faze la utilizare (409). 378. Reprezentarea analitică a unui sistem trifazat (410). 379. Reprezentarea sistemelor de vectori trifazați simetrici cu ajutorul operatorului a (410). 380. Teorema lui Stokvis-Fortescue (411). 381. Determinarea componentelor simetrice ale unui sistem trifazat dat (411). 382. Proprietăți ale componentelor simetrice (412). 383. Gradul de desechilibrare al unui sistem de vectori trifazați (412). 384. Operații cu sisteme trifazate (412). 385. Legile lui Kirchhoff în sistemul desechilibrat (413). 386. Calculul circuitelor trifazate desechilibrate cu ajutorul componentelor simetrice (414). 387. Puterea în regimul desechilibrat (415).

V. Regimul tranzitoriu 416

388. Generalități (416).

a) *Regimul tranzitoriu al sistemelor în care se ține seama numai de o singură formă a energiei* 417

389. Circuit format din o rezistență și o inductanță în serie. Expresia generală a curentului (417). 390. Aplicații (418). 391. Circuit format dintr'un condensator în serie cu o rezistență. Expresia generală a curentului în circuit și a tensiunii la bornele condensatorului (419). 392. Aplicații (420).

b) *Regimul tranzitoriu al sistemelor electrice în care se ține seama de ambele forme de energie* 421

393. Generalități (421). 394. Expresia generală a curentului și tensiunii în un circuit serie cu R, L, C, supus unui regim tranzitoriu (421). 395. Aplicații (423).

c) *Aplicarea cantităților complexe la studiul regimului tranzitoriu*...... 424

396. Generalități (424). 397. Legea lui Ohm generalizată aplicată curenților tranzitorii (424). 398. Trecerea dela ecuațiile în cantități complexe la ecuațiile diferențiale și la valorile instantanee și invers. Metode de calcul (425). 399. Aplicații (426).

d) *Studiul regimului tranzitoriu cu ajutorul calculului operațional. Transformarea lui Laplace* 426

400. Generalități (426). 401. Impedanța operațională (427). 402. Metoda de calcul a regimurilor tranzitorii (428). 403. Avantajele calculului operațional față de metoda utilizării cantităților complexe (428). 404. Aplicații (428).

W. Utilizarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice 431

405. Generalități (431). 406. Studiul cuadripolului (432). 407. Legarea în lanț a cuadripolilor (433). 408. Legarea cuadripolilor în paralel (434). 409. Legarea cuadripolilor în serie (434). 410. Exemple de cuadripoli simpli (435). 411. Studiul general al unui cuadripol complex (436). 412. Studiul rețelelor electrice (437). 413. Invarianța formelor. Formule de transformare (438). 414. Reguli generale de calcul al rețelelor (438). 415. Exemplu de calcul (440). 416. Transformări succesive ale rețelelor (441). 417. Interconectarea rețelelor. Interconectarea prin conductori (441). 418. Interconectarea rețelelor. Interconectarea prin circuite magnetice (443).

Z. Electricitatea atmosferică 443

419. Generalități (443).

a) *Electricitatea timpului frumos* 444

420. Ionizarea aerului (444). 421. Conductivitatea aerului (445). 422. Câmpul electric terestru (445). 423. Curentul de conducție (446). 424. Interdependența mărimilor electrice și influența factorilor meteorologici (446).

b) *Electricitatea timpului de furtună*.. 447

425. Caracterele electrice ale timpului de furtună (447). 426. Norul de furtună (448). 427. Acțiunile electrice ale norului de furtună (449). 428. Descărcările electrice (450). 429. Forme particulare ale descărcărilor (450). 430. Trăsnetul și condițiile de sol (451). 431. Tunetul (452).

c) *Originea electricității atmosferice*.... 452.

432. Considerații generale (452).

IV. Măsurători electrice și magnetice

A. Generalități asupra măsurătorilor.. 453

1. Măsurarea unei mărimi (453). 2. Sisteme de unități (453). 3. Etalonul (453). 4. Valorile unei mărimi (453). 5. Erori. Definiții (454). 6. Erori. Clasificare (454). 7. Calculul erorilor în măsurătorile indirecte (456).

B. Generalități asupra aparatelor de măsurat 459

8. Erorile aparatelor de măsurat (459). 9. Gradul de precizie (459). 10. Factorul de calitate (459). 11. Dispozitive de citire și împărțirea scării (460). 12. Dispozitive de amortisare (461). 13. Susținerea organului

mobil (462). 14. Punerea la zero a aparatelor de măsurat (462). 15. Consumația proprie a aparatelor electrice de măsurat (462). 16. Izolația aparatelor și încercarea la tensiune (463). 17. Capacitatea de supraîncărcare a instrumentelor de măsurat (463). 18. Influențarea aparatelor de către câmpurile exterioare (464). 19. Influența temperaturii (464). 20. Influența frecvenței (465).

C. Generalități asupra elementelor de circuit: rezistențe, inductanțe și capacități 465

21. Rezistențe (465). 22. Manganina (465). 23. Rezistențele etalon (465). 24. Rezistențele de precizie (466). 25. Șunturile (467). 26. Rezistențele adiționale (468). 27. Reostate de reglaj al curenților și tensiunilor (469). 28. Inductanțe (469). 29. Etaloanele primare de inductanță (469). 30. Etaloanele secundare (469). 31. Variometrele (469). 32. Bobinele de inductanță cu fier (469). 33. Capacități (469). 34. Condensatorii (470). 35. Unghiul de pierderi (470). 36. Factorul de pierderi (470). 37. Condensatorii etalon (470).

D. Aparate electrice de măsurat 471

38. Clasificarea aparatelor de măsurat după principiul lor de funcționare (471). 39. Marcarea aparatelor de măsurat (471). 40. Aparate cu magnet permanent și bobină mobilă (473). 41. Galvanometre (474). 42. Sensibilitatea, perioada și rezistența critică de amortisare (475). 43. Galvanometrul balistic (477). 44. Alte tipuri de galvanometre (477). 45. Aparate electromagnetice cu fier mobil (477). 46. Ampermetrele și voltmetrele electro-magnetice (478). 47. Aparate electromagnetice de tipul logometrelor (479). 48. Aparate electrodinamice (479). 49. Aparate electrodinamice fără fier (479). 50. Aparatele electrodinamice cu fier (480). 51. Aparate electrodinamice cu bobine mobile încrucișate (480). 52. Aparate termice (480). 53. Aparate de inducție (481). 54. Aparate de inducție cu fluxuri multiple (481). 55. Aparate de inducție cu flux unic (482). 56. Aparate de inducție fără cuplu antagonist (483). 57. Aparate electrostatice (483). 58. Voltmetre electrostatice de joasă tensiune (483). 59. Voltmetre electrostatice de înaltă tensiune (484). 60. Extinderea domeniului de măsurare (484). 61. Aparate cu redresori uscați (485). 62. Ampermetre, voltmetre și voltampermetre cu redresori uscați (485). 63. Aparatele cu termocuplu (486). 64. Aparatele înregistratoare (487). 65. Inregistratorii cu rază luminoasă (488). 66. Inregistrarea defectelor (488) 67. Aparatul cu bimetal (489). 68. Oscilografe (489). 69. Oscilografele electromagnetice (489). 70. Oscilograful catodic (490). 71. Oscilografele catodice de înaltă tensiune (492). 72. Clidonograful (493). 73. Aparate de rezonanță (493). 74. Frecvențmetrele de rezonanță cu lamele vibrante (493). 75. Galvanometrul de vibrații sau de rezonanță (494).

E. Transformatori de măsură 495

76. Generalități (495) 77. Raportul de transformare (496). 78. Tensiunile de încercare (497). 79. Erorile transformatorilor de măsură (498). 80 Reguli pentru montajul trarsformatorilor de măsură (500). 81. Polaritatea înfășurărilor transformatorilor de măsură (501). 82 Constanta aparatelor folosite ca transformatori de măsură (501) 83. Transformatorii de intensitate (502). 84. Transformatori de intensiatte compensați (503). 85. Puterea transformatorului de intensitate (503). 86. Comportarea transformatorilor de intensitate în serviciu (504). 87. Protecția împotriva undelor de supratensiune (504). 88. Coeficientul de saturație (504). 89. Curentul limită dinamic (504). 90. Curentul limită termic de 10 secunde (505). 91. Clasificarea transformatorilor de intensitate (505). 92. Construcția transformatorilor de intensitate pentru exploatare (506). 93. Intrebuințarea transformatorilor de intensitate în exploatare (508). 94. Transformatorii de intensitate cu sensibilități multiple (508). 95. Transrormatorii de tensiune (510). 96. Erori admisibile (510). 97. Puterea transformatorului de tensiune (511). 98. Construcția transformatorilor de tensiune pentru

exploatare (511). 99. Transformatori de tensiune cu sensibilități multiple (512). 100. Izolația transformatorilor (512).

F. Metode de măsurare 513

a) *Măsurarea tensiunii* 513

101. Unitatea și etalonul de forță electromotoare (513). 102. Metodele de opoziție (de compensație) (513). 103. Potențiometrele (sau compensatorii) de curent continuu (515). 104. Potențiometrele de curent alternativ (515). 105. Măsurarea tensiunilor continue în practica industrială (515). 106. Măsurarea tensiunilor alternative în practica industrială (516). 107. Măsurarea tensiunilor înalte (516). 108. Măsurarea valorilor eficace ale tensiunilor înalte (516). 109. Măsurarea valorii maxime a tensiunilor înalte. Eclatorul cu sfere. (516). 110. Măsurarea cu eclatorul (517). 111. Determinarea tensiunii de conturnare sau de străpungere (517). 112. Condiții de bună funcționare a eclatorului cu sfere (518). 113. Dispozitivul cu condensator de măsură și curent redresat pentru măsurarea tensiunilor de creastă (518).

b) *Măsurarea curentului* 518

114. Unitatea de curent electric (518). 115. Măsurătorile de precizie de curent continuu (518). 116. Măsurătorile industriale de curent continuu (519). 117. Ampermetrele cu șunturi (519). 118. Alte tipuri de aparate pentru măsurări de intensități în curent continuu (520). 119. Transformatori de curent continuu (521). 120. Măsurătorile de curent alternativ (521).

c) *Măsurarea puterilor* 521

121. Watul (521). 122. Măsurători de putere în curent continuu cu ampermetrul și cu voltmetrul (521). 123. Măsurarea puterii în curent continuu cu wattmetrul electrodinamic (522). 124. Măsurarea puterii active în circuitele monofazate (522). 125. Utilizarea wattmetrului electrodinamic pentru măsurări de puteri continue și monofazate (522). 126. Sensul indicației wattmetrului (523). 127. Montajul wattmetrului (523). 128. Indicația wattmetrului electrodinamic în curent continuu (523). 129. Indicația wattmetrului electrodinamic în curent alternativ (523). 130. Constanta wattmetrului. (524). 131. Erorile în măsurarea puterii monofazate datorite consumului bobinelor de tensiune și de curent ale wattmetrului electrodinamic (524). 132. Erori datorite inductanței bobinei de tensiune a wattmetrului (526). 133. Wattmetru electrodinamic pentru măsurări de puteri sub un factor de putere redus (526). 134. Montajul wattmetrelor cu ajutorul transformatorilor de măsură (527). 135. Montajul semi-indirect cu transformator de intensitate (527). 136. Montajul semi-indirect cu transformator de tensiune (528). 137. Montajul indirect (528). 138. Constanta wattmetrului montat pe transformatorul de măsură (528). 139. Erorile în măsurarea puterii monofazate cu ajutorul wattmetrelor montate pe transformatori de măsură (529). 140. Măsurarea puterii active în circuitele polifazate (529). 141. Metoda celor n wattmetre (529). 142. Metoda celor n-1 wattmetre. (530). 143. Variantele metodei celor n-1 wattmetre (530). 144. Măsurarea puterii active în circuitele trifazate fără fir neutru (532). 145. Metoda celor trei wattmetre (532). 146. Montajul celor trei wattmetre cu transformatori de măsură (533). 147. Metoda celor trei wattmetre aplicată la circuitele simetrice ca tensiuni și echilibrate ca curenți (533). 148. Metoda celor două wattmetre (534). 149. Determinarea factorului de putere cos φ prin metoda celor două wattmetre (537). 150. Montajul celor două wattmetre cu ajutorul transformatorilor de măsură (537). 151. Avantajele și desavantajele metodei celor două wattmetre (537). 152. Metoda celor două wattmetre aplicată cu ajutorul unui singur wattmetru (538). 153. Măsurarea puterii trifazate active în circuitele cu fir neutru (540). 154. Wattmetre trifazate (541). 155. Măsurarea puterii reactive (542). 156. Măsurarea indirectă a puterii reactive (542). 157. Măsurarea directă a puterii reactive monofazate cu ajutorul varmetrelor electrodinamice (543). 158. Măsurarea puterii reactive polifazate cu ajutorul varmetrelor (544). 159. Metoda celor *n* și *n*-1 varmetre

(544) 160. Metoda celor trei varmetre pentru măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate. fără fir neutru (544). 161. Formula generală cu trei termen i (545). 162. Metoda celor două varmetre pentru măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate fără fir neutru (546). 163. Măsurarea directă a puterii reactive monofazate cu ajutorul wattmetrelor obişnuite (546). 164. Măsurarea directă a puterii reactive în circuite trifazate fără fir neutru cu ajutorul wattmetrelor obişnuite (547). 165. Metoda celor trei wattmetre (547). 166. Metoda celor două wattmetre (548). 167. Rezistenţe adiţionale pentru măsurarea puterii active şi reactive (549). 168. Măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate cu fir neutru, prin metoda celor trei wattmetre (550).

d) *Măsurarea factorului de putere* 550

169. Factorul de putere (550). 170. Măsurarea indirectă a factorului de putere (550). 171. Măsurarea directă a factorului de putere (551)

e) *Măsurarea frecvenţei* 553

172. Instrumentele pentru măsurarea frecvenţei (553). 173. Măsurarea indirectă a frecvenţei (554).

f) *Sincronizarea*.................... 554

175. Compararea tensiunilor (554). 176. Compararea frecvenţelor. (554). 177. Concordanţa de fază (554). 178. Dispozitive de sincronizare (556).

g) *Măsurarea rezistenţelor* 557

179. Materiale conductoare şi izolante (557). 180. Metoda ampermetrului şi voltmetrului (557). 181. Metoda comparaţiei (559). 182. Metodele de punte (559). 183. Puntea Wheatstone (559). 184. Măsurări de rezistenţe electrolitice (561). 185. Puntea dublă (562). 186. Rezistenţa de izolaţie (564). 187. Metoda galvanometrului (565). 188. Metoda pierderii de sarcină (568). 189. Măsurarea rezistenţelor de izolaţie a instalaţiilor electrice de forţă şi lumină a maşinilor şi aparatelor electice (568). 190. Măsurarea rezistenţei de izolaţie a circuitelor electrice faţă de pământ (568). 191. Aparatele pentru măsurarea directă a rezistenţelor de izolaţie. Ohmetre. (569). 192. Ohmmetrul de baterie (569). 193. Ohmmetrul cu magnetou (570). 194. Megohmmetrul cu tub electronic (571). 195. Măsurarea rezistenţei de punere la pământ (572). 196. Condiţii de îndeplinit (572). 197. Executarea măsurătorii (573). 198. Localizarea defectelor pe linii (574). 199. Localizarea defectelor prin metoda punţii (metoda buclei) (575). 200. Localizarea defectelor prin metoda căderii de tensiune (577). 201. Punţi de înaltă tensiune pentru localizarea defectelor în cabluri (577). 202. Defecte prin ruperea unui cablu (578). 203. Punţile universale (579). 204. Controlul izolaţiei reţelelor trifazate faţă de pământ (579). 205. Semnalizarea defectului (579). 206. Rezistenţa în curent alternativ, sau rezistenţa efectivă (579). 207. Reactanţa X şi impedanţa Z (579).

h) *Măsurarea capacităţilor* 580

208. Metoda industrială a ampermetrului şi voltmetrului (580). 209. Metoda galvanometrului balistic (580). 210. Metoda de punte (580).

i) *Măsurarea inductanţelor* 582

211. Metoda industrială a ampermetrului şi voltmetrului (582). 212. Metode de punte (583).

j) *Măsurarea inductanţelor mutuale*.. 584

213. Metoda industrială a ampermetrului şi voltmetrului (584). 214. Metoda indirectă (585). 215. Metoda comparaţiei (584). 216. Metoda de punte (584).

k) *Măsurători magnetice* 585

217. Generalităţi (585). 218. Determinarea experimentală a curbei de magnetizare a ciclului de histerezis (585). 219. Metoda inelului pentru ridicarea curbei de magnetizare şi a ciclului de histerezis (586). 220. Permeametrele (590). 221. Câmpurile magnetice (591). 222. Pierderile în fier (591). 223. Aparatul Epştein (592). 223 bis. Metoda diferenţială (593). 224. Aparate pentru măsurarea diferenţei de potenţial magnetic (593).

G. Măsurarea energiei electrice, Contori electrici **595**

225. Generalităţi (595). 225 bis. Categoriile de contori (595).

a) *Wattorămetre* 595

226. Contori dinamometrici de tip « motor » pentru curent continuu (595). 227. Contori dinamometrici oscilanţi (598). 228. Contorul monofazat de inducţie (598). 229. Cauzele de erori în contorul de inducţie monofazat şi mijloacele de combatere (601). 229 bis. Curbe de erori ale contorilor (602). 230. Măsurarea energiei active în circuitele trifazate (603). 231. Contori trifazaţi pentru măsurarea energiei active în în circuitele trifazate fără fir neutru, cu sarcini echilibrate sau desechilibrate (604). 232. Contori trifazaţi pentru circuite trifazate cu fir neutru (605). 233. Montajul contorilor de energie activă cu transformatori de măsură (606). 234. Contori de energie reactivă (608). 235. Contori speciali-varorămetre-monofazaţi (608). 236. Contori speciali-varorămetre-trifazaţi (609). 237 Contori monofazaţi de energie reactivă utilizând tensiuni auxiliare (609). 238. Contori trifazaţi de energie reactivă pentru circuite trifazate fără fir neutru, cu tensiuni între faze simetrice şi curenţi desechilibraţi (610). 239. Contori trifazaţi de energie reactivă pentru circuite cu fir neutru (611). 240. Montajul indirect al contorilor de energie reactivă (611). 241. Erorile contorilor trifazaţi (613). 241 bis. Erorile de conexiune a contorilor (613).

b) *Amperorămetre* 615

242. Contori amperorămetre (615). 243. Contori electrolitici (616). 244. Contori magnetomotori (616). 245. Contorii magnetomotori cu mercur (616).

c) *Contori pentru tarife speciale*...... 617

246. Contori cu dublu tarif (617). 247. Contori cu triplu tarif (617). 248. Contori de vârf (617). 249. Contorul de depăşire (619). 250. Controlul cu plată prealabilă (620). 251. Controlul cu indicator de maxim (620).

d) *Erorile contorilor şi verificarea lor. Staţii de verificare* 621

252. Eroarea de înregistrare (621). 253. Verificarea unui contor (621). 254. Metoda comparaţiei indicaţiilor contorului cu aparate etalon de măsurat puterea (621). 255. Verificarea directă (621). 256. Determinarea erorii contorului (622). 257. Verificarea contorilor cu surse separate (623). 258. Sursele pentru verificarea contorilor de curent continuu (624). 259. Sursele pentru verificarea contorilor de curent alternativ mono - şi trifazaţi (625). 260. Staţii de verificare (627). 261. Verificarea de aparate de măsurat de curent alternativ (628). 262. Verificarea contorilor prin comparaţie cu un contor etalon (628). 263. Verificarea contorilor cu ajutorul mecanismului integrator (629). 264. Erorile maxime admise (629).

H. Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice **630**

265. Generalităţi (630). 266. Caracteristicele aparaturii pentru măsurarea electrică a mărimilor neelectrice (630). 267. Măsurarea electrică a vitezei unghiulare: Tacometrul electric (631). 268. Măsurarea electrică a nivelului lichidelor (631). 269. Pirometrie electrică (632). 270. Pirometrele termoelectrice (632). 271. Metalele şi aliajele (632). 272. Variaţia f.e.m. (633). 273. Măsurarea f.e.m. (633). 274. Corecţia de temperatură (634). 275. Compensarea erorilor de temperatură (634). 276. Instalaţiile de măsurat temperatura cu termocuplele (634). 277. Termometrele cu rezistenţă (635), 278. Puntea Wheatstone (635). 279. Radiaţia (636). 280. Radiaţia corpului negru (636). 281. Pirometrele cu radiaţie (636). 282. Pirometrele optice (637). 283. Cauzele de deteriorare (638). 284. Evitarea supraîncărcărilor electrice (638). 285. Evitarea şocurilor mecanice (638). 286. Condiţii de păstrare a aparatelor electrice de măsurat (639). 287. Condiţii preliminare pentru realizarea de măsurători precise (639).

I. MATEMATICI

ACUSTICĂ ȘI OPTICĂ
№ 3103

A. Determinanți. Transformări afine.

1. **Definiții**. Determinanții sunt simboluri de calcul de forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

a căror valoare se obține formând toate produsele $a_{ik} \cdot a_{i'k'} \cdot a_{i''k''}, \dots$ în așa fel ca toți $i, i', \dots$ și toți $k, k', \dots$ să fie diferiți între ei.

Un determinant format din n^2 mărimi a_{ik} este de *ordinul n*.

Indicii $i, i', i'', \dots$ și $k, k', k'', \dots$ formează astfel permutările primelor n numere naturale. Numărul termenilor obținuți este $n!$

Valoarea determinantului este suma algebrică a acestor produse care au semnul plus sau minus, după cum urmează:

Se așează fiecare produs astfel ca indicii i să urmeze ordinea naturală a numerelor.

Dacă numărul de schimbări necesare a factorilor, luați câte doi, pentru a aduce și numerele k în ordinea naturală a numerelor este par, semnul produsului respectiv este plus. Dacă numărul de schimbări este impar, semnul este minus. Numărul produselor cu semnul plus este egal cu al celor cu semnul minus.

2. **Valoarea determinanților de ordinul** 2 **și** 3 se calculează astfel:

Ordinul II $\quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

Ordinul III

$$D = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

$$D = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33},$$

adică se reproduc primele $n-1$ coloane în dreapta determinantului și apoi se înmulțesc elementele diagonalelor, dând produselor obținute semnul + sau —, după cum înmulțirea se face dela stânga la dreapta, respectiv dela dreapta la stânga. După aceeași regulă se pot calcula și valorile determinanților de ordin superior.

3. **Proprietăţile determinanţilor.** Dacă liniile şi coloanele unui determinant se schimbă între ele, valoarea determinantului rămâne aceeaşi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dacă se schimbă între ele două coloane sau două linii, determinantul îşi păstrează valoarea dar îşi schimbă semnul:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dacă toate elementele unei linii sau ale unei coloane se înmulţesc cu acelaşi factor λ, valoarea determinantului se înmulţeşte cu λ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Din ultimele două proprietăţi rezultă:

Dacă elementele a două coloane sau a două linii sunt egale sau proporţionale, valoarea determinantului este egală cu 0.

4. **Suma a doi determinanţi** de acelaşi ordin, şi care diferă doar prin elementele unei singure linii sau coloane, este egală cu determinantul având în locul liniei sau coloanei respective suma elementelor care diferă între ele:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}$$

5. **Produsul a doi determinanţi:**

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad |b_{ik}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

este:

$$|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = c_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Se observă că fiecare element al determinantului $|c_{ik}|$ este obţinut prin înmulţirea fiecărui element al liniei i a determinantului $|a_{ik}|$ cu fiecare element al coloanei k a determinantului $|b_{ik}|$, adică

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij}\, b_{jk} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Aceeaşi valoare se obţine dacă se fac produsele după cum urmează:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij}\, b_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

$$c_{ik} = \sum_j a_{ji}\, b_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

$$c_{ik} = \sum_j a_{ji}\, b_{jk} \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

6. **Determinanţi minori.** Dacă într'un determinant se suprimă linia i şi coloana k, determinantul rămas [înmulţit cu $(-1)^{i+k}$] se numeşte determinantul minor al elementului a_{ik}. El se notează cu A_{ik}.

Valoarea unui determinant în funcţie de minorii A_{ik} este egală cu

$$|a_{ik}| = \sum_i a_{ik}\, A_{ik} = \sum_k a_{ik}\, A_{ik}\,.$$

Pentru $\qquad i \neq j, \quad 0 = \sum_k a_{ik}\, A_{jk}\,.$

7. **Determinanţi simetrici.** Dacă $a_{ik} = a_{ki}$, determinantul se numeşte simetric. Dacă $a_{ik} = -a_{ki}$ şi deci $a_{ii} = 0$, determinantul este antisimetric.

Dacă a_{ik} şi a_{ki} sunt numere complexe conjugate, deci a_{ii} real, determinantul se numeşte hermitic şi valoarea sa este reală.

8. **Wronskianul.** Dacă f_1, f_2 şi f_3 sunt funcţii continue de x împreună cu primele două derivate, determinantul

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{vmatrix}$$

se numeşte *Wronskianul* acestui sistem de funcţii.

Dacă el este identic egal cu 0, funcţiile f_1, f_2, şi f_3 sunt liniar dependente.

9. **Aplicarea determinanţilor la rezolvarea ecuaţiilor liniare.** Sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= k_3 \end{aligned}$$

are o singură soluţie şi anume:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

cu condiţia:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dacă Δ precum şi toţi determinanţii minori ai acestuia până la rangul r sunt egali cu 0, în timp ce determinanţii care formează numărătorii valorilor lui $x, y, z, \ldots$ sunt de un rang superior lui r, sistemul nu are nicio soluţie.

Dacă determinanţii care formează numărătorii lui $x, y, z, \ldots$ sunt de un rang inferior sau egal cu acela al determinantului Δ, există o infinitate de soluţii ale sistemului.

Dacă $k_1 = k_2 = k_3, = \ldots k_n = 0$, sistemul de ecuaţii este omogen.

Condiţia pentru ca acest sistem să aibă o soluţie diferită de 0, este ca determinantul $\Delta = 0$.

10. **Transformări afine.** In general, prin transformarea unei porţiuni a spaţiului se înţelege aplicarea unei legi prin care fiecare punct se transformă în alt punct al spaţiului, adică unui sistem de valori $x_1, x_2, \ldots x_n$ îi corespunde un alt sistem de valori $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ pe baza unui sistem de ecuaţii de forma:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \ldots x'_n = f_n(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

De exemplu în spaţiul cu 3 dimensiuni, se numeşte afină o transformare de forma:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= \beta + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= \gamma + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \qquad (10.1)$$

adică aceea în care noile coordonate x', y', z' ale unui punct sunt exprimate prin relaţii liniare în funcţie de coordonatele iniţiale. Fiecărui punct x, y, z al spaţiului îi corespunde un alt punct x', y', z' şi numai unul. Invers, fiecărui punct x', y', z' îi corespunde un punct x, y, z cu condiţia ca

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Introducând o transformare intermediară x'', y'', z'', transformarea (10 1) poate fi descompusă în două transformări

$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y'' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z'' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} x' &= x'' + \alpha, \\ y' &= y'' + \beta, \\ z' &= z'' + \gamma. \end{aligned}$$

Ţinând seamă că ultima transformare este o simplă translaţie paralelă a spaţiului, studiul transformărilor afine se poate reduce la forma

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

11. **Proprietăţile caracteristice ale transformărilor afine sau liniare** sunt:
— Un plan se transformă într'un plan.
— O dreaptă se transformă într'o dreaptă.
— Dreptele şi planele paralele au ca transformate drepte şi plane paralele.
— Suprafeţele de ordinul II şi secţiunile conice se transformă în suprafeţe de ordinul II şi secţiuni conice.
— In general, direcţiile şi unghiurile se schimbă.
— Punctele dela infinit rămân la infinit.

Transformarea inversă este:

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_{11}}{|a|}x' + \frac{A_{21}}{|a|}y' + \frac{A_{31}}{|a|}z' \\ y &= \frac{A_{12}}{|a|}x' + \frac{A_{22}}{|a|}y' + \frac{A_{32}}{|a|}z' \\ z &= \frac{A_{13}}{|a|}x' + \frac{A_{23}}{|a|}y' + \frac{A_{33}}{|a|}z' \end{aligned}$$

unde $|a|$ este determinantul coeficienţilor transformării x', y', z'.

O transformare liniară este ortogonală dacă

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} = 0 \qquad (i \neq j).$$

In acest caz

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

12. **Transformări în general.** Dacă f_1, f_2 şi f_3 sunt funcţii diferenţiabile într'o regiune P a spaţiului x_1, x_2, x_3, atunci transformarea:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad x'_3 = f_3(x_1, x_2, x_3),$$

care transformă un sistem de valori x_1, x_2, x_3 în alt sistem de valori x'_1, x'_2, x'_3 poate fi considerată ca:

— o schimbare a sistemului de coordonate, în cazul în care x'_1, x'_2, şi x'_3 sunt socotite ca fiind coordonatele punctului care a avut la început coordonatele x_1, x_2 şi x_3;

— o translaţie a punctului având coordonatele x_1, x_2 şi x_3, în punctul având coordonatele x'_1, x'_2 şi x'_3, în acelaşi sistem de axe de coordonate.

13. **Iacobianul.** Determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

poartă numele de *determinant funcţional* al transformării *(iacobian)*.

In cazul în care f_1, f_2 şi f_3 sunt funcţii liniare de x_1, x_2 şi x_3, se regăseşte cazul transformării afine.

B. Calculul diferențial

14. Reguli de diferențiere. Dacă u și v sunt funcții de x, atunci:

$$\frac{\mathrm{d}(u \pm v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(uv)] = \frac{1}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(\frac{u}{v}\right)\right] = \frac{1}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^v = vu^{v-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u^v \ln u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

15. Transformarea expresiilor diferențiale.
Dacă $y = \mathrm{f}(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}; \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{3\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^5}.$$

Funcții de funcție

$$y = \mathrm{F}(u) \text{ și } u = \mathrm{f}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}u^3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^3 + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}\cdot 3\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}.$$

Funcții implicite

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{F}_x}{\mathrm{F}_y}, \text{ unde } \mathrm{F}_x = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \quad \mathrm{F}_y = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathrm{F}_{xx}\mathrm{F}_y^2 - 2\mathrm{F}_{xy}\mathrm{F}_x\mathrm{F}_y + \mathrm{F}_{yy}\mathrm{F}_x^2}{F_y^3}.$$

Funcții exprimate printr'un parametru

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^3}.$$

Schimbare de variabile

$$z = \mathrm{f}[u(x, y), v(x, y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

și

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial v} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial z}{\partial v} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.$$

Dacă

$$u = \Phi(x, y), \quad v = \Psi(x, y)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\mathrm{D}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\mathrm{D}}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\mathrm{D}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\mathrm{D}},$$

unde

$$\mathrm{D} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

este iacobianul sau determinantul funcțional.

In plus:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

16. Diferențiala totală.

Dacă $z = f(x, y)$

$$\partial z = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

este diferențială totală a lui z.

O expresie de forma:

$$dz = \Phi(x, y)\, dx + \Psi(x, y)\, dy$$

este o diferențială totală numai dacă

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d\Psi}{\partial x}.$$

17. Formula mediei în calculul diferențial:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Dacă $f(x+h) = f(x) = 0$, rezultă *teorema lui Rolle*: între două rădăcini ale unei ecuații se găsește o rădăcină a derivatei.

Mai general

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

unde ξ este o valoare între a și b.

Pentru funcțiile de două variabile teorema mediilor este:

$$f(x+h,\ y+k) - f(x, y) = h\frac{\partial f(x + \theta h,\ y + \theta k)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x+\theta h,\ y + \theta k)}{\partial y},$$

unde $0 < \theta < 1$.

18. Teorema lui Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

unde $0 < \xi < h$.

Pentru funcțiile de două variabile, teorema lui Taylor are forma:

$$f(x+h,\ y+k) - f(x, y) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left\{h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right\} +$$

$$+ \ldots \frac{1}{n!}\left\{h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + C_n^1 h^{n-1} k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\, \partial y} + \ldots k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right\} + R_n$$

unde restul R_n are valoarea

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left\{h\frac{\partial f(x+\theta h,\ y+\theta k)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x + \theta h,\ y + \theta k)}{\partial y}\right\}^{n+1}$$

[Exponentul $(n+1)$ reprezintă derivata de ordinul $(n+1)$, aplicând regula binominală].

19. Derivatele funcțiilor elementare.

x^m	mx^{m-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^{ax}	ae^{ax}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$
$\mathrm{arc\,sin}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\mathrm{arc\,cos}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arc\,tg}\, x$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$\mathrm{arc\,ctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arc\,sec}\, x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
$\mathrm{arc\,cosec}\, x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$
$\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = 1 - \mathrm{cth}^2 x$

C. Calculul integral

20. Metode de integrare. — *Integrare prin părți:*

$$\int u'(x)\, v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)\, v'(x)\, dx$$

— *Integrarea prin descompunere în fracții parțiale simple.* Fie $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, în care φ și ψ sunt polinoame întregi, gradul lui ψ fiind superior

gradului lui φ (în caz contrar, prin împărţire se obţine un polinom, care se poate integra imediat, şi un rest fracţionar având numitorul de un grad superior numărătorului); în acest caz, fracţia $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ poate fi descompusă în fracţii simple. Sunt de considerat trei cazuri:

(α) dacă rădăcinile lui $\psi(x) = 0$ sunt simple şi reale

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

şi deci

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

unde

$$A_i \equiv \frac{\varphi(x_i)}{\psi'(x_i)}.$$

(β) dacă $\psi(x)$ are rădăcini multiple şi anume α rădăcini x_1, β rădăcini x_2, etc.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{B_1}{(x - x_2)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\beta-1}} + \ldots$$

în care A_i, B_i, ... se determină prin identificarea coeficienţilor.

(γ) dacă rădăcinile sunt în parte imaginare, termenii corespunzători pot fi puşi sub forma

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{Mx + N}{(x - u_1)^2 + v_1^2},$$

unde

$$x_1 = u_1 + jv_1, \quad x_2 = u_1 - jv_1.$$

— *Integrarea prin schimbarea de variabilă.* Cele mai frecvente schimbări de variabilă sunt:

$u = a + bx$	$x = \frac{1}{b}(u - a)$	$dx = \frac{1}{b} du$
$u = a + bx^2$	$x^2 = \frac{1}{b}(u - a)$	$dx = \frac{du}{2\sqrt{b(u - a)}}$
$u = \frac{a}{x} + b$	$x = \frac{a}{u - b}$	$dx = -\frac{a du}{(u - b)^2}$
$u = \frac{a + bx}{a - bx}$	$x = \frac{a(u - 1)}{b(u + 1)}$	$dx = \frac{2a}{b(u + 1)^2}$
$u = \sqrt[n]{a + bx}$	$x = \frac{u^n - a}{b}$	$dx = \frac{n}{b} u^{n-1} du$
$u = \sin x$	$x = \arcsin u$	$dx = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$
$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$x = \operatorname{arc tg} 2u$	$dx = \frac{2du}{1 + u^2}$
	$\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$	$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$

— *Integrarea prin desfăşurarea în serie a funcţiei,* integrând termen cu termen seria obţinută (dacă aceasta este convergentă).

21. Integrale fundamentale:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln x|$$

$$\int x^a \ln x \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right); \; a \neq -1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \qquad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x, \qquad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x|, \qquad \int \operatorname{th} x \, dx = \ln|\operatorname{ch} x|$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x|, \qquad \int \operatorname{cth} x \, dx = \ln|\operatorname{sh} x|$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int \operatorname{arc tg} x \, dx = x \operatorname{arc tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

$$\int \operatorname{arc ctg} x \, dx = x \operatorname{arc ctg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

$$\int \operatorname{arg sh} x \, dx = x \operatorname{arg sh} x - \sqrt{1 + x^2}$$

$$\int \arg \operatorname{ch} x \, dx = x \arg \operatorname{ch} x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int \arg \operatorname{th} x \, dx = x \arg \operatorname{th} x + \frac{1}{2} \ln (1 - x^2)$$

$$\int \arg \operatorname{cth} x \, dx = x \arg \operatorname{cth} x + \frac{1}{2} \ln (x^2 - 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) = 2 \arg \operatorname{th} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln | \operatorname{tg} x | \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x} = \ln | \operatorname{th} x |$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \operatorname{ctg} x \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x)$$

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right) \\ \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} &= - \frac{1}{ab} \arg \operatorname{th} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right) \end{aligned} \right\} a, \; b \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} - \dfrac{1}{a} \arg \operatorname{th} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a - x}{a + x}, \text{ dacă } |x| < a \\ - \dfrac{1}{a} \arg \operatorname{cth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x - a}{x + a}, \text{ dacă } |x| > a, \; a > 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \begin{cases} + \operatorname{arc} \sin \dfrac{x}{a} \\ - \operatorname{arc} \cos \dfrac{x}{a} \end{cases} \qquad \int \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 - a^2)}} = \begin{cases} - \dfrac{1}{a} \operatorname{arc} \sin \dfrac{a}{x} \\ + \dfrac{1}{a} \operatorname{arc} \cos \dfrac{a}{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = - \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arg \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \ln \left\{ x \pm \sqrt{x^2 + a^2} \right\}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \arg \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \ln \left\{ a \pm \sqrt{x^2 - a^2} \right\}$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = - \frac{1}{a} \arg \operatorname{sh} \frac{a}{x} = - \frac{1}{a} \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 + x^2}}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{1}{a} \arg \operatorname{ch} \frac{a}{x} = - \frac{1}{a} \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^3} \, dx = - \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = - \frac{1}{2} a^2 \arg \operatorname{ch} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{2} a^2 \arg \operatorname{sh} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = - \frac{1}{\sqrt{b^2 - c}} \arg \operatorname{th} \frac{x + b}{\sqrt{b^2 - c}} = - \frac{1}{2 \sqrt{b^2 - c}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - c} - x - b}{\sqrt{b^2 - c} + x + b} \right|,$$

dacă $c < b^2$, adică $x^2 + 2bx + c = 0$ are rădăcini reale.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}},$$

dacă $c > b^2$ adică $x^2 + 2bx + c = 0$ are rădăcini imaginare.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = - \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc} \sin \frac{2ax + b}{\sqrt{-(4ac - b^2)}} \quad (\text{dacă } a < 0, \; 4ac - b^2 < 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \arg \operatorname{sh} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (\text{dacă } a > 0, \; 4ac - b^2 > 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \arg \operatorname{ch} \frac{2ax + b}{\sqrt{-(4ac - b^2)}} \quad (\text{dacă } a > 0, \; 4ac - b^2 < 0$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{(2ax + b) \sqrt{ax^2 + bx + c}}{4a} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + x}}$$

(vezi formula precedentă)

$$\int \frac{p + qx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx = \frac{q}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2pa - qb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1}.$$

22. **Formule de recurență:**

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{ma} - \frac{(m-1)c}{ma}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$-\frac{(2m-1)b}{2ma}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$

$$\int x^n\cos x\,dx = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$$

$$\int x^n\sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$$

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

$$\int x^a(\ln x)^n\,dx = \frac{x^{a+1}(\ln x)^n}{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx \quad (a \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

23. **Integrarea unor tipuri speciale de fracții.** In cele ce urmează R reprezintă o fracție rațională.

— *Integralele de forma:*

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx.$$

Se face substituția $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, adică $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ și deci $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Dacă R este o funcție pară sau nu conține decât termeni în $\operatorname{tg} x$, se face substituția

$$u = \operatorname{tg} x \quad \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{1+u^2}.$$

— *Integralele de forma:*

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,dx.$$

Se face substituția

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2} \quad \text{adică} \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t^2}.$$

— *Integralele de forma:*

$$\int R(e^{mx})\,dx.$$

Se face substituția

$$t = e^{mx}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{mt}.$$

— *Integralele de forma:*

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx.$$

Se face substituția

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

— *Integralele de forma:*

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx.$$

Se face substituția:

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \sqrt{x^2-1} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}.$$

— *Integralele de forma:*

$$\int R(x, \sqrt{1+x^2})\,dx.$$

Se face substituția

$$t = x + \sqrt{x^2+1}, \quad x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{1+t^2}{2t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}.$$

— *Integralele de forma:*

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\right) dx.$$

Se face substituţia $\xi = \frac{ax + b}{\sqrt{(ac - b^2)}}$, care reduce integrala la unul din cele trei tipuri precedente.

— *Integralele de forma:*

$$\int R\left(x, \sqrt{ax + b}, \quad \sqrt{cx + d}\right) dx.$$

Se face substituţia

$$\xi = \sqrt{cx + d} \quad \text{sau} \quad x = \frac{1}{c}(\xi^2 - d), \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{c}.$$

— *Integralele de forma:*

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx.$$

Se face substituţia

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}, \qquad x = \frac{d\xi^n - b}{c\xi^n - a}, \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{ad - bc}{(c\xi^n - a)} n\xi^{n-1}.$$

24. **Integrale definite.** — *Teorema mediei:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(\xi), \quad \text{unde} \quad a < \xi < b;$$

$$\iint_R f(x, y)\, ds = \mu \Delta R$$

unde ΔR este aria lui R, iar μ o valoare cuprinsă între maximul şi minimul lui $f(x, y)$ pe suprafaţa R.

— *Reguli generale:*

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^b \left\{f(x) + g(x)\right\} dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b c f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx \qquad c = \text{constant}.$$

Dacă $f(x) \geqslant g(x)$ şi $b \geqslant a$

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx.$$

Dacă se face substituţia $x = \Phi(u)$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\Phi(u)]\, \Phi'(u)\, du,$$

unde

$$a = \Phi(\alpha) \quad \text{şi} \quad b = \Phi(\beta).$$

— *Formule de integrale definite:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{pentru} \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x} = \infty$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad a > b \\ 0 & \text{,,} \quad a = b \\ \frac{\pi}{4} & \text{,,} \quad a < b \end{cases}$$ (Factorul de discontinuitate a lui Dirichlet)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx = \int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{,,} \quad m = n \end{cases} \qquad m, n \text{ întregi}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \\ &\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n - 1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^{n+\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &a > 0 \\ &n \text{ întreg} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

— *Funcții Euleriene*:

Funcția Γ. Dacă $x > 0$, funcția Γ este definită de ecuația:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1}\,dt.$$

Ea satisface ecuația funcțională

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Deci, dacă x este un întreg pozitiv

$$\Gamma(x) = (n-1)!$$

Pentru toate valorile lui x diferite de $-1, -2, -3\ldots$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} n^x$$

Deasemenea

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

In particular

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Funcția beta $\beta(x, y)$ este definită pentru valori pozitive ale lui x și y

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}+t\right)^{x-1}\left(\frac{1}{2}-t\right)^{y-1} dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\Phi \cos^{2y-1}\Phi\,d\Phi.$$

Funcțiile Γ și β sunt legate prin relația

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

D. Curbe și suprafețe

25. Curbe în plan. Se consideră ecuația unei curbe plane sub formele (a), (b), (c).

(a) $y = f(x)$,

(b) $F(x, y) = 0$,

(c) $x = \Phi(t)$, $y = \Psi(t)$.

Ecuația tangentei în punctul (x, y), ξ și η fiind coordonatele curente:

(a) $\eta - y = (\xi - x)\,f'(x)$,

(b) $(\xi - x)\,F_x + (\eta - y)\,F_y = 0$,

(c) $[\xi - \Phi(t)]\,\Psi'(t) - [\eta - \Psi(t)]\,\Phi'(t) = 0$

Ecuația normalei:

(a) $\xi - x + (\eta - y)\,f'(x) = 0$,

(b) $(\xi - x)\,F_y - (\eta - y)\,F_x = 0$,

(c) $[\xi - \Phi(t)]\,\Phi'(t) + [\eta - \Psi(t)]\,\Psi'(t) = 0$

Curbura:

(a) $$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

(b) $$k = \frac{F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$$

(c) $$k = \frac{\Phi' \Psi'' - \Phi'' \Psi'}{(\Phi'^2 + \Psi'^2)}.$$

Raza de curbură:

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Locul geometric al centrelor de curbură:

(a) $$\xi = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''},\quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

(b) $$\xi = x + F_x \frac{F_x^2 + F_y^2}{F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2},$$

$$\eta = y + F_y \frac{F_x^2 + F_y^2}{F_{xx} - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}$$

(c) $$\xi = \Phi - \Psi' \frac{\Phi'^2 + \Psi'^2}{\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi'} \qquad \eta = \Psi + \Phi' \frac{\Phi'^2 + \Psi'^2}{\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi'}$$

Punctele de inflexiune. Condiții:

(a) $y'' = 0$,

(b) $F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2 = 0$,

(c) $x'y'' - x''y' = 0$.

Unghiul ω *dintre două curbe* $F(x, y)$ și $G(x, y)$ este unghiul format de tangentele la cele două curbe în punctul de intersecție:

(b) $$\cos\omega = \frac{F_x G_x + F_y G_y}{\sqrt{(F_x^2 + F_y^2)(G_x^2 + G_y^2)}},$$

(c) $$\cos\omega = \frac{x'x_1' + y'y_1'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)(x_1'^2 + y_1'^2)}}.$$

In particular, curbele *sunt ortogonale* dacă

(b) $$F_x G_x + F_y G_y = 0,$$

(c) $$x' x'_1 + y' y'_1 = 0,$$

şi *sunt tangente* dacă

(b) $$F_x G_y - F_y G_x = 0,$$

(c) $$x' y'_1 - x'_1 y' = 0.$$

In general două curbe $y = f(x)$, $y = g(x)$ *au un contact de ordinul n* în punctul x, dacă

$$f(x) = g(x),\ f'(x) = g'(x) \ldots\ldots\ldots f^n(x) = g^n(x)$$

$$f^{(n+1)}(x) \neq g^{(n+1)}(x)$$

26. **Curbe în spaţiu.** Ecuaţiile curbei:

$$x = \Phi(t),\ y = \Psi(t),\ y = \chi(t)$$

Cosinusurile directoare ale tangentei:

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},\ \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Curbura:

$$|k| = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

unde ds este elementul de arc.

27. **Suprafeţe în spaţiu.** Se consideră ecuaţiile suprafeţei sub formele (a), (b) şi (c):

(a) $$z = f(x, y),$$

(b) $$F(x, y, z) = 0,$$

(c) $$x = \Phi(u, v),\ y = \Psi(u, v),\ z = \chi(u, v).$$

Ecuaţia planului tangent în punctul x, y, z, *când* ξ, η, ζ sunt coordonatele curente

(a) $$\zeta - z = (\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

(b) $$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y + (\zeta - z)F_z = 0$$

(c) $$(\xi - x)(\Psi_u \chi_v - \Psi_v \chi_u) + (\eta - y)(\chi_u \Phi_v - \chi_v \Phi_u) + (\zeta - z)(\Phi_u \Psi_v - \Phi_v \Psi_u) = 0$$

Cosinusurile directoare ale normalei:

(a) $$\cos\alpha = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\ \cos\beta = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = +\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

(b) $$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},\ \cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y + F_z^2}};$$

(c) $$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

unde

$$A = \Psi_u \chi_v - \Psi_v \chi_u,\quad B = \chi_u \Phi_v - \chi_v \Phi_u,\quad C = \Phi_u \Psi_v - \Phi_v \Psi_u.$$

Unghiul dintre două suprafeţe:

$$\cos\omega = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

unde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ respectiv $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sunt cosinusurile directoare ale normalelor la cele două suprafeţe în punctul considerat.

28. **Lungimea arcelor.** Dacă ecuaţia unei curbe plane este dată prin ecuaţiile (a), (b), (c), (d)

(a) $y = f(x)$,

(b) $F(x, y) = 0$,

(c) $x = \Phi(t)$, $y = \Psi(t)$,

(d) $r = r(\theta)$ (coordonate polare),

lungimea unui arc este:

(a) $$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

(b) $$l = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{F_y}\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\, dx,$$

(c) $$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

(d) $$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

Lungimea arcului unei curbe în spaţiul cu trei dimensiuni:

$$x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t), \quad z = \chi(t);$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

29. **Aria suprafeţelor plane.** Aria mărginită de curba

$$r = r(\theta)$$

şi de două raze vectoare θ_1 şi θ_2 (coordonate polare), este dată de

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2\, d\theta$$

Aria închisă de curba $y = f(x)$, de ordonatele $x = x_0$, $x = x_1$ şi de axa x este

$$\int_{x_0}^{x_1} y\, dx$$

Dacă R este o suprafaţă plană, orientată pozitiv, având conturul C, aria ei este

$$\iint_R dx\, dy = -\int_C y\, dx = \int_C x\, dy = \frac{1}{2}\int_C (x\, dy - y\, dx)$$

30. **Aria suprafeţelor curbe.** Ecuaţiile suprafeţei fiind date prin ecuaţiile (a), (b), (c):

(a) $z = f(x, y)$,

(b) $F(x, y, z) = 0$,

(c) $x = \Phi(u, v), \; y = \Psi(u, v), \; z = \chi(u, v)$,

Dacă în cazul (c) se notează cu:

$$E = \Phi_u^2 + \Psi_u^2 + \chi_u^2,$$

$$F = \Phi_u \Phi_v + \Psi_u \Psi_v + \chi_u \chi_v,$$

$$G = \Phi_v^2 + \Psi_v^2 + \chi_v^2,$$

rezultă:

$$EG - F^2 = (\Phi_u \Psi_v - \Phi_v \Psi_u)^2 + (\Psi_u \chi_v - \Psi_v \chi_u)^2 + (\chi_u \Phi_v - \chi_v \Phi_u)^2.$$

Lungimea arcului curbei

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

trasată pe suprafaţă va fi

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt$$

iar *aria suprafeţei*, aflată vertical deasupra regiunii R din planul xy, este:

$$A = \iint d\sigma:$$

(a) $$A = \iint_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

(b) $$A = \iint_R \frac{1}{F_z}\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\, dx\, dy,$$

(c) $$A = \iint_B \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

ultima integrală fiind luată asupra regiunii B din planul u, v care corespunde regiunii R.

Aria suprafeţei de revoluţie $z = \Phi(u)$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, care este generată când curba $z = \Phi(x)$ se roteşte în jurul axei z, este

$$A = 2\pi\int_{u_0}^{u_1} u\sqrt{1 + \Phi'^2(u)}\, du = 2\pi\int_{s_0}^{s_1} u\, ds,$$

unde ds este arcul meridianului curbei $z = \Phi(x)$.

31. **Calculul volumelor.** Volumul limitat inferior de suprafaţa R aflată în planul xy şi de suprafaţa S, aflată deasupra acesteia şi având ecuaţia

$$z = f(x, y),$$

are expresia

$$V = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Dacă suprafaţa S este închisă şi formează întregul contur al volumului V, expresia acestui volum este

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz = -\iint_S z\, dx\, dy = -\iint_S x\, dy\, dz = -\iint_S y\, dz\, dx.$$

Volumul suprafeţei de revoluţie

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \Phi(u),$$

care este produs când curba $z = \Phi(x)$ se roteşte în jurul axei z, are valoarea

$$V = \pi\int_{z_0}^{z_1} u^2\, dz.$$

E. Serii

32. **Definiţii.** Un şir infinit de numere reale sau complexe $u_1, u_2, \ldots u_n$, format potrivit unei anumite legi, constitue o serie convergentă dacă suma:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

tinde către o limită finită și determinantă S, atunci când n tinde către infinit, adică

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Diferența $S - S_n = R_n$ se numește *restul seriei*.

O serie este absolut convergentă dacă seria formată din valorile absolute ale tuturor termenilor este convergentă.

Dacă $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ sunt funcții de o variabilă x, seria se numește funcțională.

O serie funcțională, convergentă într'un anumit interval, se spune că este absolut convergentă în acest interval, dacă fiecărui număr pozitiv ε îi corespunde un număr N, depinzând de ε și nu de x, astfel ca pentru $n > N$, $|R_n(x)| < \varepsilon$, pentru orice valoare a lui x din intervalul considerat. In acest caz:

$$S = f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

este o funcție continuă de x.

O serie uniform convergentă, poate fi integrată termen cu termen.

$$\int f(x)\,dx = \sum_0^{\infty} \int u_n\,dx.$$

Dacă derivatele

$$u_1'(x), u_2'(x) \ldots . u_n'(x) \ldots$$

ale unei serii convergente, sunt funcții continue de x și dacă seria lor este uniform convergentă pe segmentul (a, b), seria poate fi derivată termen cu termen, adică

$$f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

O serie de forma

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

unde $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ sunt constante, este o *serie de puteri*.

Dacă o serie de puteri este convergentă într'un punct x_0 diferit de 0, ea este convergentă pe tot segmentul $(-x_0, +x_0)$.

Dacă în locul variabilei x, se consideră variabila complexă z, ultima teoremă se enunță astfel:

Dacă o serie de puteri este convergentă într'un punct z_0, ea va fi convergentă în interiorul oricărui cerc cu centrul în origine având ca rază $|z_0| - \varepsilon$, unde ε este o mărime oricât de mică dorim. Dacă seria este divergentă în z_0, ea va fi divergentă în tot domeniul exterior cercului de rază $z \geqslant z_0$.

33. **Criterii de convergență a seriilor infinite.** — Seria Σa_n este convergentă dacă și numai dacă pentru orice valoare pozitivă ε există un număr N astfel ca

$$|a_n + a_{n+1} \ldots + a_m| < \varepsilon$$

când $m > n > N$ (criteriul lui Cauchy).

Criteriile următoare sunt *suficiente* dar nu *necesare*:

— Seria Σa_n este convergentă, dacă există niște numere b_n astfel ca $b_n \geqslant |a_n|$, pentru orice valoare a lui n și dacă Σb_n este convergentă.

— Seria Σa_n este convergentă dacă există un număr N, și totodată un număr $q < 1$ astfel ca

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \text{sau} \quad \sqrt[n]{|a_n|} < q$$

pentru toate valorile $n > N$.

In particular, seria este convergentă dacă există un număr $k < 1$ astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k \quad \text{sau} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$$

Seria Σa_n este divergentă dacă există un număr $k > 1$ astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k \quad \text{sau} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = k.$$

— Seria Σa_n, cu termenii având semne alternante, este convergentă dacă $|a_n|$ tinde monoton către 0 (criteriul lui Leibnitz).

34. **Seria Taylor.** Dacă restul R_n din teorema lui Taylor

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n$$

unde

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h), \qquad (0 < \theta < 1)$$

tinde către 0 când n crește, se obține seria infinită de puteri

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \ldots$$

35. **Seria Mac Laurin.** Pentru $x = 0$ și $h = x$ seria Taylor devine

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

care este seria Mac Laurin.

36. **Funcții trigonometrice.** *Desvoltările în serie ale funcțiilor trigonometrice:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17 x^7}{315} + \ldots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\, x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

— *Relații uzuale între funcțiile trigonometrice:*

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1)$$

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$$

$$\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cos^{n-3} x + C_n^5 \sin^5 x \cos^{n-5} x - \ldots$$

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \sin^2 \cos^{n-2} x + C_n^4 \sin^4 x \cos^{n-4} x - \ldots$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Dacă n este impar:

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2j}\right)^{n-1} \left[\sin nx - C_n^1 \sin(n-2)x + C_n^2 \sin(n-4)x - - C_n^3 \sin(n-6)x + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} \sin nx\right];$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + C_n^2 \cos(n-4)x + \ldots + + \ldots + C_n^{\frac{n+1}{2}} \cos x\right].$$

Dacă n este par:

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left[\cos nx - C_n^1 \cos(n-2)x + C_n^2 \cos(n-4)x + \ldots + + (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^{\frac{n-2}{2}} \cos 2x\right] + C_n^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n};$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + C_n^2 \cos(n-4)x + \ldots + + C_n^{\frac{n-2}{2}} \cos 2x\right] + C_n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

— *Relații uzuale între funcțiile de arc:*

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x$$

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin \left(x \sqrt{1 - y^2} \pm y \sqrt{1 - y^2}\right) = \arccos \left(\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} \mp xy\right)$$

$$\arccos x \pm \arccos y = \arcsin \left(y \sqrt{1 - x^2} \pm x \sqrt{1 - y^2}\right) = \arccos \left(xy \mp \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}\right)$$

$$\operatorname{arc\,tg} x \pm \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$$

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x$$

37. Funcţii hiperbolice. *Desvoltările în serie* ale funcţiilor hiperbolice:

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\mathrm{th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$$

Având în vedere importanţa funcţiilor hiperbolice în studiul fenomenelor electrice, se reamintesc definiţiile acestora.

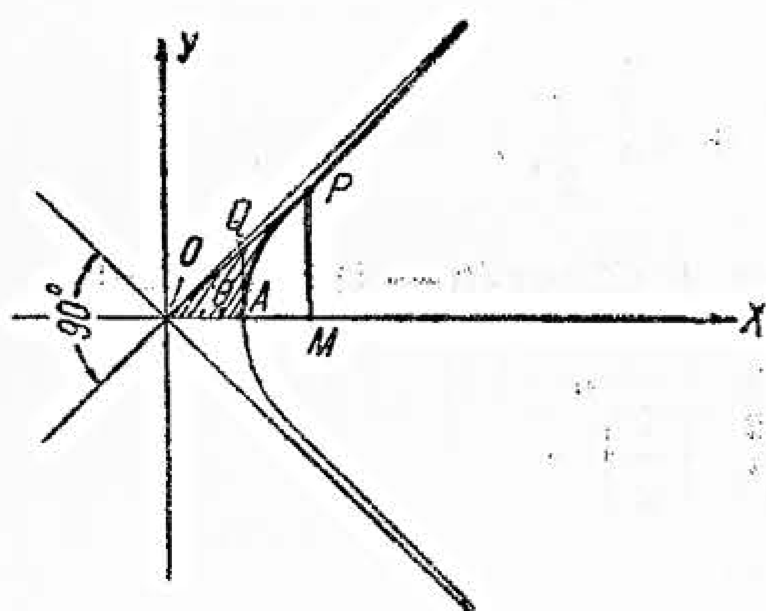


Fig. 1

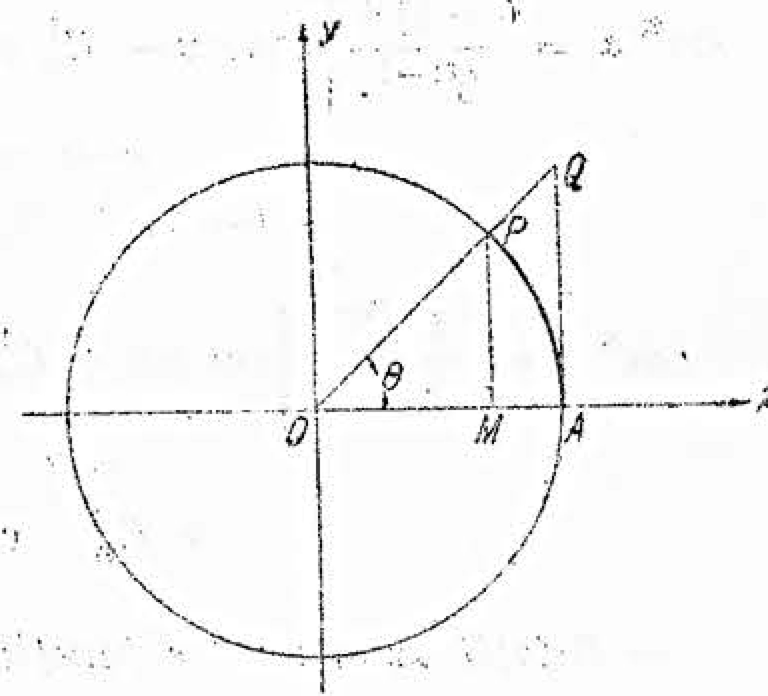


Fig. 2

Prin analogie cu funcţiile trigonometrice, dacă se consideră hiperbola echilateră din fig. 1 şi un punct P pe această hiperbolă, se defineşte:

$$PM = \mathrm{sh}\, \varphi = OM\, \mathrm{tg}\, \theta,$$

$$OM = \mathrm{ch}\, \varphi = OP \cos \theta,$$

$$AQ = \mathrm{th}\, \varphi = \mathrm{tg}\, \theta,$$

în care φ este dublul ariei curbilinii $OPAO$.

Analogia cu funcţiile trigonometrice este evidentă dacă se ţine seama că (fig. 2) într'un cerc de rază unitate:

$$\varphi = 2 \text{ aria } OAPO = 2 \frac{\theta}{2} = \theta$$

şi deci:

$$PM = \sin \theta = \sin \varphi,$$

$$OM = \cos \theta = \cos \varphi,$$

$$AQ = \mathrm{tg}\, \theta = \mathrm{tg}\, \varphi.$$

— *Funcţiile inverse* (argumente) sunt:

$$\left.\begin{aligned} \arg \mathrm{sh}\, x &= \ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right) \\ \arg \mathrm{ch}\, x &= \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\arg \mathrm{th}\, x = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

— *Variaţia funcţiilor* sh x, ch x, th x este reprezentată în fig. 3 şi 4.

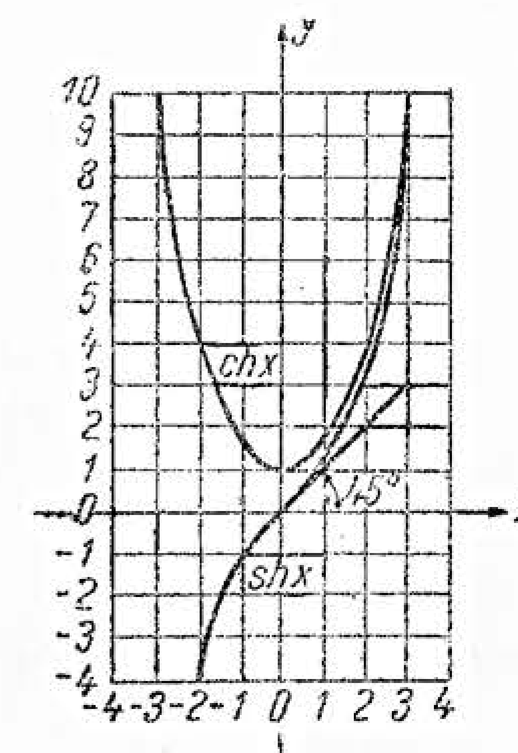


Fig. 3

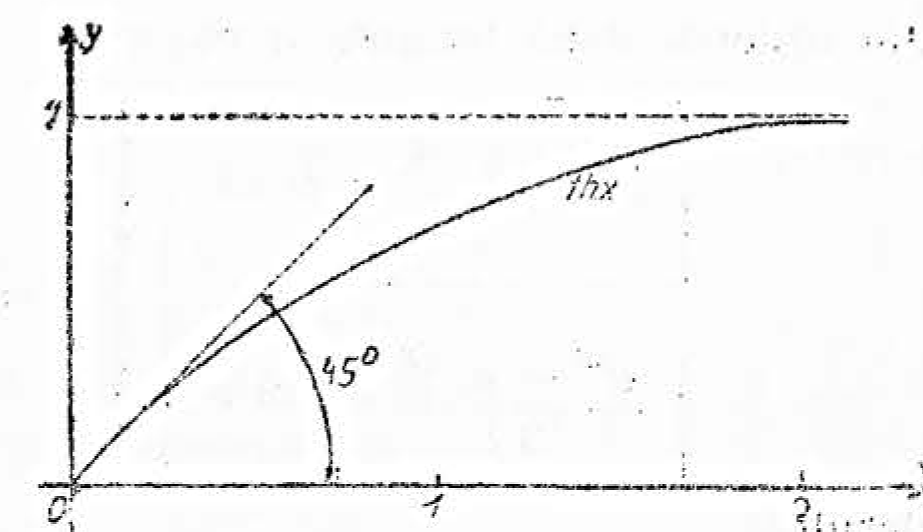


Fig. 4

38. Funcţiile e^x şi a^x. Desvoltările în serie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots .$$

Pentru $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281 \dots .$$

39. Relaţii între funcţiile transcendente e^x, $\sin x$, $\cos x$, sh$x$, ch$x$. Considerând seriile

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

şi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots,$$

înmulţind prima serie cu j ($j = \sqrt{-1}$) şi adunând, se obţine:

$$(\cos x + j \sin x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + j\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right).$$

Insă

$$e^{jx} = 1 + \frac{jx}{1!} + \frac{j^2x^2}{2!} + \frac{j^3x^3}{3!} + \dots,$$

adică

$$e^{jx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + j\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\dots\right).$$

Comparând, se obţine:

$$\boxed{e^{jx} = (\cos x + j\sin x).}$$

Inlocuind j cu $-j$:

$$e^{-jx} = \cos x - j\sin x.$$

Din ultimele două formule se obţine:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x} \\ \boxed{\dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x} \end{array}\right\} \text{(Formulele lui Euler).}$$

Rezultă:

$$\boxed{\begin{array}{ll} e^{\pm 2\pi j} = +1, & e^{\pm\frac{\pi}{2}j} = \pm j, \\ e^{\pm\pi j} = -1, & e^{\pm\frac{\pi}{4}j} = \dfrac{1 \pm j}{\sqrt{2}}. \end{array}}$$

In mod analog se obţine:

$$\boxed{e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y).}$$

Se observă că

$$e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x e^{jy+2\pi j} \quad \text{deoarece} \quad e^{\pm 2\pi j} = 1,$$

adică funcţia e^{jy} este o funcţie periodică cu perioada $2\pi j$.

In general:

$$a + jb = \rho e^{j\varphi} = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

unde

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}.$$

— Adunând seriile

$$\text{sh}\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{ch}\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

se obţine

$$\text{sh}\,x + \text{ch}\,x = e^x.$$

Inlocuind x prin $-x$

$$\text{ch}\,x - \text{sh}\,x = e^{-x},$$

de unde

$$\text{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

— Dacă în formulele care dau valorile $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg}\,x$ se înlocuieşte x prin jx se obţine:

$$\begin{array}{lll} \sin jx = j\,\text{sh}\,x & , & \text{sh}\,jx = j\sin x, \\ \cos jx = \text{ch}\,x & , & \text{ch}\,jx = \cos x, \\ \text{tg}\,jx = j\,\text{th}\,x & , & \text{th}\,jx = j\,\text{tg}\,x. \end{array}$$

40. Diferite relaţii între funcţiile transcendente:

$$\text{arc sin}\,x = -j\ln\left(jx + \sqrt{1 - x^2}\right)$$
$$\text{arc sin}\,jx = j\,\text{arg sh}\,x$$
$$\text{arc cos}\,x = -j\ln\left(x + j\sqrt{1 - x^2}\right)$$
$$\text{arc cos}\,(jx) = j\,\text{arg ch}\,jx$$
$$\text{arg sh}\,x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$
$$\text{arg sh}\,jx = j\,\text{arc sin}\,x$$
$$\text{arg ch}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\text{arg ch}\,jx = -j\,\text{arc cos}\,jx$$
$$\text{arc tg}\,x = -\frac{j}{2}\ln\left(\frac{j - x}{j + x}\right) \ ; \ \text{arg th}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$
$$\text{arc tg}\,jx = j\,\text{arg th}\,x \ ; \ \text{arg th}\,jx = j\,\text{arc tg}\,x$$
$$\ln(jx) = \ln x + \left(2n + \frac{1}{2}\right)j\pi$$
$$\ln(-x) = \ln x + (2n + 1)\pi j$$
$$\ln(x + jy) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \left(\text{arc tg}\,\frac{y}{x} + 2n\pi\right)j$$
$$x^j = \cos(\ln x) + j\sin(\ln x)$$
$$j^x = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$
$$\sqrt{j} = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$$
$$(\cos\varphi \pm j\sin\varphi)^x = \cos x(\varphi + 2\pi n) \pm j\sin x(\varphi + 2\pi n) = e^{\pm j\varphi x}$$

41. Diferite serii transcendente:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} + \dots = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Si}\,x \text{ (sinus integral)}$$

$$C + \ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4!} - \dots = -\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \mathrm{Ci}\,x \text{ (cosinus integral)}$$

$$C + \ln x + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3!} + \dots = \int_\infty^{-x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}5772156 \text{ (constanta lui Euler)}$$

$$1 - \frac{x^2}{5\cdot 2!} + \frac{x^4}{9\cdot 4!} - \frac{x^6}{13\cdot 6!} + \dots = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x^3}{7\cdot 3!} + \frac{x^5}{11\cdot 5!} - \dots = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Integralele lui Fresnel

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \dots = \int_0^x e^{-x^2}\,dx = \Phi(x),$$ (Integrala erorilor a lui Gauss)

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1\cdot 3}{x^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3} + \dots = \frac{1}{1 - \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}}}} = \Phi\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right).$$

Calculul câtorva funcții transcendente cu ajutorul seriilor infinite:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \qquad (|x| \leqslant 1,\ x \neq -1)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right] \qquad (|x| \leqslant 1,\ x \neq \pm 1)$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \dots \qquad (x \leqslant 1)$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = -1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \dots \qquad (|x| < 2\pi)$$

unde B_n sunt numerele lui Bernoulli, adică

$$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} \dots\right)$$

42. Funcțiile Legendre:

$$\cos nx + \frac{1}{1}\,\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)x + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\,\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)x + \dots =$$

$$= \frac{2^n\,n!}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}\cdot\frac{P_n(\arccos x)}{2}$$

$$x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} + \dots = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}P_n(x),$$

unde P_n sunt funcțiile Legendre.

43. Funcțiile Bessel:

$$1 - \frac{x}{1\cdot(p+1)} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot(p+1)(p+2)} - \dots = \frac{\Pi(p)}{x^{p/2}}J_p(x)$$

$$1 - \frac{x^2}{1!^2} + \frac{x^4}{2!^2} - \frac{x^6}{3!^2} + \dots = J_0(2x)$$

$$1 - \frac{x}{1!^2} + \frac{x^2}{2!^2} - \frac{x^3}{3!^2} + \dots = J_0(2\sqrt{x})$$

$$1 - \frac{x}{1!\,2!} + \frac{x^2}{2!\,3!} - \frac{x^3}{3!\,4!} + \dots = \frac{1}{\sqrt{x}}J_1(2\sqrt{x}) = -\frac{1}{\sqrt{x}}J_0'(2\sqrt{x})$$

$$1 - \frac{3x^2}{2\cdot 4} + \frac{3^2x^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 10} - \frac{3^3x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 10\cdot 16} + \dots = \frac{\Pi\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}}J_{-\frac{1}{3}}(x)$$

$$1 - \frac{x^2}{1\cdot 5} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 9} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 9\cdot 13} + \dots = \frac{\Pi\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt[4]{\frac{x}{2}}}J_{\frac{1}{4}}(x)$$

unde $J(x)$ este funcția Bessel, iar $\Pi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\dots n\cdot n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \Gamma(x+1)$.

Notă. S'a adoptat notația $j = \sqrt{-1}$ în loc de $i = \sqrt{-1}$, pentru a evita orice confuzie cu intensitatea curentului, care are același simbol.

F. Serii Fourier. Analiza armonică.

44. Definiţie. O serie de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

unde $a_0, a_1 \ldots$ şi $b_1, b_2 \ldots$ sunt constante, este o serie trigonometrică.

Dacă seria este convergentă, suma ei este o funcţie de x şi deci

$$y = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{44.1}$$

Funcţia $f(x)$ este astfel desvoltată într'o serie trigonometrică. Este evident că funcţia $y = f(x)$ este periodică, cu perioada 2π.

Dacă valoarea coeficienţilor $a_0, a_1 \ldots$ şi $b_1, b_2 \ldots$ se determină potrivit formulelor dela punctul 45, seria poartă numele de *serie Fourier*.

Pentru ca o funcţie $y = f(x)$ să poată fi reprezentată în intervalul $x_1 < x < x_2$ printr'o serie Fourier este necesar ca

— y să fie finit,
— să aibă un număr finit de maxime şi minime,
— să aibă o singură valoare pentru fiecare valoare a lui x,
— să aibă un număr finit de discontinuităţi.

Orice funcţie împlinind aceste condiţii (condiţiile Dirichlet) poate fi desvoltată în serie Fourier şi este reprezentată de această serie în tot intervalul dat.

In practică, funcţia $y = f(x)$ poate fi exprimată fie printr'o relaţie funcţională, fie printr'o curbă, continuă sau întreruptă, fără ca ecuaţia acestei curbe să fie cunoscută în mod necesar.

Variabila x poate exprima timpul sau orice altă mărime variabilă.

45. Calculul coeficienţilor a_n şi b_n. Dacă funcţia $f(x)$ este dată printr'o relaţie funcţională $y = f(x)$, care în intervalul $(-\pi, +\pi)$ împlineşte primele 3 condiţii dela punctul 44, ea va putea fi reprezentată prin seria Fourier

$$y = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

ai cărei coeficienţi a_n şi b_n trebue determinaţi. Pentru a determina coeficienţii a_n şi b_n se ţine seama de egalităţile

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx \begin{cases} = 0 & \text{dacă } m \neq n \\ = \pi & \text{dacă } m = n \neq 0 \end{cases} \tag{45.1}$$

şi

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \text{ (pentru orice valoare a lui } m \text{ şi } n).$$

Dacă se înmulţesc ambii membri ai desvoltării (44.1) cu $\cos mx$ şi se integrează între $-\pi$ şi $+\pi$, pe baza formulelor (45.1), se obţine

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx \qquad (n = 0, \cos nt = 1), \tag{45.2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx, \tag{45.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx, \tag{45.4}$$

care reprezintă valorile coeficienţilor seriei Fourier, pentru funcţia $y = f(x)$ dată.

Inlocuind aceste valori în (44.1) [după ce, pentru evitarea confuziilor, s'a schimbat variabila de integrare din x în x' în (45.2), (45.3) şi (45.4)] se obţine:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x')\, dx' + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left\{\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \cos nx'\, dx'\right] \cos nx\right\} + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left\{\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \sin nx'\, dx'\right] \sin nx\right\}. \tag{45.5}$$

— Dacă intervalul desvoltării este $(0, 2\pi)$, valorile coeficienţilor a_0, a_n, b_n vor fi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \tag{45.6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \tag{45.7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx. \tag{45.8}$$

— Dacă în loc să fie desvoltată în intervalul $(-\pi, +\pi)$, funcţia $f(x)$ trebue desvoltată în intervalul $(-T, +T)$, T fiind constant şi pozitiv, funcţia $f(x)$ poate fi considerată ca o funcţie de t:

$$t = \frac{\pi x}{T}, \text{ adică } x = \frac{tT}{\pi}, \quad dt = \frac{\pi}{T} dx.$$

Ea poate fi desvoltată în serie Fourier de forma:

$$f(x) = f\left(\frac{Tt}{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{Tt'}{\pi}\right) dt' + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left\{\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{Tt'}{\pi}\right) \cos nt'\, dt'\right] \cos nt\right\} + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left\{\left[\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{Tt'}{\pi}\right) \sin nt'\, dt'\right] \sin nt\right\},$$

sau, făcând substituţia $x' = \frac{t' T}{\pi}$,

$$f(x) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(x')\,dx' + \frac{1}{T}\sum_{1}^{\infty}\left\{\left[\int_{-T}^{+T} f(x')\cos\left(\frac{n\pi x'}{T}\right)dx'\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{T}\sum_{1}^{\infty}\left\{\left[\int_{-T}^{+T} f(x')\sin\left(\frac{n\pi x'}{T}\right)dx'\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right\},$$

adică

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} f(x)\,dx, \tag{45.9}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx, \tag{45.10}$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx. \tag{45.11}$$

— Dacă în loc de $(0, 2\pi)$ intervalul este $(0, T)$, valorile coeficienţilor sunt:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos n\omega x\,dx, \qquad \text{unde } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin n\omega x\,dx,$$

— In intervalul $(0, T)$, o funcţie $f(x)$, întrunind condiţiile date, poate fi desvoltată sau numai într'o serie de sinus sau numai într'o serie de cosinus.

Coeficienţii respectivi vor fi:

— pentru seria în cosinus:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx, \quad b_n = 0;$$

— pentru seria în sinus:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx.$$

Această desvoltare nu este unică.

Desvoltarea în serie Fourier în intervalul $(-\pi, +\pi)$ este unică.

46. Cazuri speciale. Dacă curba care reprezintă funcţia are un punct de simetrie situat pe axa Ox, luând acest punct ca origine, se găseşte (fig. 5): $f(x) = -f(-x)$

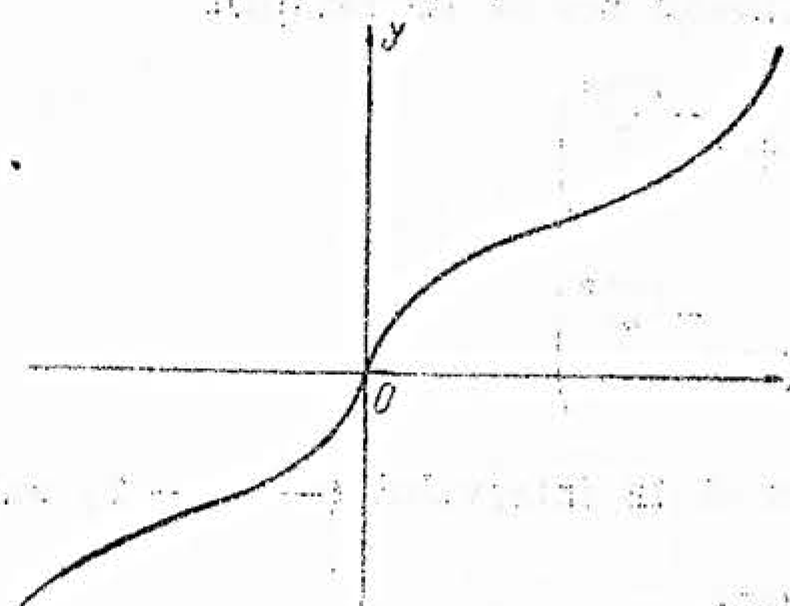


Fig. 5

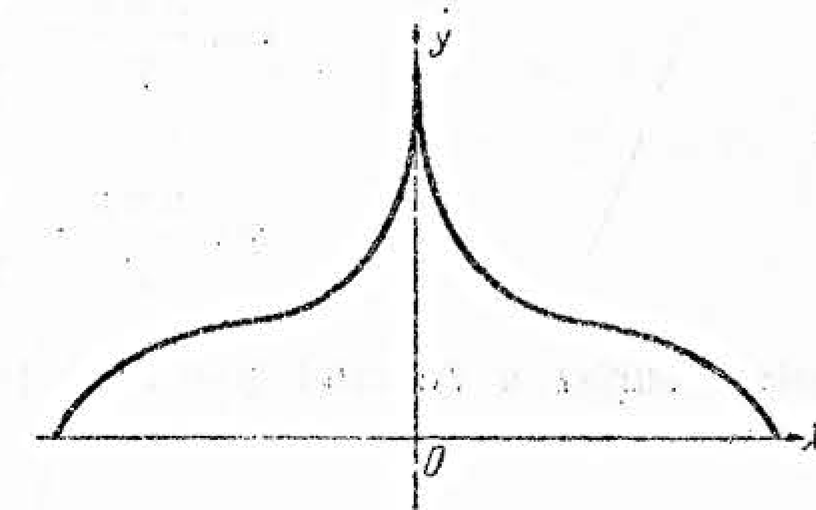


Fig. 6

şi deci seria Fourier care o reprezintă nu va avea decât termeni în sinus

$$a_0 = a_1 = \dots a_n = \dots = 0 \text{ (funcţie impară).}$$

Dacă curba are o axă de simetrie paralelă cu Oy, luând această axă ca axă a ordonatelor se găseşte (fig. 6):

$$f(x) = f(-x)$$

şi deci seria nu va avea decât termeni în cosinus:

$$b_0 = b_1 = \dots b_n = \dots = 0$$

(funcţie pară).

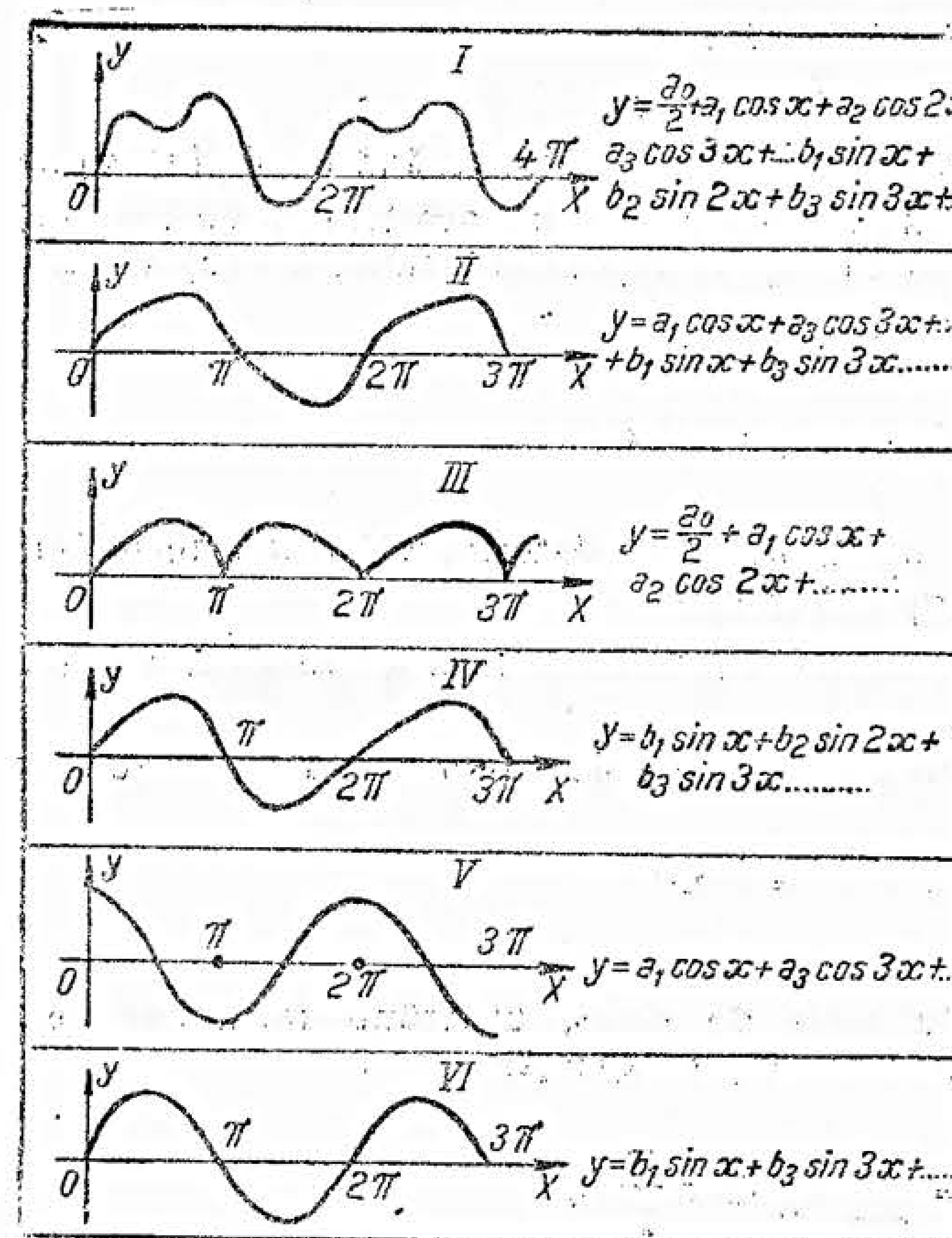


Fig. 7

Structura seriilor Fourier în raport cu caracterul variaţiei periodicităţii lor este reprezentată în figura 7.

47. Puncte de discontinuitate. Seria Fourier reprezentând funcţia $y = f(x)$ în intervalul $(-\pi, +\pi)$, este egală cu $f(x)$ în orice punct în care $f(x)$ este continuă. Dacă $f(x)$ are un punct de discontinuitate, atunci în acest punct suma seriei este egală cu media

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\xi + \varepsilon) + f(\xi - \varepsilon)}{2}$$

(în care ξ este valoarea lui x în punctul de discontinuitate), adică este egală cu media aritmetică a limitelor din dreapta şi din stânga punctului ξ.

48. Integrare şi derivare. Dacă o funcţie $y = f(x)$ poate fi desvoltată în serie Fourier, integrala lui $f(x)$ este egală cu integrala desvoltării.

Deasemenea, derivata desvoltării este egală cu derivata funcţiei $f(x)$, dacă derivata desvoltării este o serie convergentă.

49. **Seria Fourier în termeni complexi.** Ţinând seamă de relaţiile

$$\cos \frac{n\pi x}{T} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{jn\pi x}{T}} + e^{-\frac{jn\pi x}{T}}\right)$$

şi

$$\sin \frac{n\pi x}{T} = \frac{1}{2j}\left(e^{\frac{jn\pi x}{T}} - e^{-\frac{jn\pi x}{T}}\right),$$

seria Fourier a funcţiei $y = f(x)$ poate fi scrisă în intervalul $(-T, +T)$ sub forma

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{jn\pi x}{T}},$$

unde coeficienţii c_n sunt legaţi de a_n şi b_n prin relaţiile

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

sau

$$c_{\pm n} = \frac{a_n \pm jb_n}{2}.$$

50. **Proprietate specială a coeficienţilor Fourier.** Insemnând cu $S_n(x)$ suma primilor n termeni ai unei serii trigonometrice cu coeficienţi arbitrari şi cu $y = f(x)$ o funcţie periodică cu perioada 2π, suma $S_n(x)$ reprezintă funcţia $f(x)$ cu cea mai mică eroare medie posibilă, adică integrala

$$I = \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

este minimă, atunci când coeficienţii a_n şi b_n sunt determinaţi după formulele lui Fourier, stabilite sub (45.6), (45.7) şi (45.8).

Deci dintre toate desfăşurările posibile, coeficienţii Fourier asigură eroarea pătratică minimă.

51. **Exemple de desvoltare în serie Fourier.** Fie de desvoltat în serie Fourier funcţia

$$y = f(x) = b = \text{const.}$$

între $0 < x < T$ (fig. 8).

(α) Dacă desvoltarea se face în serie de sinus, utilizând formulele dela punctul 45, împreună cu cele dela punctul 46, se găseşte

$$y = f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin n \frac{\pi}{T} x,$$

unde

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin n \frac{\pi}{T} x\, dx = \frac{2b}{T}\int_0^T \sin n \frac{\pi}{T} x\, dx = \frac{2b}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$$

Făcând $n = 1, 2, \ldots$, se obţine:

$$b_1 = \frac{4b}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4b}{3\pi} \ldots b_{2m} = 0, \quad b_{2m+1} = \frac{4b}{(2n+1)\pi}$$

şi deci

$$y = f(x) = \frac{4b}{\pi}\left(\sin \frac{\pi}{T} x + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{\pi}{T} x + \ldots\right) = \begin{cases} b & \text{pentru } 0 < x < T, \\ 0 & \text{,} \quad x = 0 \text{ şi } x = T. \end{cases}$$

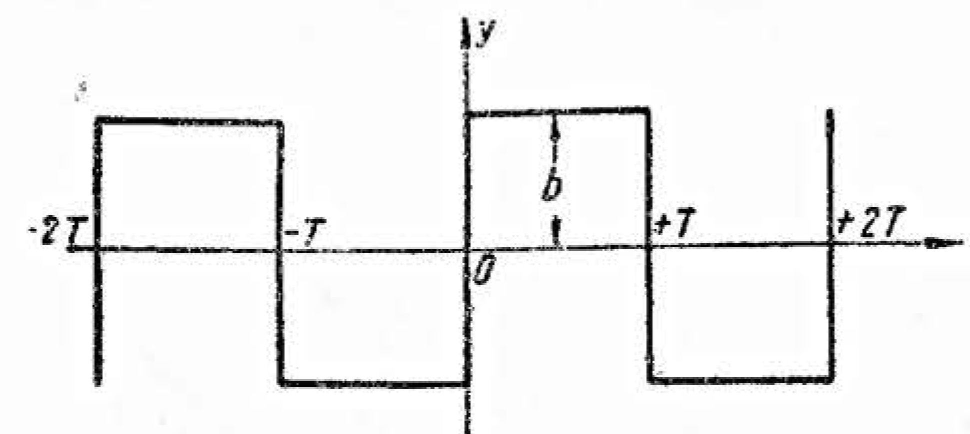


Fig. 8.

(β) Dacă desvoltarea se face în serie de cosinus, potrivit formulelor dela punctul 45, împreună cu cele dela punctul 46, se obţine:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos n \frac{\pi}{T} x dx = \frac{2b}{T}\int_0^T \cos n \frac{\pi}{T} x dx = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\, dx = \frac{2}{T}\int_0^T b\, dx = 2b.$$

Rezultă deci $\quad y = f(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{2b}{2} = b.$

— Fie de desvoltat în serie Fourier funcţia $y = f(x) = x$, în intervalul $0 < x < T$.

(α) Dacă desvoltarea se face în serie de sinusuri (fig. 9a):

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x \sin n \frac{\pi}{T} x\, dx$$

$$\int_0^T x \sin n \frac{\pi}{T} x\, dx = -\frac{1}{n\pi}\left[x \cos n \frac{\pi}{T} x\right]_0^T + \frac{T}{\pi n}\int_0^T \cos n \frac{\pi}{T} x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[x \cos n \frac{\pi}{T} x\right]_0^T + \frac{T^2}{n^2\pi^2}\left[\sin n \frac{\pi}{T}\right]_0^T = -\frac{T^2}{n\pi} \cos n\pi,$$

deci $b_n = -\frac{2T}{n\pi} \cos n\pi$. Dând lui n valorile $1, 2 \ldots m$:

$$b_1 = \frac{2T}{\pi} \;;\; b_2 = -\frac{2T}{2\pi} \;;\; b_3 = \frac{2T}{3\pi}; \ldots b_m = (-1)^{m+1}\frac{2T}{m\pi} \;;\; \ldots$$

şi deci:

$$y = f(x) = \frac{2T}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{T}x - \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{T}x + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{T}x \ldots\right] = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 < x < T \\ 0 & \text{»} \quad x = T \end{cases}$$

(β) Dacă desvoltarea se face în serie de cosinusuri se obţine (fig. 9 *b*):

$$y = f(x) = \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi}{T}x + \frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi}{T}x + \frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi}{T}x \ldots\right).$$

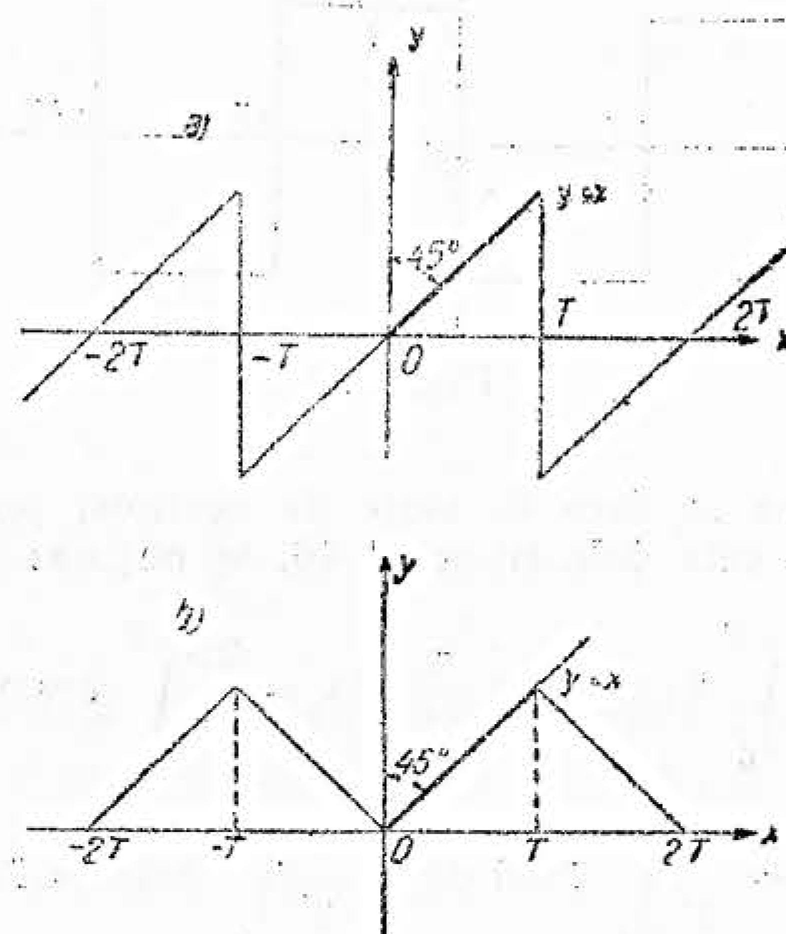


Fig. 9 *a* şi *b*

— Fie desvoltat în serie Fourier funcţia $y = f(x) = x^2$ în intervalul $0 < x < \pi$ (fig. 10).

Fiind o funcţie pară, cu axa Oy ca axă de simetrie, toţi termenii $b_n = 0$. Deci seria nu va avea decât termeni în cosinus:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\Big[x^2\sin nx\Big]_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\Big[x\cos nx\Big]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Deci

$$a_1 = -\frac{4}{1^2}, \quad a_2 = \frac{4}{2^2} \ldots,$$

şi deci

$$y = x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{1}{1^2}\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x \ldots\right) \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

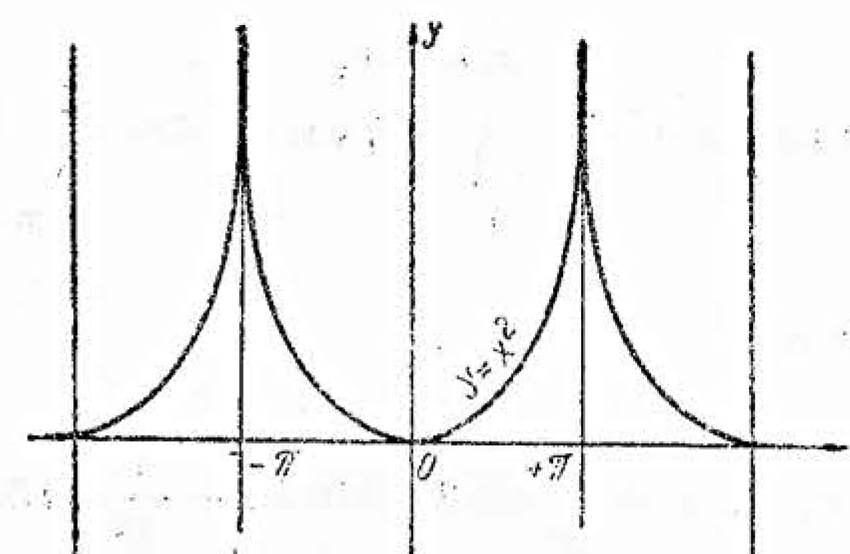


Fig. 10

— Fie de desvoltat în serie Fourier funcţia reprezentată în fig. 11 prin linia întreruptă $OABCDEF$, în care $OC = CF = \ldots$ şi $AB = DE$, etc. Se observă că perioada este 2π şi că

$$y = f(x) = f(\pi - x) \quad \text{şi totodată} \quad f(\pi + x) = -f(x).$$

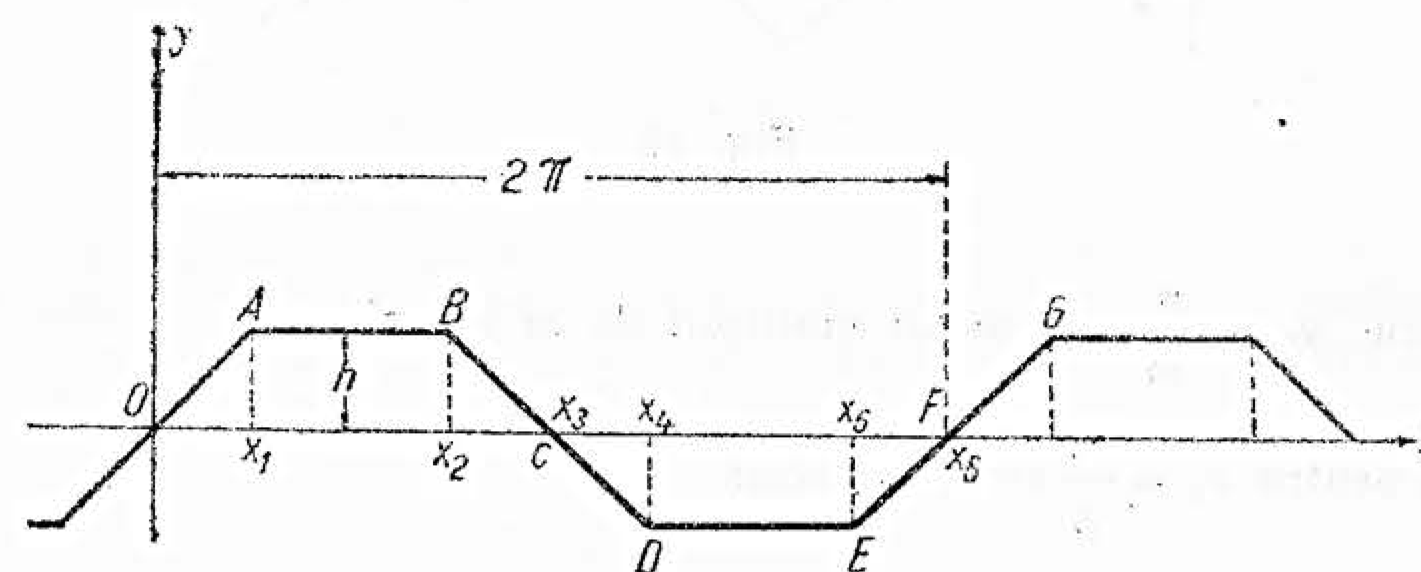


Fig. 11

Rezultă că seria care o reprezintă va avea forma:

$$y = b_1\sin x + b_3\sin 3x + \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx.$$

In intervalul $(x = 0,\ x = x_1)$ . . . . . $y = \frac{h}{x_1} x$

» » $(x = x_1,\ x = x_2)$ . . . . $y = h$

» » $(x = x_2,\ x = x_3)$ . . . . $y = -\frac{h}{x_1} x$

Deci

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{x_1} \frac{h}{x_1} x \sin nx + \frac{2}{\pi}\int_{x_1}^{x_2=\pi-x_1} h \sin nx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi-x_1}^{\pi} \frac{h}{x_1} x \sin nx\, dx.$$

Făcând calculele, se obţine:

$$y = f(x) = \frac{4h}{\pi x_1}\left(\frac{1}{1^2}\sin x_1 \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3x_1 \sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x_1 \sin 5x \ldots\right) \quad (51.1)$$

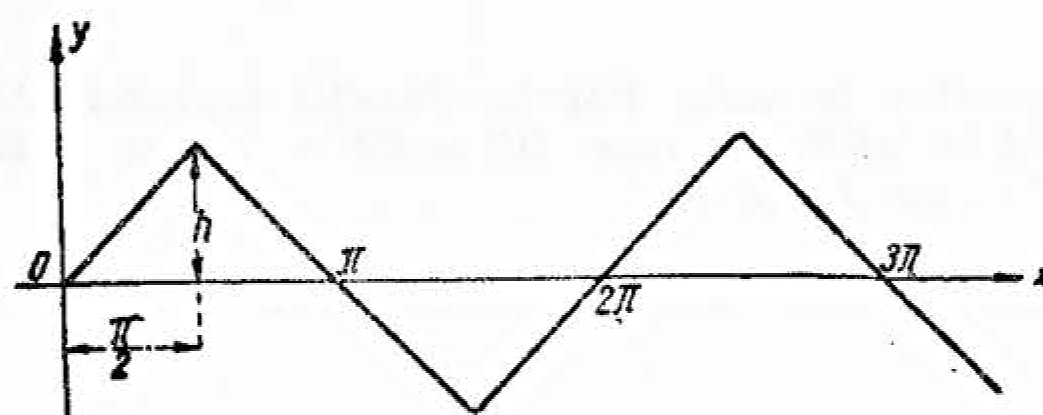


Fig. 12

Pentru $x_1 = \frac{\pi}{m}$, termenii multiplii de m se anulează.

Deci pentru $x_1 = \frac{\pi}{3}$ seria ia forma

$$\frac{6\sqrt{3}h}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin x - \frac{1}{5^2}\sin 5x + \frac{1}{7^2}\sin 7x - \frac{1}{11^2}\sin 11x \ldots\right)$$

Pentru $x_1 = \frac{\pi}{2}$ (fig. 12)

$$y = f(x) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x \ldots\right)$$

Pentru $x_1 = 0$ şi $x_2 = x_3 = \pi$ se obţine funcţia reprezentată în fig. 13.

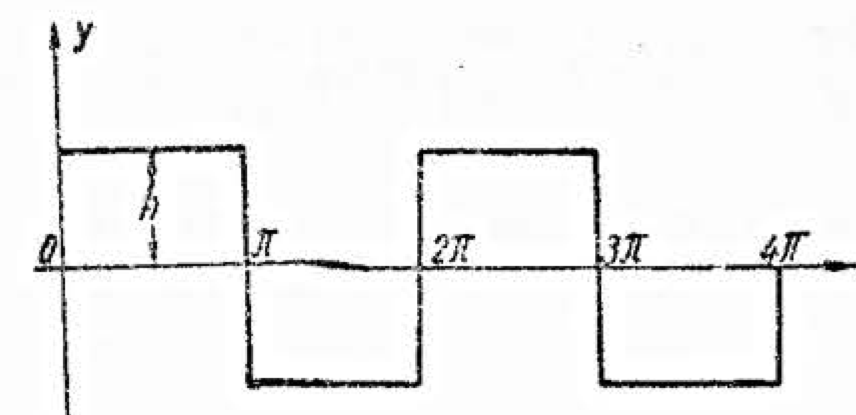


Fig. 13

Pentru $x_1 = 0$, valoarea seriei (51.1) este nedeterminată, luând forma $\frac{0}{0}$.

Dacă se ţine seamă că

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{\sin nx_1}{x_1} = n,$$

rezultă

$$y = f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right).$$

52. **Analiza armonică** se numeşte studiul fenomenelor periodice cu ajutorul seriilor Fourier. Fenomene de acest fel se întâlnesc foarte des în electricitate, acustică, astronomie, medicină, etc.

Orice mişcare periodică poate fi descompusă în componentele sale simple, *armonicele*, urmând o lege sinusoidală. Termenul de forma

$$a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \cos \frac{2\pi n}{T} x$$

constitue armonica de ordinul n.

In general, o funcţie reprezentată într'un interval printr'un grafic sau print'o tabelă de valori, care stabilesc relaţia dintre y şi x şi care se repetă periodic, poate fi reprezentată printr'o serie de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Determinarea coeficienţilor a_n şi b_n face obiectul analizei armonice.

In acest scop:

— Se ia o singură perioadă a funcţiei periodice.
— Se alege scara de lungimi astfel ca lungimea perioadei să fie 2π.
— Pe baza datelor dela punctul 46, se ţine seama de structura seriei, urmând să se calculeze numai coeficienţii termenilor care nu vor fi nuli. Dacă este cazul, intervalul cercetat se reduce la $(0, \pi)$ [de ex. în cazul $f(x + \pi) = -f(x)$].

— Se împarte perioada considerată în k părţi egale, adică

$$\left(0,\ \frac{2\pi}{k},\ 2\cdot\frac{2\pi}{k}\ \ldots\ (k-1)\frac{2\pi}{k}\right)\ \text{sau}\ \left(\frac{2\pi}{k},\ 2\frac{2\pi}{k}\ \ldots\ k\frac{2\pi}{k}\right)$$

Se neglijează totdeauna prima sau ultima diviziune.

— Coeficientul lui $\cos nx$ din desvoltarea căutată va fi, potrivit cu definiţia integralei definite:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \approx \frac{1}{\pi}\left[f\left(\frac{2\pi}{k}\right)\cos n\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{2\pi}{k} + \right.$$

$$\left. + f\left(2\frac{2\pi}{k}\right)\cos n\,2\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{2\pi}{k}\ldots + f\left(\frac{k}{k}2\pi\right)\cos nk\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{2\pi}{k}\right] =$$

$$= \frac{2}{k}\left[f\left(\frac{2\pi}{k}\right)\cos n\frac{2\pi}{k} + f\left(2\cdot\frac{2\pi}{k}\right)\cos n\,2\cdot\frac{2\pi}{k}\ldots f\left(\frac{k}{k}2\pi\right)\cos n\,k\frac{2\pi}{k}\right] =$$

$$= \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}{}' f\left(i\frac{2\pi}{k}\right)\cos ni\frac{2\pi}{k}, \qquad (n = 1, 2, 3\ldots), \qquad (52.1)$$

adică dublul mediei aritmetice a ordonatelor fiecărei diviziuni, după ce au fost înmulţite respectiv cu cosinusul unghiului corespunzător diviziunii, luat de n ori.

Coeficientul termenului $\sin nx$ va fi

$$b_n = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{i=k}{}' f\left(i\frac{2\pi}{k}\right)\sin ni\frac{2\pi}{k}, \qquad (n = 1, 2, 3\ldots). \qquad (52.2)$$

Valoarea lui b_n este deci dublul mediei aritmetice a ordonatelor fiecărei diviziuni, după ce aceste ordonate au fost înmulţite respectiv cu sinusul unghiului corespunzător diviziunii, luat de n ori.

Valoarea lui a_0 este:

$$a_0 = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{i=k}{}' f\left(i\frac{2\pi}{k}\right). \qquad (52.3)$$

Formulele (52.1), (52.2) şi (52.3) sunt cunoscute sub numele de formulele lui Bessel.

53. **Metode analitice, grafice, etc.** Pentru calculul coeficienţilor există numeroase metode analitice, grafice etc., precum şi aparate speciale, care dau direct primii coeficienţi ai seriei Fourier.

Se indică o metodă aplicabilă în cazul în care este nevoie de un număr mare de ordonate.

Fie dată curba care reprezintă funcţia periodică (fig. 14).

Se împarte intervalul $(0, 2\pi)$ în k intervale egale, cu atât mai multe cu cât aproximaţia cerută este mai mare. Din punctul O, ales ca origină se poartă razele vectoare egale cu ordonatele corespunzând valorilor y_0, y ... y_{k-1} sau acelea ale ordonatelor y_1, y_2 ... y_k (nu trebue luate în acelaşi timp ordonatele y_0 şi y_k, care sunt egale), la unghiuri egale respectiv cu $\frac{2n\pi}{k}$, $2\frac{2n\pi}{k}$ ... etc.

In general, coeficientul a_n, egal cu:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

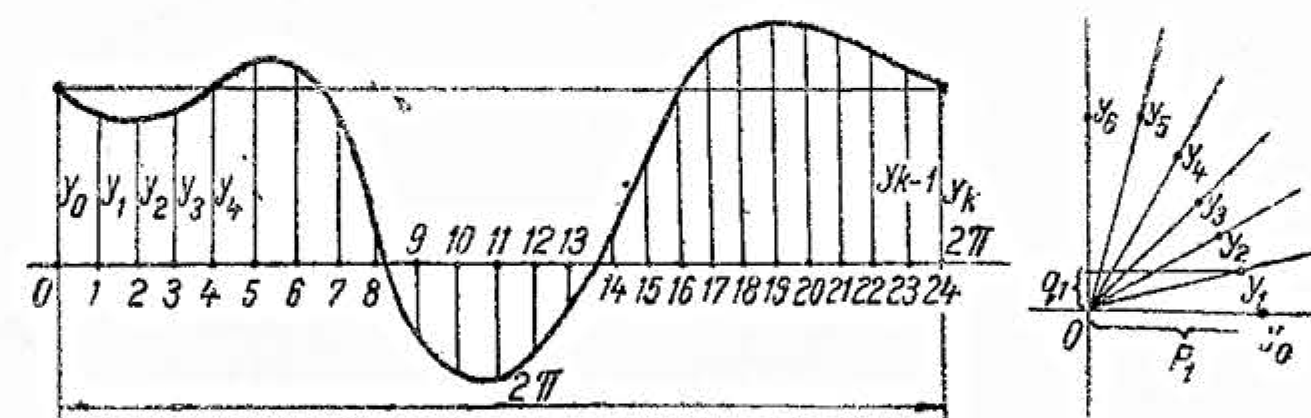


Fig. 14

va avea ca valoare aproximativă

$$a_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{2\pi}{k}\sum_{i=1}^{i=k}{}' y_i\cos ni\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{i=k}{}' y_i\cos ni\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{k}\sum p_i,$$

unde Σp_i este suma proiecţiilor pe axa Ox a razelor vectoare y_i, ţinând seama de semnele fiecărei proiecţii în parte.

In mod analog

$$b_n = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{i=k}{}' y_i\sin ni\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{k}\sum q_i$$

unde Σq_i este suma proiecţiilor pe axa Oy a aceloraşi raze vectoare.

54. **Câteva serii Fourier (fig. 15):**

(a) $$y = a\sin\theta$$

(b) $$y = a\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{2}{1\cdot3\cdot\pi}\cos2\theta - \frac{2}{3\cdot5\cdot\pi}\cos4\theta\ldots\right]$$

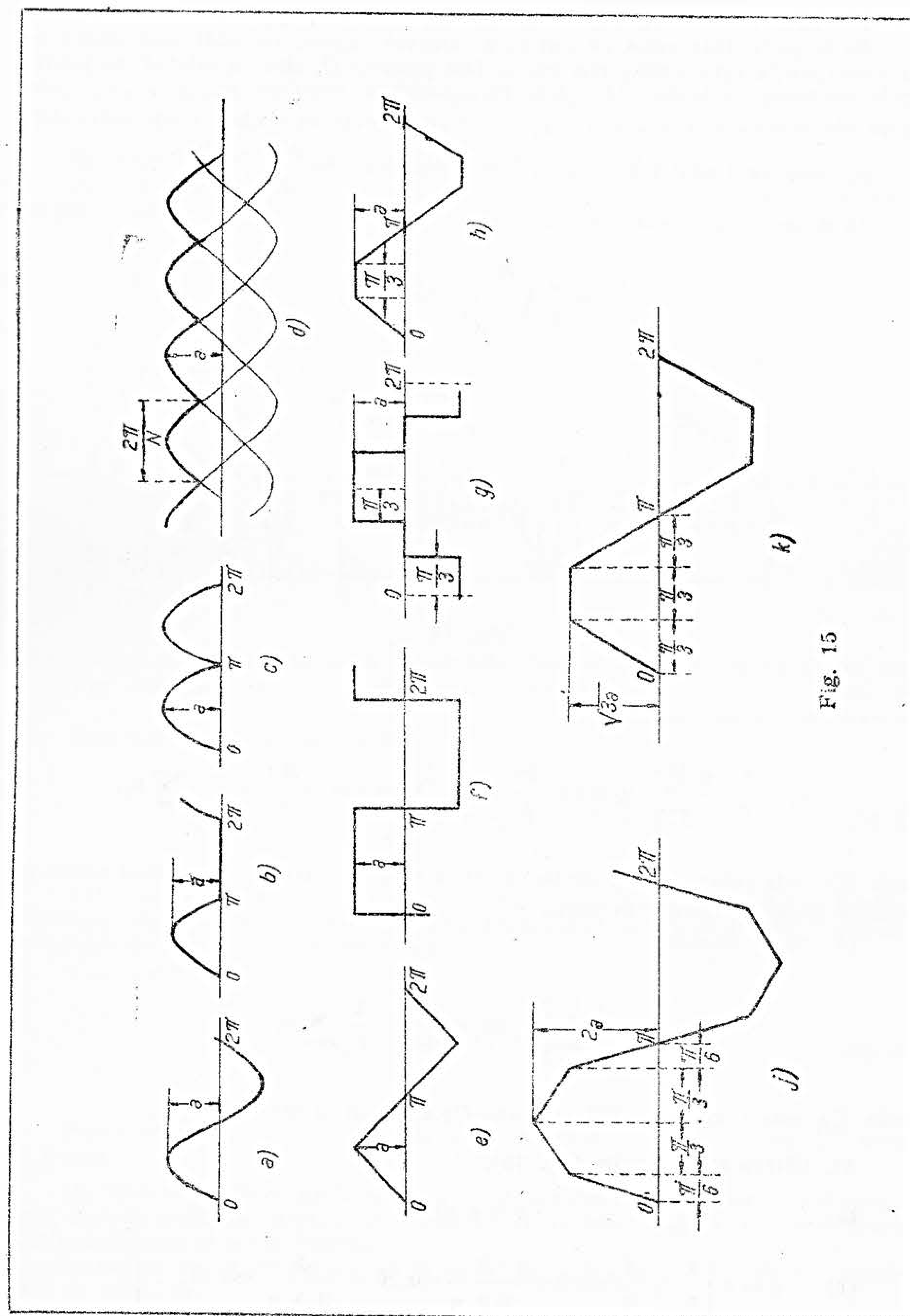


Fig. 15

Curba rectificată a sinusului:

(c) $$y = a\frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos 2\theta - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4\theta - \frac{2}{5\cdot 7}\cos 6\theta \ldots\right]$$

(d) Curba rectificată (N — fazată) a sinusului:

$$y = a\frac{N}{\pi}\sin\frac{\pi}{N}\left[1 + \frac{2\cos N\theta}{N^2 - 1} - \frac{2\cos 2N\theta}{4N^2 - 1} + \frac{2\cos 3N\theta}{9N^2 - 1}\ldots\right]$$

(e) $$y = a\frac{8}{\pi^2}\left[\sin\theta - \frac{1}{9}\sin 3\theta + \frac{1}{25}\sin 5\theta - \frac{1}{49}\sin 7\theta \ldots\right]$$

(f) $$y = a\frac{4}{\pi}\left[\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \frac{1}{7}\sin 7\theta \ldots\right]$$

(g) $$y = a\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos\theta - \frac{1}{5}\cos 5\theta + \frac{1}{7}\cos 7\theta - \frac{1}{11}\cos 11\theta \ldots\right]$$

(h) $$y = a\frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left[\sin\theta - \frac{1}{25}\sin 5\theta + \frac{1}{49}\sin 7\theta \ldots\right]$$

(j) $$y = a\frac{18}{\pi^2}\left[\sin\theta + \frac{1}{25}\sin 5\theta - \frac{1}{49}\sin 7\theta \ldots\right]$$

(k) $$y = a\frac{18}{\pi^2}\left[\sin\theta - \frac{1}{25}\sin 5\theta + \frac{1}{49}\sin 7\theta \ldots\right]$$

55. **Integrala Fourier.** O funcţie continuă (în condiţiile precizate mai sus) şi periodică poate fi exprimată printr'o serie Fourier.

Integrala Fourier dă o reprezentare trigonometrică corespunzătoare pentru o funcţie $f(x)$, definită în intervalul $-\infty < x < +\infty$, şi care nu este supusă nici unei condiţii de periodicitate.

Funcţia $f(x)$ îndeplineşte condiţiile:

— este continuă, ca şi derivata ei, în orice interval finit, cu excepţia posibilă a unui număr limitat de discontinuităţi (în salturi);

— integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(x)\,dx \,|\, dx = C$$

este convergentă

— în punctele de discontinuitate, funcţia $f(x)$ este media aritmetică a valorilor din dreapta şi stânga, adică

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right].$$

In acest caz integrala Fourier poate fi pusă sub forma:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\tau\,(t - x)\,dt$$

sau, în notația complexă:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-j\tau(t-x)}\,dt.$$

Sub altă formă, dacă:

$$g(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-jt\tau}\,dt$$

atunci

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\,e^{j\tau x}\,d\tau.$$

Cele două formule precedente sunt reciproce pentru $f(x)$ şi $g(x)$, fiecare dintre ele fiind soluția celeilalte.

Dacă se pune

$$h(\tau)=\sqrt{2\pi}\,g(2\pi\tau)$$

se obține

$$h(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-2\pi j t\tau}\,dt,\quad f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,e^{2\pi j tx}\,dt.$$

In cazul în care $f(x)$ este o funcție pară, adică $f(x)=f(-x)$, formula poate fi pusă sub forma

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(\tau x)\,d\tau\int_0^{\infty}f(t)\cos(\tau t)\,dt.$$

Dacă funcția $f(x)$ este impară, adică $f(x)=-f(-x)$ se obține:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(\tau x)\,d\tau\int_0^{\infty}f(t)\sin(\tau t)\,dt.$$

Exemple. Se consideră funcția $f(x)=1$ când $x^2<1$; $f(x)=0$, când $x^2>1$.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(\tau x)\,d\tau\int_0^{1}\cos(t\tau)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\tau\cos(\tau x)}{\tau}\,d\tau=\begin{cases}0 \text{ pentru } x^2>1\\ \frac{1}{2} \text{ pentru } x^2=1\\ 1 \text{ pentru } x^2<1\end{cases}$$

cunoscută sub numele de factorul de discontinuitate al lui Dirichlet.

— Funcția $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ este propria ei reciprocă.

In adevăr, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\tau t\,dt=e^{-\frac{\tau^2}{2}}$.

G. Numere complexe. Funcții de variabilă complexă

56. Definiții. Se numeşte *număr complex* o expresie de forma $a+jb$, a şi b fiind numere reale oarecare, iar $j=\sqrt{-1}$. Numărul a este partea reală, iar jb este partea imaginară.

57. **Reprezentarea numerelor complexe.** Numerele complexe se reprezintă în planul x, y printr'un punct având coordonatele $x=a$, $y=b$.

Valoarea $a+jb$ se numeşte *afixul* punctului M.

Dacă se înseamnă cu r distanța OM şi cu φ unghiul pe care dreapta OM îl face cu axa Ox, atunci

$$a=r\cos\varphi$$
$$b=r\sin\varphi$$
$$a+jb=r(\cos\varphi+j\sin\varphi),$$

unde

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ se numeşte *modulul* numărului complex

$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ se numeşte *argumentul* numărului complex

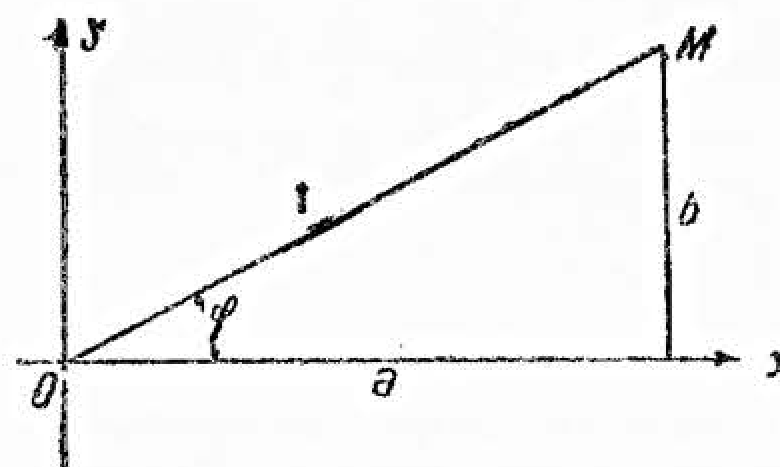


Fig. 16

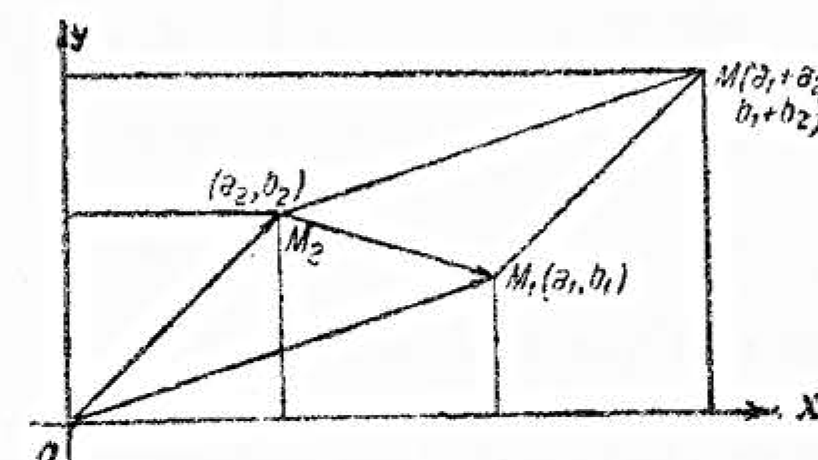


Fig. 17

Deasemenea, un număr complex poate fi reprezentat în planul x, y prin vectorul OM, ale cărui componente sunt a şi b (fig. 16).

58. **Adunarea şi scăderea numerelor complexe.** Dacă:

$$c_1=a_1+jb_1,$$
$$c_2=a_2+jb_2,$$

atunci:

$$c_1+c_2=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2),$$
$$c_1-c_2=(a_1-a_2)-j(b_1-b_2).$$

Dacă c_1 şi c_2 sunt reprezentate respectiv prin M_1 şi M_2 (fig. 17), se observă că a_1+a_2 şi b_1+b_2 sunt coordonatele vectorului OM, suma vectorială a vectorilor OM_1 şi OM_2.

Analog, diferența lor este reprezentată de vectorul M_1M_2, care închide conturul celor doi vectori OM_1 şi OM_2.

59. **Produsul numerelor complexe.** Fiind date numerele complexe

$$c_1=a_1+jb_1 \quad \text{şi} \quad c_2=a_2+jb_2$$

produsul lor va fi:

$$c_1 c_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) =$$

$$= r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

adică modulul produsului este egal cu produsul modulilor iar argumentul produsului este egal cu suma argumentelor:

$$r = r_1 r_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

In mod analog, pentru împărţire:

$$r = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

60. **Puterea unui număr complex.** In particular:

$$(a + jb)^n = \left[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi),$$

formulă cunoscută sub numele de formula lui Moivre.

61. **Rădăcina unui număr complex.** Dacă se notează

$$c^n = (a + jb) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad \text{şi} \quad c = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$c = \sqrt[n]{a + jb} = (a + jb)^{\frac{1}{n}} = \left[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)\right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

adică

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} \quad \text{şi} \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Rezultă că vor fi n rădăcini distincte, dând lui k valorile dela 0 la $n - 1$.

62. **Calculul cu numere complexe.** Toate calculele asupra numerelor complexe se efectuează după regulile generale ale numerelor algebrice, făcând convenţia ca valoarea lui j^2 să fie înlocuită cu -1, şi în general $j^{4n+2} = -1$.

63. **Operatorul j.** Numărul j poate fi definit ca un operator care roteşte cu unghiul $+\frac{\pi}{2}$ vectorul OM căruia i se aplică. In adevăr, dacă OM are ca afix

$$a + bj = r(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

aplicând operatorul j se obţine:

$$-b + aj = r(-\sin\varphi + j\cos\varphi) = r\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

adică un vector OM_1, având acelaşi modul, iar argumentul mărit cu $\frac{\pi}{2}$.

64. **Numere complexe conjugate.** Numărul $a - jb$ este conjugatul numărului $a + jb$. Suma şi produsul a două numere complexe conjugate sunt reale:

$$(a + jb) + (a - jb) = 2a$$

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2.$$

Două numere complexe conjugate sunt simetrice în raport cu axa Ox. Dacă c este numărul complex dat, numărul complex conjugat se înseamnă cu $\bar{c}$.

Intre ele au loc relaţiile

$$a = \frac{c + \bar{c}}{2},$$

$$b = \frac{c - \bar{c}}{2},$$

$$\sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| = |\bar{c}|,$$

a şi jb fiind partea reală respectiv imaginară a numărului c.

65. **Moduri de exprimare a numerelor complexe.** Un număr complex poate fi exprimat sub una din următoarele forme:

$c = a + jb$	(axe dreptunghiulare)
$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,\underline{\vert\varphi}$	(coordonate polare)
$c = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{j\varphi}$	(formă exponenţială)
$c = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\varphi + j\sin\varphi)$	(formă trigonometrică)

unde

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

66. **Exemple de calcul cu mărimi complexe.** Considerând vectorii tensiune şi curent în regim alternativ, între aceştia există relaţiile:

$$I = \frac{U}{Z}, \quad I = UY, \quad Y = \frac{1}{Z},$$

au

$$U = ZI, \quad U = \frac{I}{Y}, \quad Z = \frac{1}{Y},$$

unde Z şi Y sunt respectiv impedanţa şi admitanţa circuitului considerat.

Mărimile Z şi Y pot fi considerate ca nişte operatori complexi, care permit determinarea curentului atunci când tensiunea este dată şi invers.

In adevăr, dacă Z este format dintr'o rezistenţă R şi o reactanţă inductivă jX_L, atunci

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R - jX_L}{(R + jX_L)(R - jX_L)} = \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2} =$$

$$= \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X_L}{Z^2} = G - jB.$$

Rezistenţa R şi reactanţa jX_L care compun impedanţa Z formează un unghiu de 90° în care

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

iar unghiul dintre Z şi R este dat de formula

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{X_L}{R}.$$

Admitanţa Y, obţinută în funcţie de R, X_L şi $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ este formată dintr'o conductanţă G şi dintr'o susceptanţă B, astfel încât

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2},$$

iar unghiul dintre Y şi G este determinat de formula

$$-\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{G}.$$

Unghiul fiind negativ, el măsoară diferenţa de fază cu care tensiunea se găseşte înaintea curentului.

In cazul în care X este o reactanţă pur capacitivă

$$Z = R - jX_C$$

şi deci

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R - jX_C} = \frac{R + jX_C}{R^2 + X_C^2} = \frac{R}{Z^2} + j\frac{X_C}{Z^2} = G + jB.$$

In tabela următoare sunt date formule simple ale operatorului impedanţă.

Circuitul	Diagrama vectorială	Operatorul Z	Mărimea şi unghiul impedanţei	Triunghiul impedanţei Z
R; U	I; U	R	R $\varphi = 0^\circ$	R
L; U	U; 90°; I	$jX_L = j\omega L$	$X_L = \omega L$ $\varphi = 90^\circ$	ωL
C; U	I; 90°; U	$-jX_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$ $\varphi = -90^\circ$	$\frac{1}{\omega C}$
R L; U	U; φ; I	$R + jX_L = R + j\omega L$	$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$	Z; φ; ωL; R
R; U_C; C; U	I; φ; U	$R - jX_C = R + \frac{1}{j\omega C}$	$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega CR}$	R; φ; $\frac{1}{\omega C}$; Z
R L; U_C; C; U	U; φ; I	$R + j(X_L - X_C) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$	$\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$	$\frac{1}{\omega C}$; ωL; Z; φ; R

67. **Variabile complexe.** Mărimea complexă $z = x + jy$, unde x şi y sunt variabile independente reale, se numeşte *variabilă complexă*.

O expresie de forma $w = u(x, y) + jv(x, y)$ este o funcţie de $z = x + jy$ dacă u şi v îndeplinesc anumite condiţii. Dacă u şi v nu sunt legate prin nicio condiţie, studiul funcţiei $u + jv$ se reduce la studiul a două funcţii reale, j nejucând niciun rol special. Dacă u şi v sunt legate prin anumite relaţii, funcţiile de forma $u + jv$ formează o clasă specială având multe dintre proprietăţile funcţiilor reale. Acestea sunt *funcţiile analitice*.

68. **Funcţii analitice.** O funcţie $f(z) = u + jv$ de variabilă complexă $z = x + jy$, se spune că este analitică într'un domeniu, dacă este continuă în acel domeniu şi dacă

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

are o valoare independentă de drumul pe care Δz tinde către 0.

O definiţie echivalentă este exprimată prin condiţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{68.1}$$

derivatele parţiale fiind funcţii continue de x şi y.

In punctele în care condiţiile precedente nu sunt împlinite, funcţia se numeşte «singulară» sau neregulată.

O funcţie analitică poate fi pusă sub forma $f(z) = u + jv$, unde u şi v sunt funcţii determinate de x şi y.

Derivând expresiile (68.1) în raport cu x, respectiv cu y, se obţine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sau} \quad \Delta u = 0.$$

Analog

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sau} \quad \Delta v = 0.$$

Deci orice funcţie analitică dă două soluţii particulare ale ecuaţiei lui Laplace.

In cazul în care funcţia $f(t)$ este analitică, integrala

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b (u + jv)(dx + j\,dy) = \int_a^b (u\,dx - v\,dy) + j\int_a^b (v\,dx + u\,dy),$$

luată dealungul unei curbe, între punctele a şi b, nu depinde de drumul de integrare, deoarece, în baza condiţiilor (68,1), expresiile $(u\,dx - v\,dy)$ şi $(v\,dx + u\,dy)$ sunt diferenţiale totale.

69. **Teorema lui Cauchy.** Dacă o funcţie $f(z)$ este analitică într'un contur închis C şi pe acest contur, integrala

$$\int_C f(z)\,dz,$$

luată în lungul acestui contur, este nulă.

Demonstraţia este evidentă dacă se ţine seamă de cele arătate la punctul 68.

70. **Formula lui Cauchy.** Dacă $f(z)$ este analitică în interiorul unui contur C şi pe acest contur, integrala

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

dă valoarea funcţiei $f(z)$ pentru orice valoare $z = z_0$ din interiorul conturului.

Dacă se derivează de n ori,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

71. **Derivarea şi integrarea funcţiilor analitice.** Toate formulele relative la derivarea şi integrarea funcţiilor de variabilă reală rămân valabile şi în cazul funcţiilor analitice.

Derivata unei constante este nulă şi derivata variabilei independente z este egală cu unitatea.

72. **Seria Taylor.** Când se spune că o funcţie este analitică se înţelege implicit că analicitatea ei are loc într'un anumit domeniu (numai constantele sunt analitice în întregul plan).

In toate punctele care nu sunt singulare, o funcţie analitică poate fi desvoltată într'o serie de forma:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots \text{ (seria Taylor)}$$

unde

$$f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Pentru $a = 0$:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \ldots \text{ (seria Mac Laurin)}.$$

Dacă $f(z)$ poate fi desvoltată în serie Taylor în punctul a şi în interiorul unui cerc a cărui rază este mai mare decât 0, funcţia $f(z)$ este *regulată* în punctul a, iar a este un punct *ordinar* al funcţiei $f(z)$. Punctele din planul z pentru care $f(z)$ nu este regulată se numesc *singulare*.

Funcţia $f(z)$ este uniformă dacă pentru o valoare a lui z corespunde o singură valoare a lui $f(z)$. In cazul contrariu ea este multiformă.

73. **Puncte singulare.** Dacă primii n termeni ai seriei Taylor ai unei funcţii analitice şi uniforme, $f(z)$ sunt egali cu 0, adică

$$f(a) = f'(a) = \ldots f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{şi} \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

atunci:

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \ldots$$

sau

$$f(z) = (z-a)^n\, g(z).$$

In acest caz, punctul a este un *zero de ordinul n* pentru funcţia $f(z)$.

Dacă punctul a este un zero de ordinul n pentru $\frac{1}{f(z)}$ atunci

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}.$$

In punctul $z = a$, funcţia $f(z)$ încetează să fie analitică, iar punctul a este un *pol de ordinul n* pentru $f(z)$.

Pentru $\frac{1}{f(z)}$ polurile sunt puncte ordinare.

Se numesc *puncte singulare esenţiale* punctele în care $f(z)$ rămâne uniformă, dar care sunt puncte singulare şi pentru $\frac{1}{f(z)}$.

Punctele de branşament sunt acele puncte singulare în vecinătatea cărora $f(z)$ nu mai este uniformă.

74. **Desvoltarea în serie Laurent.** Dacă a este un punct regulat, sau un pol sau un punct singular esenţial izolat al funcţiei $f(z)$, care este însă analitică în interiorul unei regiuni cuprinse între două cercuri cu centrul în a, de raze k şi K, funcţia $f(z)$ poate fi desvoltată în interiorul acestei regiuni $k < r < K$ într'o serie de forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n \qquad (74.1)$$

unde constantele c_n sunt date de formulele

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$$

iar C este un cerc având raza r astfel ca $k < r < K$.

Seria (74.1) este *desvoltarea în serie Laurent* a funcţiei $f(z)$.

Desvoltarea în serie Laurent este unică.

Dacă a este un punct regulat, c_n sunt nuli pentru toate valorile negative ale lui n.

Dacă a este un pol de ordinul m, desvoltarea este de forma

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n.$$

Dacă a este un punct singular esenţial, valorile c_n, pentru $n = -1, -2, -3 \ldots$, sunt diferite de 0.

Aceste posibilităţi diferite de desvoltare în serie indică natura punctului singular ale funcţiilor analitice uniforme. Caracterul funcţiei la infinit este cunoscut după posibilităţile de desvoltare în serie a funcţiei $f\left(\frac{1}{z}\right)$, în jurul punctului $z = 0$.

75. **Reziduuri şi teorema reziduurilor.** Dacă a este un pol de ordinul m al funcţiei $f(z)$, coeficientul c_{-1} al desvoltării Laurent se numeşte reziduul funcţiei $f(z)$ în punctul a, adică

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j}\int_C f(z)\,dz,$$

unde curba C nu include niciun alt pol în afară de a.

In general

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{n=1}^{m} R_n$$

unde R_n este reziduul aferent polului a_n, iar C este o curbă închizând cele m poluri ale funcţiei $f(z)$.

76. **Exemple de calcul al integralelor definite.** Teorema lui Cauchy şi teorema reziduurilor se aplică adesea pentru calcularea unor integrale definite, fără a fi necesar să se cunoască integrala indefinită respectivă.

— Fie de calculat cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Se consideră funcţia $\frac{e^{jz}}{z}$ în planul complex, care se integrează în lungul unui contur arătat în fig. 18, constând din semicercul S_R de rază R, din semicercul S_r de rază r, amândouă cu centrul în origine, şi din două intervale simetrice I_1 şi I_2 dealungul axei x.

Deoarece funcţia $\frac{e^{jz}}{z}$ este regulată în interiorul acestui contur şi pe contur, integrala luată în lungul conturului este, potrivit teoremei lui Cauchy, egală cu 0. Rezultă deci (ţinând seama că

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x):$$

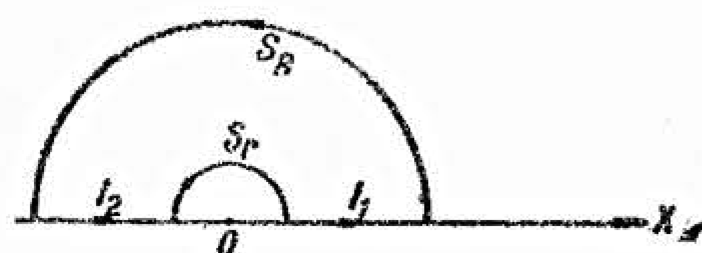


Fig. 18

$$\int_{S_R} \frac{e^{jz}}{z} dz + \int_{S_r} \frac{e^{jz}}{z} dz + 2j \int_r^R \frac{\sin x}{x} dz = 0.$$

Dacă se face ca R să tindă către infinit şi r către 0, se constată că integrala $\int_{S_R} \frac{e^{jz}}{z} dz$ tinde către 0, iar integrala $\int_{S_r} \frac{e^{jz}}{z} dz$ tinde către valoarea $-\pi j$.

Rezultă deci

$$-\pi j + 2j \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 0$$

adică

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

— Fie de calculat, cu ajutorul teoremei reziduurilor integrala

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Deşi integrala nu are decât o variabilă reală, ea poate fi transformată într'o integrală în planul complex, cu condiţia ca limitele să rămână aceleaşi şi integrarea să se facă în lungul axei x.

Fie conturul $-RRAB$ (fig. 19). Potrivit teoremei reziduurilor

$$\int_{-RRAB} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} = 2\pi j \sum_1^m R_n$$

unde R_n sunt reziduurile aferente fiecărui pol.

In speţă, polurile sunt date de

$$z^2 + 1 = 0, \qquad z = \pm j.$$

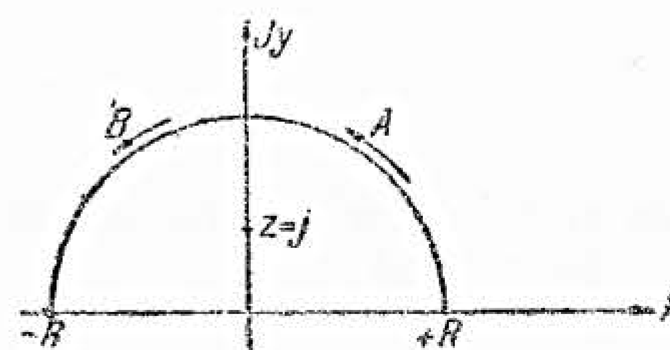


Fig. 19

Conturul ales cuprinde numai polul $z = j$.

Se desvoltă funcţia în serie Laurent în jurul punctului $z = j$, adică în serie de puteri $(z - j)$. Pentru aceasta se scrie:

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{1}{(z - j)^3} \cdot \frac{1}{(z + j)^3}.$$

Desvoltând expresia $\frac{1}{(z + j)^3}$ în serie Taylor de forma:

$$f(z) = f(j) + f'(j)(z - j) + \frac{f''(j)(z - j)^2}{2!} + \cdot$$

se obţine:

$$\frac{1}{(z + j)^3} = (2j)^{-3} + (-3)(2j)^{-4}(z - j) + \frac{3.4.(2j)^{-5}(z - j)^2}{2} + \cdots =$$

$$= \frac{j}{8} - \frac{3}{16}(z - j) - \frac{3j}{16}(z - j)^2 + \cdots$$

Deci

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{(z + j)^{-3}}{(z - j)^3} = \frac{+j}{8(z - j)^3} - \frac{3}{16(z - j)^2} - \frac{3j}{16(z - j)} \cdots$$

Reziduul căutat este coeficientul termenului în $\frac{1}{(z - j)}$, adică $\frac{-3j}{16}$. Rezultă că:

$$\int_{-RRAB} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} = 2\pi j \left(\frac{-3j}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

Insă:

$$\int_{-RRAB} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} = \int_{-R}^{+R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} + \int_{RAB} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3}.$$

Dacă se face ca R să crească indefinit, ultima integrală tinde către 0, deoarece punând: $z = Re^{j\theta}$, se obţine

$$\int_{RAB} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3} = \frac{j}{R^5} \int_0^{\pi} \frac{e^{j\theta} d\theta}{\left(e^{2j\theta} + \frac{1}{R^2}\right)^3}$$

care tinde evident spre 0, când R tinde spre infinit.

Rezultă deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

77. Transformări conforme.

O transformare

$$\xi = \Phi(x, y) \qquad \eta = \Psi(x, y)$$

se numeşte *transformare conformă*, dacă două curbe din planul x, y sunt transformate în două curbe din planul ξ, η care fac între ele acelaşi unghiu ca şi curbele originale. Condiţia necesară şi suficientă pentruca transformarea să fie conformă este ca:

$$\Phi_x - \Psi_y = 0 \quad , \quad \Phi_y + \Psi_x = 0,$$

sau

$$\Phi_x + \Psi_y = 0 \quad , \quad \Phi_y - \Psi_x = 0.$$

In primul caz direcţia unghiurilor este păstrată; în al doilea caz direcţia este inversată.

Din cele de mai sus rezultă:

Condiţia ca o funcţie de variabilă complexă

$$f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$$

să fie analitică, este echivalentă cu condiţia ca transformarea:

$$u = u(x, y) \qquad v = v(x, y)$$

să fie conformă, cu evitarea punctelor pentru care $f'(z_0) = 0$.

In adevăr, funcţiile u şi v trebue să îndeplinească aceleaşi condiţii ca şi funcţiile Φ şi Ψ, adică

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x.$$

H. Ecuaţii diferenţiale

78. **Definiţii.** O ecuaţie se numeşte *ecuaţie diferenţială*, dacă înafară de funcţiile necunoscute şi de variabilele independente conţine şi derivatele primelor în raport cu variabilele independente.

In cazul derivatelor parţiale, ecuaţia se numeşte *cu derivate parţiale*. Celelalte ecuaţii sunt *comune* sau *ordinare*.

Ordinul unei ecuaţii diferenţiale este dat de cel mai înalt ordin al derivatelor.

Gradul unei ecuaţii diferenţiale este dat de exponentul cel mai înalt al derivatei având ordinul cel mai mare.

Dacă în ecuaţia diferenţială:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

M şi N sunt funcţii omogene de x şi y, având acelaşi grad, ea se numeşte *omogenă*.

Deasemenea ea se numeşte omogenă dacă este o funcţie omogenă şi raţională de

$$y, \frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Soluţia sau *integrala generală* a unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul n conţine n constante arbitrare. Dacă se dau constantelor anumite valori se obţin *soluţii particulare*.

In practică, soluţia particulară se obţine din soluţia generală, ţinând seama de condiţiile pe care trebue să le satisfacă soluţia particulară căutată.

Ecuaţiile de ordinul I neliniare pot avea soluţii care nu se obţin dând valori speciale constantelor. Aceste soluţii se numesc *singulare*.

Soluţia generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul n, cu p variabile independente, conţine n funcţii arbitrare cu $p - 1$ variabile (sau combinaţii ale acestora).

79. **Ecuaţiile diferenţiale de ordinul I şi de gradul I** au forma generală

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Ele pot fi rezolvate prin cuadraturi dacă:

— *variabilele sunt separabile*, adică ecuaţia poate fi pusă sub forma:

$$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0.$$

Soluţia generală este

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(y)\,dy = C;$$

— *ecuaţia este omogenă*, adică poate fi pusă sub forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Făcând substituţia $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad \text{sau } f(v) = x\frac{dv}{dx} + v,$$

variabilele se pot separa, obţinându-se

$$\ln x + \int \frac{dv}{v - f(v)} = C;$$

— *ecuaţia este liniară* în raport cu y, adică

$$\frac{dy}{dx} + f_1(x)\,y + f_2(x) = 0.$$

Pentru rezolvarea ei se pune:

$$y = uz,$$

unde u şi z sunt funcţii necunoscute de x, care trebue determinate.

Derivând

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Inlocuind aceste valori în ecuaţia dată se obţine:

$$u\frac{dz}{dx} + \left[\frac{du}{dx} + f_1(x)\right]\cdot z + f_2(x) = 0. \quad (80.1)$$

Considerând că u satisface ecuaţia

$$\frac{du}{dx} + f_1(x) = 0,$$

funcţia u poate fi determinată.

Apoi, înlocuind valoarea obţinută în ecuaţia (80.1), z poate fi de asemenea determinat.

Soluţia generală este

$$y = Ce^{-\int f_1(x)\,dx} - e^{-\int f_1(x)\,dx}\int f_2(x)\,e^{\int f_1(x)\,dx}\,dx;$$

— *ecuaţia lui Bernoulli*:

$$\frac{dy}{dx} + y\,f_1(x) = y^n f_2(x)$$

poate fi adusă la forma liniară făcând substituţia

$$z = y^{1-n},$$

de unde

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1-n}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

şi ecuaţia dată devine

$$\frac{dz}{dx} - (n-1)\,z\,f_1(x) + (n-1)\,f_2(x) = 0;$$

— *ecuaţia este o diferenţială* ***exactă***, adică în expresia

$$f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy = 0,$$

$f_1(x, y)$ şi $f_2(x, y)$ îndeplinesc condiţia

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

In acest caz se poate găsi o funcţie $F(x, y)$ astfel ca

$$dF = f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy.$$

Soluţia generală este $F(x, y) = \text{const.}$, unde

$$F(x, y) = \int f_1(x, y)\,dx + \int \left[f_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int f_1(x, y)\,dx\right] dy.$$

— *ecuaţia lui Lagrange*

$$y = x f_1(y') + f_2(y').$$

Derivând în raport cu x şi punând $y' = p$ se obţine:

$$p = f_1(p) + \left[x f_1'(p) + f_2'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

de unde

$$\left[f_1(p) - p\right]\frac{dx}{dp} + x f_1'(p) + f_2'(p) = 0,$$

ecuaţie liniară în raport cu x.

— *ecuaţia lui Clairaut*, care este un caz particular al ecuaţiei lui Lagrange şi anume $f_1(y') = y'$, adică $y = xy' + f_2(y')$.

Punând $y' = p$, ecuaţia ia forma

$$\left[x + f_2'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Prima soluţie este

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{adică} \quad p = C, \quad y = Cx + D.$$

Substituind în ecuaţia iniţială se obţine

$$y = Cx + f_2(C),$$

care constitue prima soluţie, adică o familie de drepte.

A doua soluţie este

$$x + f_2'(p) = 0,$$

care împreună cu ecuaţia iniţială $y = xp + f_2(p)$ dă, în urma eliminării lui p, înfăşurătoarea familiei de drepte, constituind o soluţie singulară.

— *ecuaţia lui Riccati*

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\,y^2 + f_2(x)\,y + f_3(x);$$

unde $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sunt funcţii de x.

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară y_1, făcând substituţia

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

se obţine

$$\frac{dv}{dx} + \left[f_2(x) + 2f_1(x)\,y_1\right] v = -f_1(x),$$

ecuaţie liniară în raport cu v.

Dacă se cunosc trei integrale particulare y_1, y_2, y_3, integrala generală este

$$\frac{(y - y_1)(y_2 - y_3)}{(y - y_3)(y_3 - y_1)} = C,$$

adică ea poate fi obţinută fără integrare.

— *ecuaţia de forma*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

unde a, b, c, a', b', c' sunt constante, poată fi adusă prin substituţii lineare la o separare a variabilelor sau la o ecuaţie omogenă.

80. Tipuri speciale de ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

— *Ecuaţia având forma*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

unde X este o funcţie de x sau o constantă, poate fi integrată în urma înmulţirii cu dx

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int X\,dx + C.$$

Repetând operaţia de $n - 1$ ori se obţine soluţia generală:

$$y = \int\int \ldots \int X\,dx^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots C_{n-1} x + C_n$$

sau, mai simplu:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x X(t)\,(x - t)^{n-1}\,dt + C_1 x^{n-1} + \ldots C_n,$$

unde $C_1, C_2, \ldots C_n$ sunt n constante arbitrare.

— *Ecuaţia:*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y,$$

unde Y este o funcţie numai de y, poate fi pusă sub forma

$$y'\,dy' = Y\,dy,$$

care dă prin integrare

$$y'^2 = 2\int Y\,dy + C = F(y) + C,$$

la care variabilele pot fi separate.

81. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior, la care ordinul poate fi redus:

— Dacă ecuaţia nu conţine funcţia y, se ia ca nouă necunoscută $y' = p$, de unde

$$y'' = \frac{dp}{dx} \qquad y''' = \frac{d^2p}{dx^2} \ldots y^{(n)} = \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}.$$

Substituind în ecuaţia dată, ordinul acesteia scade cu o unitate.

— Dacă ecuaţia nu conţine în mod explicit variabila independentă x, adică are forma

$$F\left[y, y', y'' \ldots y^{(n)}\right] = 0,$$

se ia ca funcţie necunoscută y', iar ca variabilă independentă y; pe baza relaţiilor

$$\frac{dy}{dx} = y' \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y'\frac{dy'}{dy} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2y'}{dy^2}y' + \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2 y' \ldots$$

ecuaţia devine:

$$F_0\left(y, y', \frac{dy'}{dy} \ldots \frac{d^{n-1}y'}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

— Dacă ecuaţia de ordinul k este omogenă în raport cu $y, y', y'' \ldots$, se face substituţia;

$$y = e^{\int z\,dx}$$

de unde rezultă

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int z\,dx} z$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int z\,dx} z^2 + e^{\int z\,dx} z'.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Substituind în ecuaţia dată se obţine, pe baza omogeneităţii ei, o ecuaţie în $\frac{dz}{dx}$, de un ordin cel mult egal cu $k-1$.

82. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul n. Generalităţi. Ele au forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots X_n y = F(x) \qquad (82.1)$$

unde $X_1 X_2 \ldots X_n$ şi $F(x)$ sunt funcţii numai de x.

Ele se bucură de următoarele proprietăţi:

— Dacă y_0 este o soluţie particulară a ecuaţiei (82.1), punând $y = y_0 + Y$, Y va fi o soluţie a ecuaţiei

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots X_n y = 0. \qquad (82.2)$$

Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene (82.2) va furniza, adăugând pe y_0, şi soluţia generală a ecuaţiei (82.1), având al doilea membru $F(x)$.

— Dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei omogene

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots X_n y = 0$$

atunci $y = Cy_1$ este deasemenea o soluţie a acesteia.

In general dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt n soluţii particulare ale ecuaţiei (82.2), astfel încât niciuna să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte, integrala generală are forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_n y_n.$$

83. **Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul n, cu coeficienţi constanţi** au forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots A_n y = F(x) \text{ (ecuaţie neomogenă)} \qquad (83.1)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots A_n y = 0 \qquad \text{(ecuaţie omogenă).} \qquad (83.2)$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei omogene se face substituţia

$$y = e^{rx},$$

conducând la condiţia

$$r^n + A_0 r^{n-1} + A_1 r^{n-2} + \ldots A_n = 0,$$

care este *ecuaţia caracteristică* a ecuaţiei date.

Dacă $r_1, r_2 \ldots r_n$ sunt cele n rădăcini *distincte* ale ecuaţiei caracteristice, soluţia generală are forma:

$$Y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots C_n e^{r_n x}.$$

Dacă $r_1 = r_2 = \ldots r_s = a$, celelalte rădăcini fiind distincte, soluţia generală este

$$Y(x) = \left(C_1' + C_2' x + C_3' x^2 + \ldots C_s' \cdot x^{s-1}\right) e^{ax} + C_{s+1} e^{r_{s+1} x} + \ldots C_n e^{r_n x}.$$

Dacă y_0 este o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei neomogene

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = F(x),$$

atunci soluţia ei generală este

$$y = y_0 + Y(x).$$

Pentru determinarea, în câteva cazuri, a soluţiilor particulare ale ecuaţiei neomogene (83.1) se va folosi notaţia operaţională (vezi capitolul *«Calculul operaţional»*):

— Dacă F(x) este o funcţie raţională de x, ecuaţia (83.1) poate fi scrisă sub forma

$$\left(p^n + A_0 p^{n-1} + \ldots A_n\right) y = F(x)$$

deci

$$y_0 = \frac{F(x)}{p^n + A_0 p^{n-1} + \ldots A_n}.$$

Dacă se desvoltă operatorul $\dfrac{1}{p^n + A_0 p^{n-1} + \ldots A_n}$ după puterile crescătoare ale lui p, se capătă

$$\frac{1}{p^n + A_0 p^{n-1} + \ldots A^n} = \sum_{-n}^{+k} c_i\, p^i,$$

care aplicat asupra polinomului F(x) [dacă F(x) este de gradul k desvoltarea se face numai până la termenul k, toţi ceilalţi termeni dispărând prin derivare], dă soluţia particulară căutată.

— Dacă $F(x) = e^{\omega x} f(x)$, unde $f(x)$ este un polinom, se obţine

$$y_0 = \frac{F(x)}{p^n + A_0 p^{n-1} + \ldots A_n} = \frac{e^{\omega x} f(x)}{p^n + A_0 p^{n-1} + \ldots A_n}.$$

Potrivit regulilor calculului operaţional:

$$y_0 = \frac{1}{p^n + A_0 p^{n-1} + \ldots A_n} e^{\omega x} f(x) = e^{\omega x} \frac{1}{(p+\omega)^n + A_0 (p+\omega)^{n-1} + \ldots A_n} f(x),$$

soluţionarea revenind la aceea a cazului precedent.

— Dacă

$$F(x) = f(x) \cos(\omega x + \alpha),$$

determinarea lui y_0 se reduce la cazul precedent, ţinând seama că

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

84. **Ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili** au forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots X_n y = F(x), \tag{84.1}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots X_n y = 0, \tag{84.2}$$

în care $X_1, X_2 \ldots X_n$ şi F(x) sunt funcţii numai de x. Dacă $y_1, y_2 \ldots y_n$ sunt n soluţii particulare ale ecuaţiei omogene (85.2), condiţia ca ele să fie liniar independente este ca determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \ldots & \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \\ \dfrac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} & \ldots & \dfrac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \ldots & \dfrac{dy_n}{dx} \\ y_1 & \ldots & y_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

In acest caz soluţia generală a ecuaţiei omogene (84.2) este de forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \ldots + C_n y_n,$$

iar soluţia generală a ecuaţiei (84.1) este

$$y = \sum_1^n y_r \left[C_r + \int \frac{F(x)\, \Delta_r}{\Delta} dx \right]$$

unde Δ_r este minorul elementului $\dfrac{d^{n-1} y_r}{dx^{n-1}}$ din determinantul Δ.

85. **Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul II** au ca formă generală

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = F(x) \tag{85.1}$$

unde X_1, X_2 şi F(x) sunt funcţii numai de x.

Dacă F(x) = 0, adică ecuaţia este omogenă

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0; \tag{85.1'}$$

pentru determinarea soluţiei acestei ecuaţii se face substituţia

$$y = e^{\int z\, dx}$$

Substituind şi simplificând cu factorul $e^{\int z\, dx}$ se obţine

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + X_1 z + X_2 = 0,$$

adică o ecuaţie de ordinul I (ecuaţia lui Ricatti), care nu poate fi integrată în forma ei generală.

Dacă $z(x)$ este o soluţie, substituţia $y = e^{\int z\,dx}$ dă o infinitate de soluţii ale ecuaţiei (85.1'), de forma

$$y = C_1 e^{\int_{x_0}^{x} z(a)\,da},$$

unde C_1 este o constantă arbitrară.

Notând cu

$$y_1 = e^{\int_{x_0}^{x} z(a)\,da}$$

şi făcând o nouă substituţie

$$y = y_1 \int u\,dx,$$

unde u este o funcţie necunoscută, se obţine prin derivare şi prin substituţie în (85.1'), condiţia

$$y_1 u' + (2\,y_1' + X_1 y_1)\,u = 0$$

care integrată dă

$$u = \frac{e^{-\int X_1\,dx}}{y_1^2}$$

sau

$$y = y_1 \int \frac{e^{-\int X_1\,dx}}{y_1^2}\,dx.$$

Această soluţie conţine două constante arbitrare, câte una pentru fiecare integrală nedefinită.

Ea poate fi pusă sub forma

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{t} X_1(x)\,dx}}{y_1^2(t)}\,dt,$$

unde C_1 şi C_2 sunt două constante arbitrare.

Dacă se ia $C_1 = 1$ şi $C_2 = 0$, se obţine

$$y = y_1(x),$$

care este o soluţie oarecare a ecuaţiei (85.1'), aleasă în mod arbitrar, şi care nu se poate anula.

Dacă se ia

$$C_1 = 0 \quad \text{şi} \quad C_2 = 1,$$

se obţine

$$y = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{t} X_1(a)\,da}}{y_1^2(t)}\,dt = y_2(x),$$

care este o nouă soluţie a ecuaţiei (85.1'), care nu se poate nici anula, nici obţine din soluţia $y_1(x)$ prin înmulţirea cu o constantă.

Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene (85.1') se poate scrie sub forma $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, unde C_1 şi C_2 sunt două constante arbitrare. $y_1(x)$ este o soluţie aleasă dinainte, iar $y_2(x)$ o altă soluţie care nu se poate anula şi nici nu se poate deduce din prima prin înmulţirea cu o constantă.

In cazul în care $F(x) \neq 0$, (ecuaţie neomogenă), se caută o soluţie particulară:

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + X_1 \frac{dy_0}{dx} + X_2\, y_0 = F(x),$$

care prin scădere din (85.1) dă

$$\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} + X_1 \frac{d(y - y_0)}{dx} + X_2(y - y_0) = 0,$$

adică o ecuaţie omogenă, în care funcţia necunoscută este

$$Y = y - y_0.$$

Soluţia ei este

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

adică

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_0$$

care este soluţia generală a ecuaţiei (85.1)

Cele expuse mai sus se aplică şi ecuaţiilor liniare de orice ordin, adică: soluţia generală a ecuaţiei

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots = F(x),$$

unde $X_1, X_2 \ldots$ sunt funcţii numai de x, este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_0,$$

unde y_0 este o soluţie oarecare a ecuaţiei neomogene date, iar $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene.

86. **Metoda lui Lagrange de variaţie a constantelor** se aplică pentru determinarea unei soluţii particulare y_0 a ecuaţiei neomogene, când soluţia generală a ecuaţiei omogene este cunoscută.

In cazul ecuaţiei (85.1'), dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei omogene (fără membrul drept), a doua soluţie y_2 va fi

$$y_2 = K y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}\, e^{-\int X_1\,dx},$$

unde K este o constantă arbitrară.

Soluţia generală este deci

$$y = y_1 C_1 + y_2 C_2.$$

Considerând pe C_1 şi C_2 ca funcţii de x, ele urmează să fie determinate astfel ca ecuaţia cu membrul al doilea să fie satisfăcută.

Derivând se obţine:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} C_1 + \frac{dy_2}{dx} C_2 + \frac{dC_1}{dx} y_1 + \frac{dC_2}{dx} y_2.$$

Punând condiţia suplimentară:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0$$

şi derivând a doua oară se obţine

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} C_1 + \frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2} C_2 + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx}.$$

Substituind valorile $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{d^2y}{dx^2}$ în ecuaţia (85.1) se obţine

$$\frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} = F(x),$$

de unde

$$C_2 = A + \frac{1}{K}\int F(x)\, y_1\, e^{\int X_1 dx}\, dx,$$

$$C_1 = B - \frac{1}{K}\int F(x)\, y_2\, e^{\int X_1 dx}\, dx,$$

unde A şi B sunt două constante arbitrare, iar K o constantă care depinde de alegerea soluţiilor y_1 şi y_2.

87. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul II cu coeficienţi constanţi

Având în vedere importanţa acestor ecuaţii în toate domeniile tehnicei, ele vor fi studiate mai amănunţit asupra unor cazuri speciale.

In cele ce urmează se consideră t ca variabilă independentă, iar x ca variabilă dependentă.

(α) Dacă variaţia în timp a unei mărimi fizice $f(t)$ este dată de ecuaţia

$$f(t) = M + A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + B\right),$$

se spune că mişcarea este o oscilaţie armonică, cu perioada T, între valoarea maximă $M + A$ şi valoarea minimă $M - A$, astfel că

$$f(t) = f(t + nT) \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Oscilaţia armonică cu perioada T se produce în jurul valorii medii

$$M = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)\, dt = \bar{f}.$$

Abaterea dela valoarea medie

$$f(t) - \bar{f} = x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + B\right) \tag{87.1}$$

constitue deasemenea o oscilaţie armonică, în jurul valorii medii nule, în care A este *amplitudinea*, $\left(\frac{2\pi t}{T} + B\right)$ este *faza*, B este *constantă de fază*, $\frac{1}{T}$ *frecvenţa*, *iar* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ *pulsaţia*.

Se verifică uşor că funcţia (87.1) este o soluţie a ecuaţiei

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0. \tag{87.2}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t).$$

Ţinând seama că

$$\sin(\omega_0 t + B) = \sin B \cdot \cos\omega_0 t + \cos B \cdot \sin\omega_0 t$$

se obţine, prin identificare

$$C_1 = A \sin B, \qquad C_2 = A \cos B.$$

Cele două constante arbitrare C_1 şi C_2 determină deci amplitudinea şi constanta de fază, pe baza relaţiilor

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad B = \operatorname{arc\,tg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Dacă ecuaţia (87.2) este considerată ca ecuaţia mişcării unui punct de masă m, sub acţiunea unei forţe proporţionale cu distanţa x, ea poate fi pusă sub forma

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \tag{87.3}$$

unde k este o constantă pozitivă.

Rezultă că sistemul execută o oscilaţie armonică de pulsaţie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

în jurul poziţiei de echilibru, adică

$$x = A \sin(\omega_0 t + B).$$

Dacă mişcarea are loc într'un mediu rezistent, urmează să se introducă rezistenţa de frecare, proporţională cu viteza din fiecare moment şi deci ecuaţia (87.3) ia forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \tag{87.4}$$

unde $2b$ este constanta de frecare.

Integrala generală a acestei ecuaţii este de forma

$$x = A e^{-\frac{2m}{b} t} \sin(\omega_0 t + B),$$

având pulsaţia proprie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2}.$$

Integrala generală reprezintă o oscilaţie amortizată a cărei amplitudine descreşte odată cu timpul.

(β) Fie de considerat ecuaţia descărcării unui condensator de capacitate C într'un conductor de rezistenţă R şi inductanţă L (fig. 20). Dacă sarcina condensatorului este q la momentul t, atunci:

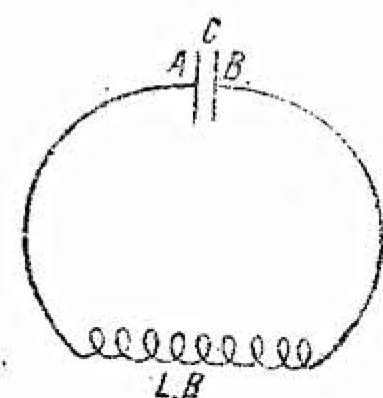


Fig. 20

$$V_A - V_B = \frac{q}{C}, \quad i = -\frac{dq}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = -\frac{dq^2}{dt^2}.$$

Inlocuind în ecuaţia

$$V_A - V_B = Ri + L\frac{di}{dt}$$

se obţine

$$L\frac{dq^2}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \qquad (87.5)$$

Comparând cu ecuaţia (87.4), analogia cu sistemul mecanic este evidentă: $L\frac{dq^2}{dt^2}$ joacă rolul forţei de inerţie, iar $R\frac{dq}{dt}$ rolul amortizor al frecării.

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei (87.5) este

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0$$

$$x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}.$$

Dacă $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$, ecuaţia are două rădăcini negative $-\alpha$ şi $-\beta$.

$$q = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{-\beta t}, \quad i = -\frac{dq}{dt} = C_1 \alpha e^{-\alpha t} + C_2 \beta e^{-\alpha t}.$$

Admiţând condiţiile iniţiale $t = 0$, $i = 0$, $q = q_0$

$$q = q_0 \frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \qquad i = q_0 \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

Dacă $\beta > \alpha$, $e^{-\beta t} < e^{-\alpha t}$ şi deci i şi q tind către 0, pe măsură ce t creşte.

Dacă $R^2 - 4\frac{L}{C} = 0$, ecuaţia caracteristică are o rădăcină dublă $-\frac{R}{2L}$

$$q = q_0(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}; \quad i = q_0 \alpha^2 t e^{-\alpha t}.$$

Ca şi în cazul precedent, q şi i tind spre 0 pe măsură ce timpul creşte.

Dacă $R^2 - 4\frac{L}{C} < 0$, adică R este mic în raport cu L, ecuaţia are două rădăcini imaginare $-\lambda \pm \omega\sqrt{-1}$ şi integrala are forma

$$q = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi).$$

unde

$$\lambda = -\frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Rezultă că atât sarcina cât şi curentul sunt reprezentate de funcţii sinusoidale amortizate.

Se observă că perioada T, care în cursul oscilaţiei neamortizate era

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}}},$$

[vezi punctul (α)], are în acest caz valoarea

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Raportul între valorile $q(t)$ şi $q(t+T)$, la interval de o perioadă, este

$$\frac{q(t)}{q(t+T)} = e^{\frac{R}{2L}T}$$

sau

$$\ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \frac{R}{2L}T,$$

care se numeşte *decrement logaritmic* al oscilaţiei libere amortizate (Gauss).

In rezumat,

dacă $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ mişcarea este aperiodică;

dacă $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ mişcarea este aperiodică la limită;

dacă $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ mişcarea este sinusoidală amortizată.

Dacă R^2 este neglijabil în raport cu $\frac{1}{LC}$, se poate lua

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

care este perioada proprie a circuitului.

(γ) Considerând din nou ecuaţia (87.2), cu membrul al doilea de formă sinusoidală:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F\cos(\omega t + H)$$

soluţia generală este

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + F \frac{\cos(\omega t + H)}{(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

$F \frac{\cos(\omega t + H)}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ fiind o soluţie particulară

Soluţia generală poate fi pusă sub forma

$$x = A \cos(\omega_0 t + B) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + H)$$

în care

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t + B)$$

reprezintă oscilaţia liberă a sistemului, iar

$$x_2 = F \frac{\cos(\omega t + H)}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

este oscilaţia forţată (soluţia particulară).

Dacă $\omega_0 = \omega$, adică pulsaţia forţei exterioare este egală cu pulsaţia proprie se produce fenomenul de rezonanţă.

Soluţia particulară ia în acest caz forma

$$x_2 = \frac{Ft}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t + H)$$

adică amplitudinea $\frac{Ft}{2\omega_0}$ creşte indefinit odată cu timpul.

(δ) In sfârşit, ecuaţia generală cu membrul al doilea de forma $F(\cos \omega t + H)$:

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = F(\cos \omega t + H)$$

are ca integrală generală:

$$x = A e^{-\frac{b}{2m} t} (\sin \omega_0 t + B) + \alpha F \cos(\omega t + H - \varepsilon),$$

unde primul termen este integrala generală a ecuaţiei fără membrul al doilea, iar al doilea termen este o soluţie particulară, representând oscilaţia forţată. Valorile lui α, respectiv ε sunt

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + 4\frac{b^2\omega^2}{m^2}}}, \quad \varepsilon = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\frac{2b\omega}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2}\right)$$

88. **Integrare prin desvoltare în serie.** Ecuaţia de ordinul II:

$$X_0 \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = F(x),$$

în care X_0, X_1, X_2, $F(x)$ sunt de forma: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$ poate fi eventual rezolvată prin desvoltarea în serie

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots,$$

de unde

$$\frac{dy}{dx} = p_1 + 2p_2 x + 3p_3 x^2 + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2p_2 + 6p_3 x + \ldots$$

Inlocuind în ecuaţia dată şi identificând valorile coeficienţilor se obţin formule de recurenţă pentru determinarea valorilor $p_1, p_2 \ldots p_n$.

Trebue evident cercetat dacă desvoltarea în serie obţinută este convergentă.

Având în vedere că două dintre valorile p sunt arbitarare, soluţia generală va avea forma

$$y_0 + Ay_1 + By_2,$$

unde y_1 şi y_2 sunt două soluţii particulare obţinute prin adoptarea unor valori definite pentru cei doi coeficienţi arbitrari, iar y_0 este o soluţie particulară a ecuaţiei cu membrul al doilea.

In mod analog se rezolvă şi ecuaţiile de ordin superior.

Pe această cale se pot determina soluţiile următoarelor ecuaţii importante:

— *Ecuaţia lui Gauss*

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\right]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta x = 0$$

a cărei soluţie este

$$y = AF(\alpha, \beta, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \ \beta + 1 - \gamma, \ 2 - \gamma, x),$$

unde A şi B sunt constante arbitrare iar

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots$$

este seria hipergeometrică.

— *Ecuaţia lui Legendre*

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

n fiind un număr întreg. Soluţia ei este

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x),$$

unde $P_n(x)$ şi $Q_n(x)$ sunt funcţiile lui Legendre de prima şi a doua speţă.

— *Ecuaţia Bessel*

$$x^2 \frac{d y^2}{d^2 x} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad (n \text{ constant})$$

a cărei soluţie generală este

$$y = Z_n(x) = AJ_n(x) + BN_n(x)$$

A și B fiind constante arbitrare, iar J_n, respectiv N_n sunt funcțiile Bessel de prima și a doua speță.

89. Sisteme de ecuații diferențiale. Sistemele de ecuații diferențiale de ordinul I, cu o singură variabilă independentă x și n variabile dependente y, pot fi puse sub forma:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2 \ldots y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2 \ldots y_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n).$$

La această formă pot fi aduse toate sistemele de n ecuații diferențiale cu n variabile. Dacă, de exemplu, figurează și derivata a doua $\frac{d^2y_i}{dx^2}$, se introduce o nouă variabilă dependentă y_{n+1}, prin ecuația $\frac{d^2y_i}{dx^2} = y_{n+1}$, obținându-se un sistem de $n+1$ ecuații cu $n+1$ variabile dependente,

Soluția generală este

$$F_1(x, y_1, \ldots y_n, \quad c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$$

$$F_2(x_1 y_1, \ldots y_n, \quad c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_n(x, y_1, \ldots y_n, \quad c_1, c_2, \ldots c_n) = 0,$$

unde $c_1, c_2 \ldots c_n$ sunt n constante arbitrare.

Ecuațiile precedente pot fi scrise și sub forma

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{X_1}{X} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{X_2}{X} \ldots \frac{dy_n}{dx} = \frac{X_n}{X}$$

sau

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{X_1} = \frac{dy_2}{X_2} = \ldots = \frac{dy_n}{X_n},$$

unde $X, X_1, X_2, \ldots$ sunt funcții de $x, y_1, y_2 \ldots y_n$.

Soluțiile mai pot fi scrise și sub forma:

$$\varphi_1(x, y_1, y_2 \ldots y_n) = c_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(x, y_1, y_2 \ldots y_n) = c_n.$$

Orice funcție $F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_n \ldots)$ este deasemenea o soluție a sistemului, deci:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2 + \ldots = 0$$

sau

$$\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial y_1} X_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} X_2 + \ldots = 0,$$

de unde rezultă că o ecuație cu derivate parțiale de ordinul I se poate reduce la un sistem de ecuații diferențiale comune.

90. **Sisteme de ecuații diferențiale omogene liniare de primul ordin cu coeficienți constanți:**

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots a_{1n} y_n$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots a_{2n} y_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots a_{nn} y_n.$$

Făcând substituția:

$$y_1 = b_1 e^{\lambda x} \quad y_2 = b_2 e^{\lambda x} \ldots y_n = b_n e^{\lambda x},$$

sistemul devine

$$\begin{aligned} b_1 \lambda &= a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \ldots a_{1n} b_n \\ b_2 \lambda &= a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \ldots a_{2n} b_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n \lambda &= a_{n1} b_1 + a_{n2} b_2 + \ldots a_{nn} b_n \end{aligned} \qquad (90.1)$$

Pentru ca acest sistem să aibă soluții $b_i \neq 0$ este necesar ca determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând această ecuație, de gradul n în λ, se obțin cele n rădăcini $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, conducând la soluțiile:

$$y_1 = c_1 b_{11} e^{\lambda_1 x} + c_2 b_{12} e^{\lambda_2 x} + \ldots c_n b_{1n} e^{\lambda_n x}$$

$$y_2 = c_1 b_{21} e^{\lambda_1 x} + c_2 b_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots c_n b_{2n} e^{\lambda_n x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = c_1 b_{n1} e^{\lambda_1 x} + c_2 b_{n2} e^{\lambda_2 x} \ldots + c_n b_{nn} e^{\lambda_n x},$$

unde $c_1, c_2 \ldots c_n$ sunt constante arbitrare.

Valorile b_{ik} se obţin prin rezolvarea sistemului (90.1), înlocuind pe λ succesiv cu $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$.

In cazul rădăcinilor multiple de un ordin m se aplică formula

$$y_k = (\alpha_k + \beta_k x \dots \mu_k x^m)\, e^{\lambda_k x},$$

91. **Ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul I.** Ecuaţiile în care derivatele parţiale apar sub formă liniară:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

pot fi aduse la forma

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Dacă $u(x, y, z) = a$ şi $v(x, y, z) = b$ sunt două integrale independente ale acestui sistem, atunci $\varphi(u, v) = 0$ este o soluţie a ecuaţiei date, φ fiind o funcţie arbitrară.

Cazuri particulare

— Dacă $\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ sau $F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, fără ca variabilele să figureze în mod explicit, soluţia generală este

$$z = ax + by + c \quad \text{unde} \quad F(a, b) = 0 \quad \text{sau} \quad b = f(a)$$

adică

$$z = ax + y\, f(a) + c.$$

In adevăr

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(a).$$

Inlocuind în ecuaţia dată se obţine $f(a) = f(a)$.

— Dacă $F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, fără ca variabilele să apară în mod explicit, se ia $\xi = x + ay$ şi $z = z(\xi)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Insă

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = a.$$

Deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{d\xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{dz}{d\xi}.$$

Ecuaţia dată devine $F\left(z, \frac{dz}{d\xi}, a\frac{dz}{d\xi}\right) = 0$ sau $\frac{dz}{d\xi} = f(z, a)$, adică o ecuaţie diferenţială comună,

$$x + ay = \int \frac{dz}{f(z, a)} = \Psi(z, a).$$

— Dacă $f\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = F\left(y, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, se ia

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x, a) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_2(y, a)$$

ale căror integrale sunt respectiv

$$z = \Psi_1(x, a) + c_1 \quad (c_1 \text{ independent de } x)$$

$$z = \Psi_2(y, a) + c_2 \quad (c_2 \text{ independent de } y)$$

Soluţia generală este

$$z = \Psi_1(x, a) + \Psi_2(y, a) + C.$$

— Dacă $z = \frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y + f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, soluţia generală este

$$z = ax + by + f(a, b).$$

92. **Ecuaţiile cu derivate parţiale liniare de ordinul II** au forma

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x} + 2S\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V$$

unde R, S, T, V sunt funcţii de x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

— Dacă R, S, T, V sunt funcţii numai de x şi y, ecuaţiile pot fi aduse la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad (\text{tip eliptic}) \quad \begin{vmatrix} R & S \\ S & T \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad (\text{tip hiperbolic}) \quad \begin{vmatrix} R & S \\ S & T \end{vmatrix} < 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad (\text{tip parabolic}) \quad \begin{vmatrix} R & S \\ S & T \end{vmatrix} = 0$$

— Dacă coeficienţii sunt constanţi şi membrul al doilea lipseşte, adică

$$A_0\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A_1\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

se notează:

$$\frac{\partial}{\partial x} = p, \; \frac{\partial}{\partial y} = q;$$

ecuaţia ia forma

$$(A_0 p^2 + A_1 pq + A_2 q^2)\, z = 0,$$

care se descompune în

$$(a_1 p + b_1 q)(a_2 p + b_2 q)\, z = 0,$$

adică

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{și} \quad a_2 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

care au ca soluții

$$z = F_1 (a_1 y - b_1 x),$$

$$z = F_2 (a_2 y - b_2 x),$$

F_1 și F_2 fiind funcții arbitrare.

Soluția generală este:

$$z = F_1 (a_1 y - b_1 x) + F_2 (a_2 y - b_2 x).$$

Aceeași metodă se aplică și în cazul ecuațiilor liniare omogene de ordinul n cu coeficienți constanți

Exemple: Ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0 \text{ [(ecuația coardelor vibrante)]}$$

are ca soluție

$$z = F_2(x) + F_2(y).$$

— Ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ (ecuația undelor)}$$

se reduce făcând substituția

$$u = x + at \quad , \quad v = x - at;$$

la ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

care are ca soluție

$$z = F_1 (x + at) + F_2 (x - at).$$

— Pentru spațiul cu 3 dimensiuni, ecuația undelor are forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

sau, mai simplu

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Orice funcție $f(\xi)$, continuu diferențiabilă de două ori, dă o soluție a ecuației undelor, dacă ξ este o expresie lineară de forma

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z \pm at,$$

cu condiția ca

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

In adevăr

$$\Delta u = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f''(\xi) = f''(\xi),$$

iar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(\xi),$$

adică ecuația dată este verificată.

Dacă p este distanța dela punctul (x,y,z) la planul $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, se știe că

$$p = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Din expresia:

$$u = f(p \pm at)$$

rezultă că în toate punctele unui plan situat la distanța p de planul $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ și paralel cu acesta, mărimea propagată, care este reprezentată prin u, are aceiași valoare la un moment dat.

Deci mărimea este propagată în spațiu astfel încât planurile paralele cu $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, sunt suprafețe în care această mărime (sau proprietate) este constantă, viteza de propagare fiind a, iar direcția perpendiculară pe aceste planuri.

Un caz deosebit de frecvent este acela în care mărimea propagată variază periodic cu timpul.

Dacă pulsația este ω, fenomenul poate fi reprezentat prin

$$u = e^{jk(\alpha x + \beta y + \gamma z)} e^{j\omega t},$$

unde k reprezintă valoarea inversă a lungimii de undă

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{a}$$

93. **Metoda separării variabilelor** se întrebuințează adeseori pentru a reduce o ecuație liniară cu derivate parțiale la ecuații diferențiale comune. In acest scop se încearcă să se determine o soluție particulară de forma:

$$U = f_1(x) f_2(y) f_3(z), \tag{93.2}$$

unde U este funcția căutată, iar x, y, z sunt variabilele independente.

Soluția ca și forma ecuației depinde de alegerea coordonatelor (carteziene, cilindrice, sferice, etc.).

Prin substituția soluției (93.2) în ecuația dată, se poate uneori ca ea să fie adusă la forma

$$F_1\left(x, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right) + F_2\left(y, z, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

adică ecuația să fie descompusă în doi termeni dintre care primul nu depinde decât de x, iar al doilea numai de restul variabilelor.

Rezultă

$$F_1 = - F_2 = \text{const.}$$

Prima ecuație $F_1 = \text{const.}$, este o ecuație diferențială comună.

Pentru a doua ecuație $F_2 = \text{const.}$, se încearcă aplicarea în continuare a aceleiași metode.

Prin această metodă se găsesc soluții pentru ecuații care joacă un rol fundamental în electricitate:

Ecuația lui Laplace: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ sau $\Delta U = 0$;

Ecuațiile lui Maxwell, care pot fi aduse la forma $\Delta U + \lambda^2 U = 0$.

Ecuația lui Poisson: $\Delta U = f(x, y, z)$; Astfel:

(α) $\Delta U = 0$ în *coordonate carteziene*: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$

Dacă se face substituția

$$U(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z),$$

se capătă o ecuație de forma

$$\frac{1}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{1}{f_3} \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} = 0.$$

Punând

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + l^2 f_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + m^2 f_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} + n^2 f_3 = 0,$$

unde l, m, n, sunt constante arbitrare (reale sau imaginare), legate prin relaţia

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0,$$

se obţine ca soluţie particulară

$$U = e^{(lx+my+nz)}.$$

(β) *Ecuaţia* $\Delta U + \lambda^2 U = 0$ *în coordonate carteziene:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \lambda^2 U = 0$$

Soluţie particulară:

$$U = e^{(lx+my+nz)}$$

cu condiţia $l^2 + m^2 + n^2 = \lambda^2$.

Aceeaşi ecuaţie, în *coordonate cilindrice* ρ, φ, z ia forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \lambda^2 U = 0.$$

Punând $U = f_1(\rho)\, f_2(\varphi)\, f_3(z)$ şi înlocuind în ecuaţie se obţine:

$$\frac{f_1''}{f} + \frac{f_1'}{\rho f_1} + \frac{1}{\rho^2}\frac{f_2''}{f_2} + \frac{f_3''}{f_3} + \lambda^2 = 0.$$

Rezultă:

$$\frac{f_3''}{f_3} = -l^2, \quad f_3 = e^{\pm jlz},$$

$$\frac{f_2''}{f_2} = -m^2, \quad f_2 = e^{\pm jm\varphi},$$

$$\frac{f_1''}{f_1} + \frac{f_1'}{\rho f_1} - \frac{m^2}{\rho^2} - l^2 + \lambda^2 = 0,$$

ultima fiind o ecuaţie de tipul Bessel, a cărei soluţie este $f_1 = Z_m\left(\rho\sqrt{\lambda^2 - l^2}\right)$.

Rezultă deci

$$U = e^{\pm j(lz \pm m\varphi)} Z_m\left(\rho\sqrt{\lambda^2 - l^2}\right),$$

în care l şi m sunt constante arbitrare.

Alte soluţii particulare sunt:

$$\frac{\partial U}{\partial l}, \quad \frac{\partial U}{\partial m}, \quad \text{etc...}$$

(γ) *Ecuaţiile lui Maxwell* (în vid):

$$\text{rot}\, \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{rot}\, \vec{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0,$$

se reduc la rezolvarea unei ecuaţii de tipul $\Delta U + \lambda^2 U = 0$.

In adevăr, eliminând pe $\vec{H}$ între aceste ecuaţii se obţine

$$c\, \text{rot rot}\, \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Ţinând seama de relaţia vectorială

$$\text{rot rot}\, \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad div}\, \vec{A}$$

şi de faptul că:

$$\text{div}\, \vec{E} = 0,$$

se obţine:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

In acelaşi fel se obţine:

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Rezultă că fiecare dintre vectorii $\vec{H}$ şi $\vec{E}$ satisfac ecuaţia undelor. Dacă se admite că sunt funcţii sinusoidale de timp

$$U(x, y, z, t) = e^{j\lambda ct}\, U(x, y, z)$$

ecuaţiile iau forma

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0$$

(δ) *Ecuaţia lui Poisson*:

$$\Delta U = f(x, y, z)$$

are ca soluţie particulară

$$V = \int_\tau \frac{f(x, y, z)}{4\pi l}\, d\tau \qquad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

unde $d\tau$ este elementul de volum, iar x_1, y_1, z_1 sunt coordonatele punctului pentru care se caută valoarea funcţiei U, integrala ecuaţiei de mai sus.

Diferenţa $(U - V)$ va fi integrala generală a ecuaţiei

$$\Delta (U - V) = 0.$$

Soluţionarea ecuaţiei a fost redusă la ecuaţia lui Laplace.

Soluţia particulară V reprezintă potenţialul scalar al unei repartiţii de sarcini electrice de densitate $\frac{f(x, y, z)}{4\pi}$.

I. Calculul operaţional

94. **Definiţie.** *Operatorii* sunt simboluri de calcul. Aplicaţi asupra unei funcţii, ei o transformă într'o altă funcţie după o lege determinată. Subcapitolul de faţă tratează operatorii şi calculul operaţional conceput de Heaviside, precum şi analiza având la bază transformarea lui Laplace (Carson).

95. **Operatorul diferenţial** p, aplicat asupra unei funcţii $f(t)$, conduce la:

$$p f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t),$$

adică la derivata funcţiei în raport cu variabila t.

Prin aplicarea succesivă a operatorului p se obţine

$$p^2 f(t) = f''(t),$$

$$p^3 f(t) = f^{(3)}(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

Dacă a este constantă, potrivit regulilor de derivare a unui produs

$$p a f(t) = a p f(t),$$

adică un factor constant a poate fi scos sau introdus după voe sub semnul operatorului diferenţial.

In mod analog, este evident că:

$$p[\varphi(t) + \psi(t) + \ldots] = p\varphi(t) + p\psi(t) + \ldots$$

adică operatorul diferenţial respectă legea distributivă.

Legea rămâne valabilă şi pentru celelalte derivări succesive.

Dacă coeficienţii $c_0, c_1, \ldots c_r$ sunt constanţi, operatorul

$$F(p) = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots c_{n-1} p + c_n,$$

aplicat asupra funcţiei $f(t)$, va da rezultatul:

$$F(p) f(t) = c_0 f^{(n)}(t) + c_1 f^{(n-1)}(t) + \ldots c_{n-1} f'(t) + c_n f(t).$$

Operatorul $F(p)$ este în acest caz un *operator diferenţial liniar* de ordinul n ($c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$).

Prin aplicarea succesivă asupra funcţiei $f(t)$ a doi (sau mai mulţi) operatori liniari cu coeficienţi constanţi, $F(p)$ (ordinul n) şi $G(p)$ (ordinul m), m şi n fiind numere întregi oarecare, se obţine:

$$F_n(p)\, G_m(p) = G_m(p)\, F_n(p)$$

adică, în acest caz, operatorii respectă legea comutativă. Legea se menţine oricare ar fi numărul operatorilor liniari.

Dacă prin aplicarea a doi operatori $F(p)$ şi $H(p)$, de acelaşi ordin n, asupra unei funcţii $f(t)$, aceasta rămâne neschimbată, adică

$$F_n(p)\, H_n(p)\, f(t) = f(t),$$

se poate scrie

$$F_n(p)\, H_n(p) = 1;$$

în acest caz, operatorul $H_n(p)$ este *inversul* operatorului $F_n(t)$.

Acelaşi lucru poate fi scris şi sub forma:

$$F_n(p) \cdot \frac{1}{F_n(p)} = F_n(p) \cdot H_n(p) = 1$$

adică

$$H(p) = \frac{1}{F(p)} = F^{-1}(p).$$

Fie ecuaţia diferenţială neomogenă cu coeficienţi constanţi

$$c_0 \varphi^{(n)}(t) + c_1 \varphi^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n \varphi(t) = P(t). \quad (95.1)$$

Ea poate fi socotită ca rezultatul aplicării operatorului

$$F(p) = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots + c_n$$

asupra funcţiei necunoscute φ, adică

$$(c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots + c_n)\, \varphi(t) = P(t)$$

sau

$$F(p)\, \varphi(t) = P(t)$$

de unde:

$$\varphi(t) = \frac{P(t)}{F(p)} = F^{-1}(p)\, P(t). \quad (95.2)$$

Ecuaţia

$$\varphi(t) = F^{-1}(p)\, P(t)$$

poate fi socotită ca o soluţie, sub formă operaţională, a ecuaţiei diferenţiale date.

Pentru a găsi soluţia acestei ecuaţii sub forma sa reală, este necesar să se stabilească o expresie a operatorului $F^{-1}(p)$ care, aplicată asupra funcţiei $P(t)$, să permită ridicarea din nou la funcţia de variabilă t, constituind soluţia în termeni reali a ecuaţiei diferenţiale date.

Ca exemplu, fie ecuaţia diferenţială cu coeficienţi constanţi a şi b:

$$\frac{d\varphi}{dt} - a\varphi = bt^2,$$

care sub formă operaţională se poate scrie

$$(p - a)\,\varphi = bt^2$$

sau

$$\varphi = \frac{bt^2}{p - a}.$$

Problema se reduce la găsirea expresiei explicite a operatorului $\frac{1}{p-a}$ care să permită aplicarea lui, după regulile cunoscute, asupra funcţiei $P(t) = bt^2$.

Desvoltând în serie, expresia $\frac{1}{p-a}$, se obţine:

$$\frac{1}{p-a} = -\frac{1}{(a-p)} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{p}{a}} = -\frac{1}{a}\left(1+\frac{p}{a}+\frac{p^2}{a^2}+\dots\right).$$

Noua formă a operatorului $\frac{1}{p-a}$ se reduce la un operator diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi. Aplicând regulile cunoscute se obţine:

$$-\frac{1}{a}\left(1+\frac{p}{a}+\frac{p^2}{a^2}+\dots\right)bt^2 = -\frac{b}{a}\left(t^2+\frac{2t}{a}+\frac{2}{a^2}\right),$$

care constitue o integrală particulară a ecuaţiei date.

In general, dacă operatorul $F^{-1}(p)$ poate fi desvoltat în serie după puterile crescătoare ale lui p

$$F^{-1}(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 \dots = \sum_{1}^{\infty} c_n p^n \qquad (95.3)$$

se va găsi pentru ecuaţia diferenţială (95.1), integrala sub formă simbolică

$$\varphi = F^{-1}(p)\,P(t) = \sum_{0}^{\infty} c_n p^n\,P(t),$$

care permite găsirea integralei în funcţie de t.

Procedând în acelaşi fel ca şi în exemplul precedent, se pot obţine rezultatele aplicării operatorului $F(p)$ asupra unei funcţii $f(t)$, pentru diferite cazuri întâlnite mai des în practică.

Astfel dacă:

$$F(p^2) = c_0 + c_1 p^2 + c_2 (p^2)^2 \dots \quad \text{şi} \quad f(t) = \sin(\omega t + A)$$

se obţine

$$F(p^2)\,f(t) = F(p^2)\sin(\omega t + A) = F(-\omega^2)\sin(\omega t + A)$$

şi similar

$$F(p^2)\,f(t) = F(p^2)\cos(\omega t + A) = F(-\omega^2)\cos(\omega t + A) \qquad (95.4)$$

In mod analog, dacă: $f(t) = e^{\pm\omega t}$

$$F(p^2)\,f(t) = F(p^2)\,e^{\pm\omega t} = F(\omega^2)\,e^{\pm\omega t} \qquad (95.5)$$

96. **Legea de translaţie a lui Heaviside.** Fie expresia $e^{\omega t} f(t)$ asupra căreia se aplică succesiv operatorul p:

$$\left.\begin{aligned} p\,e^{\omega t} f(t) &= e^{\omega t}\,p\,f(t) + e^{\omega t}\,\omega\,f(t) = e^{\omega t}(p+\omega)\,f(t) \\ p^2 e^{\omega t} f(t) &= e^{\omega t}\,\omega\,(p+\omega).f(t) + e^{\omega t}\,p\,(p+\omega)\,f(t) = \\ &= e^{\omega t}(p+\omega)^2 f(t) \end{aligned}\right\} \qquad (96.6)$$

şi în general

$$p^n e^{\omega t} f(t) = e^{\omega t}(p+\omega)^n f(t)$$

unde coeficienţii expresiei $(p+\omega)^n$ sunt coeficienţi binomiali C_n^k.

Dacă se consideră acum un operator $F(p)$, care se poate desvolta după puterile crescătoare ale lui p

$$F(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots = \sum_{0}^{\infty} c_n p^n,$$

se obţine, ţinând seamă de (96.6)

$$F(p)\,e^{\omega t} f(t) = e^{\omega t} F(p+\omega)\,f(t). \qquad (96.7)$$

In mod analog

$$F(p)\,e^{-\omega t} f(t) = e^{-\omega t} F(p-\omega)\,f(t). \qquad (96.8)$$

Rezultă deci că aplicarea operatorului $F(p)$ asupra unei funcţii de forma $e^{\pm\omega t} f(t)$, permite scoaterea de sub simbolul operator a factorului $e^{\pm\omega t}$, cu condiţia înlocuirii operatorului p prin $(p+\omega)$, respectiv prin $(p-\omega)$.

Operaţia reciprocă este deasemenea valabilă. In adevăr, înlocuind în formulele (96.7) şi (96.8) $p+\omega$ respectiv $p-\omega$ prin p, se obţine

$$e^{\omega t} F(p)\,f(t) = F(p-\omega)\,e^{\omega t} f(t) \qquad (96.9)$$

$$e^{-\omega t} F(p)\,f(t) = F(p+\omega)\,e^{-\omega t} f(t). \qquad (96.10)$$

Aceste formule reprezintă *legea de translaţie a lui Heaviside.*

97. **Operatorul integral al lui Heaviside** este

$$p^{-1} f(t) = \int_0 dt\,f(t) \qquad (97.1)$$

cu condiţia ca pentru $t = 0$, $f(0) = 0$. Această condiţie este esenţială şi arată că dacă variabila t este timpul, iar $f(t)$ reprezintă o forţă introdusă în sistemul studiat (forţă electromotoare, etc.), ea trebue să fi fost nulă în toate momentele anterioare lui $t = 0$. Aceeaşi condiţie este necesară pentru ca operatorii p şi p^{-1} să fie comutativi. In adevăr

$$p^{-1}\,p\,f(t) = \int_0^t dt\,\frac{d}{dt} f(t) = f(t) - f(0)$$

$$p\,p^{-1} f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t dt\,f(t) = f(t)$$

Deci

$$(p\,p^{-1} - p^{-1}\,p)\,f(t) = f(0).$$

În integrări succesive se obține:

$$p^{-2}f(t) = \frac{1}{p^2}f(t) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}f(t)\right] = \int_0^t dt \int_0^t dt\, f(t)$$

sau

$$\frac{1}{p^2}f(t) = \int_0^t (t-\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

și în general :

$$\frac{1}{p^n}f(t) = \int_0^t d\xi \int_0^\xi d\,\xi_1 \ldots \int_0^{\xi_{n-2}} f(\xi_{n-1})\, d\xi^{n-1} = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi)\, d\,\xi \qquad (97.2)$$

Operatorul integral aplicat asupra unei constante dă:

$$\frac{1}{p}a = at.$$

In particular, dacă $a = 1$:

$$\frac{1}{p}\cdot 1 = t\,;\ \frac{1}{p^2}\cdot 1 = \frac{t^2}{2!}\,;\ \ldots\ \frac{1}{p^n}\cdot 1 = \frac{t^n}{n!}.$$

In cele ce urmează se va suprima în general factorul 1, fiind totdeauna subînțeles, atunci când nu se va face o mențiune specială, că operatorul se aplică factorului unitate.

Se poate deci scrie

$$\frac{1}{p} = t;\ \frac{1}{p^2} = \frac{t^2}{2!}\ \ldots\ \frac{1}{p^n} = \frac{t^n}{n!}. \qquad (97.3)$$

Presupunând, analog cu formula (95.3), că operatorul F (p) poate fi desvoltat în serie după puterile descrescătoare ale lui p

$$F(p) = \sum c_n\, p^{-n},$$

se va obține, ținând seama de (97.3)

$$F(p).\,1 = F(p) = \sum c_n \frac{t^n}{n!}. \qquad (97.4)$$

Considerând, ca exemplu, operatorul

$$F(p) = \frac{1}{1-\omega p^{-1}} = \frac{1}{1-\dfrac{\omega}{p}},$$

a cărui desvoltare după puterile descrescătoare ale lui p este

$$F(p) = 1 + \frac{\omega}{p} + \frac{\omega^2}{p^2} \cdots = \sum_0^\infty \omega^n\, p^{-n}$$

și aplicându-l asupra factorului 1, se obține:

$$F(p)\cdot 1 = \sum_0^n \frac{\omega^n\, t^n}{n!} = e^{\omega t},$$

adică

$$\frac{p}{p-\omega}\cdot 1 = e^{\omega t} \qquad (97.5)$$

In mod analog, înlocuind pe ω prin $-\omega$

$$\frac{p}{p+\omega}\cdot 1 = e^{-\omega t} \qquad (97.6)$$

adică: $e^{\pm\omega t}$ este rezultatul aplicării operatorului $F(p) = \dfrac{p}{p \mp \omega}$ asupra «factorului 1».

98. **Metoda generală a calculului operațional, după Heaviside,** constă în stabilirea și rezolvarea unei ecuații de forma

$$F(p)\, f(t) = A(t)$$

In această ecuație $f(t)$ este funcția de timp reprezentând «forța» exterioară introdusă, care acționează asupra sistemului, iar $A(t)$ este funcția de timp care trebue determinată și a cărei variație caracterizează noua stare a sistemului în raport cu timpul.

Astfel, dacă forța exterioară dată $f(t)$ este o forță electromotoare, se poate cere să se calculeze variația curentului $A(t)$, ca urmare a apariției acestei forțe electromotoare.

La fel, într'un sistem mecanic, dacă $f(t)$ este forța aplicată sistemului la un anumit moment, se poate cere să se determine variația accelerației $A(t)$ sau a oricărei alte mărimi care caracterizează sistemul. Condițiile impuse sistemului pentru ca regulile calculului operațional să fie aplicabile sunt următoarele:

(α) *liniaritatea*, adică toate mărimile care caracterizează sistemul dat (curenți, tensiuni, accelerații etc.), trebue să fie legate între ele prin relații liniare. Aceste relații sunt în general ecuații diferențiale.

(β) *la momentul* $t = 0$, când se aplică forța exterioară, trebue ca sistemul să se afle în «repaus», adică energia tuturor surselor sistemului trebue să fie nulă.

Mișcarea întregului sistem se va calcula astfel începând dela momentul $t = 0$, adică dela momentul aplicării nouei forțe exterioare. Această regulă rămâne valabilă oricare ar fi numărul de forțe exterioare care s'ar aplica sistemului *în același timp*.

In adevăr, datorită liniarității sistemului, ele pot fi calculate separat, iar prin adunarea lor se obține efectul tuturor forțelor aplicate.

In cazul particular cel mai simplu, când $f(t) = 1$, adică forța exterioară introdusă la momentul $t = 0$ este egală cu unitatea

$$F(p)\cdot 1 = h(t),$$

rezolvarea sistemului se reduce la înlocuirea operatorului $\dfrac{d}{dt}$ prin p și la rezolvarea ecuației obținute în raport cu mărimea căutată $h(t)$.

Cu alte cuvinte h (t) se obţine prin aplicarea operatorului F (p) asupra factorului unitate.

E x e m p l u. Fie sistemul format de o rezistenţă R de o inductanţă L şi de o capacitate C (fig. 21). Dacă la bornele sistemului se aplică tensiunea U, între această tensiune şi curentul produs există relaţia

$$\frac{dU}{dt} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C}$$

Introducând notaţiile operaţionale

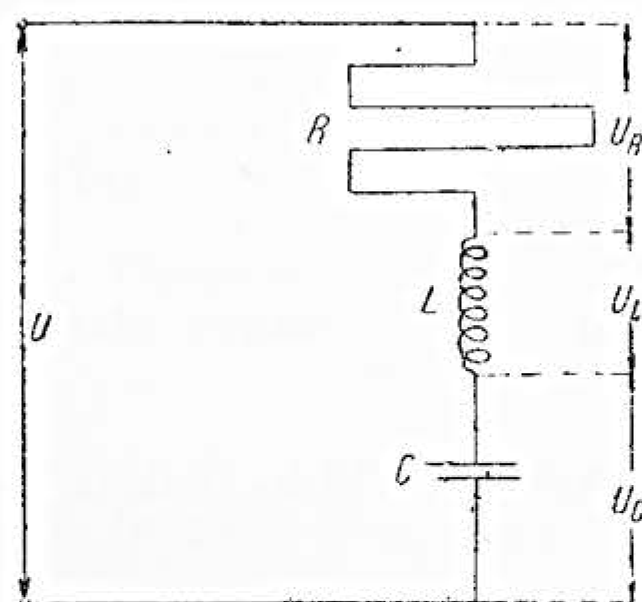


Fig. 21

$$pU = Rp \cdot I + L\,p^2I + \frac{I}{C}\,,$$

sau

$$U = I\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right),$$

unde expresia $Z\,(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ reprezintă impedanţa sub formă operaţională. Valoarea inversă a impedanţei, reprezintă admitanţa sub formă operaţională:

$$Y\,(p) = \frac{1}{Z\,(p)} = \frac{Cp}{1 + RCp + LCp^2}\,.$$

şi ajută să se scrie valoarea curentului în funcţie de tensiune sub forma

$$I = Y\,(p) \cdot U = \frac{Cp}{1 + RCp + LCp^2} \cdot U.$$

In acelaşi mod se pot determina, sub formă operaţională, şi tensiunile la bornele fiecărui element. Astfel, la bornele rezistenţei

$$U_R = RI = \frac{RCp}{1 + RCp + LCp^2} \cdot U;$$

la bornele inductanţei:

$$U_L = LpI = \frac{LCp^2}{1 + RCp + LCp^2} \cdot U;$$

la bornele capacităţii

$$U_C = \frac{I}{Cp} = \frac{1}{1 + RCp + LCp^2} \cdot U.$$

Atât I, cât şi U_R, U_L şi U_C sunt mărimi ale sistemului care pot fi determinate prin aplicarea unor operatori asupra forţei exterioare date U, introdusă în sistem la momentul $t = 0$.

Potrivit celor arătate la punctul 98, U reprezintă forţa exterioară f (t), iar celelalte mărimi I, U_R, U_L, U_C sunt funcţiile $A\,(t)$, care urmează a fi determinate.

In cazul particular $U = E.1$, unde E este o forţă electromotoare constantă, atunci

$$I = \frac{Cp}{1 + RCp + LCp^2}\,E \cdot 1 = \frac{E}{L} \cdot \frac{p}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} \cdot 1,$$

adică problema se reduce la aplicarea unui operator asupra factorului 1.

Dacă se notează cu p_1 şi p_2 rădăcinile ecuaţiei $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$,

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

unde termenul real $\alpha = \frac{R}{2L}$ reprezintă amortizarea, iar cel imaginar $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ pulsaţia oscilaţiei proprii a sistemului.

Scriind numitorul sub forma $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$, se obţine după calcule simple

$$I = \frac{E}{2Lj\omega}\left(\frac{p}{p - p_1} - \frac{p}{p - p_2}\right) \cdot 1$$

Insă din formulele (97.5) şi (97.6):

$$\frac{p}{p - p_1} \cdot 1 = e^{p_1t} \qquad \frac{p}{p - p_2} \cdot 1 = e^{p_2t}$$

şi deci

$$I = \frac{E}{2Lj\omega}\left[e^{(-\alpha+j\omega)t} - e^{(-\alpha-j\omega)t}\right]$$

sau

$$I = \frac{E}{L\omega}\,e^{-\alpha t}\,\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{E}{L\omega}\,e^{-\alpha t}\sin\omega t$$

care reprezintă o oscilaţie amortizată.

In acelaşi mod se pot determina valorile U_R, U_L, U_C etc.

99. **Teorema desvoltării a lui Heaviside.** Dacă operatorul F (p) are forma

$$\mathrm{F}\,(p) = \frac{\mathrm{U}\,(p)}{\mathrm{V}\,(p)},$$

în care V (p) este un polinom de gradul n, iar U (p) este un polinom de acelaşi grad sau de un grad mai mic, el poate fi desvoltat astfel:

$$\frac{\mathrm{U}\,(p)}{\mathrm{V}\,(p)} = \frac{\mathrm{U}\,(0)}{\mathrm{V}\,(0)} + \sum_1^n \frac{\mathrm{U}\,(a_m)}{a_m\,\mathrm{V}'\,(a_m)}\,\frac{p}{p - a_m}, \tag{99.1}$$

care constitue o identitate.

In această formulă a_1, a_2,... a_n reprezintă rădăcinile ecuaţiei V(p)=0, iar

$$\mathrm{V}'\,(a_m) = \left[\frac{d\mathrm{V}\,(p)}{dp}\right]_{p=a_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots n).$$

Aplicarea operatorului $\frac{\mathrm{U}\,(p)}{\mathrm{V}\,(p)}$ asupra factorului 1 conduce la rezultatul

$$\frac{\mathrm{U}\,(p)}{\mathrm{V}\,(p)} \cdot 1 = \frac{\mathrm{U}\,(0)}{\mathrm{V}\,(0)} + \sum_1^n \frac{\mathrm{U}\,(a_m)}{a_m\,\mathrm{V}'\,(a_m)}\,e^{a_mt}. \tag{99.2}$$

deoarece, în baza relaţiei (97.5)

$$\frac{p}{p - a_m} \cdot 1 = e^{a_mt}.$$

Relaţia (99.2) exprimă *teorema desvoltării a lui Heaviside.*

100. **Integrala lui Duhamel.** In cazul în care un operator F (p) trebue aplicat asupra unei funcţii f (t), este de realizat operaţia:

$$\mathrm{F}\,(p)\,\mathrm{f}\,(t).$$

Dacă se cunoaşte rezultatul aplicării operatorului F (p) asupra factorului 1, adică

$$\mathrm{F}\,(p) \cdot 1 = \mathrm{h}\,(t)$$

se demonstrează că

$$\mathrm{F}\,(p)\,\mathrm{f}\,(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \mathrm{h}\,(t - \xi)\,\mathrm{f}\,(\xi)\,d\,(\xi), \tag{100.1}$$

care dă rezultatul aplicării operatorului $F(p)$ asupra funcţiei $f(t)$ sub forma unei integrale (integrala lui Duhamel).

Formula (100.1) poate fi pusă şi sub forma

$$F(p)\,f(t) = h(0)\,f(t) - \int_0^t f(\xi)\frac{d}{d\xi}h(t-\xi)\,d\xi \qquad (100.2)$$

sau

$$F(p)\,f(t) = h(t)\,f(0) + \int_0^t h(t-\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi}\,d\xi \qquad (100.3)$$

E x e m p l u. Se consideră un circuit având rezistenţa R şi inductanţa L, în care se introduce forţă electromotoare E, cu condiţia iniţială $I(0) = 0$. Potrivit legii lui Ohm:

$$IR = E - L\frac{dI}{dt} \quad \text{sau} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}. \qquad (100.21)$$

Aplicând operatorul p^{-1} asupra fiecărui termen al ecuaţiei se obţine:

$$I - I(0) + \frac{RI}{pL} = \frac{E}{pL}$$

au, deoarece $I(0) = 0$

$$I\left[1 + \frac{R}{Lp}\right] = \frac{E}{pL}.$$

Notând cu:

$$\omega = -\frac{R}{L} \quad \text{şi} \quad f(t) = \frac{E}{L} \quad (L \text{ constant, prin datele problemei})$$

se obţine

$$I = \frac{1}{p}\,\frac{p}{p-\omega}\,f(t)$$

Pentru realizarea operatorului $\frac{1}{p}\,\frac{p}{p-\omega}$ se observă că $\frac{p}{p-\omega}\cdot 1 = e^{\omega t}$ şi deci $h(t) = e^{\omega t}$.

Aplicând formula (100.1) se obţine:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p-\omega}\,f(t) = \int_0^t e^{\omega(t-\xi)}\,f(\xi)\,d\xi$$

şi deci

$$I = e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega\xi}\,f(\xi)\,d\xi.$$

Dacă $E = \text{const.}$:

$$I = e^{\omega t}\frac{E}{L}\int_0^t e^{-\omega\xi}\,d\xi = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right].$$

Curentul tinde deci asimptotic către valoarea sa constantă $\frac{E}{R}$.

101. Inmulţirea a doi operatori. Dacă se consideră doi operatori $F(p)$ şi $H(p)$, care aplicaţi asupra factorului 1 dau rezultatele:

$$F(p)\,1 = h(t)$$

$$H(p)\,1 = s(t)$$

se poate obţine pe baza relaţiei (100.1)

$$F(p)\,H(p) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\xi)\,s(\xi)\,d\xi,$$

sau

$$F(p)\,H(p) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(\xi)\,s(t-\xi)\,d\xi,$$

care dă rezultatul aplicării operatorului $F(p)\cdot H(p)$ dacă se cunosc rezultatele aplicării lor separate asupra factorului 1.

Aceasta este regula de înmulţire în calculul operaţional.

102. Transformarea lui Carson (Laplace). Dacă, prin intermediul integralei lui Laplace, se consideră transformarea funcţională

$$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}\,h(t)\,dt = \mathfrak{L}\,h(t), \qquad (102.1)$$

se demonstrează că realizarea operatorului $F(p)$, aplicat asupra factorului 1, se obţine prin stabilirea funcţiei $h(t)$ din ecuaţia integrală (102.1) sau, cu alte cuvinte, funcţia $h(t)$ este rezultatul aplicării operatorului $F(p)$ asupra factorului 1.

Cu notaţiile adoptate în calculul operaţional, acest rezultat se exprimă prin

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}\,h(t) &= F(p) \\ \mathfrak{L}^{-1}\,F(p) &= h(t) \end{aligned}\right\} \qquad (102.1)$$

De exemplu

$$\mathfrak{L}^{-1}\frac{1}{p^n} = \frac{t^n}{n!}$$

exprimă rezultatul aplicării operatorului $\frac{1}{p^n}$ asupra factorului 1. $F(p)$ poartă numele de *imagine* a funcţiei $h(t)$, care este *originalul*.

In general, funcţia $h(t)$ trebue să împlinească următoarele condiţii:

— să fie integrabilă în intervalul finit dintre două valori pozitive ale variabilei

— integrala $\int_\alpha^\beta h(t)\,dt$ să tindă către o limită, atunci când $\alpha \to 0$

— integrala $\int_0^\infty e^{-pt}\,h(t)\,dt$ să fie limita integralei $\int_\alpha^\beta e^{-pt}\,h(t)\,dt$ dacă, $\alpha \to 0$ şi $\beta \to \infty$.

Pentru obţinerea directă a funcţiei originale $h(t)$ se întrebuinţează formula de inversiune a lui Mellin-Fourier sau Wagner-Bromwich:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}\,F(p)}{p}\,dp = \mathfrak{L}^{-1}\,F(p).$$

In loc ca funcţia $h(t)$ să fie definită implicit prin ecuaţia integrală (102.1), formula de mai sus permite determinarea ei directă prin integrarea în lungul unui contur simplu, în planul complex al variabilei p.

De exemplu, pentru a determina originalul expresiei $\frac{1}{p^n}$, formula de inversiune dă:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}}\,dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt}\,F(p)\,dp.$$

Singularitățile funcției $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}}$ sunt un pol multiplu în origine. Integrarea se face pe conturul unui cerc infinit mic înconjurând originea.

Desvoltând în serie expresia e^{pt} se obține:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_c \left[1 + pt + \frac{p^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{p^n t^n}{n!}\right]\frac{dp}{p^{n+1}}.$$

Valoarea integralei, egală cu reziduul pentru $p = 0$, este coeficientul lui $\frac{1}{p}$, adică

$$h(t) = \frac{t^n}{n!}.$$

Integrala lui Carson și formula de inversiune constitue un instrument foarte eficace pentru obținerea fie a imaginilor, fie a originalelor.

103. Reguli de calcul cu transformarea lui Carson.

— *Adunarea.* Dacă

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \ldots h_n(t),$$

ținând seamă că

$$\mathfrak{L}h(t) = p\int_0^\infty e^{-pt}\,h(t)\,dt = F(p)$$

este un operator liniar, se obține

$$\mathfrak{L}h(t) = \mathfrak{L}\sum h_i(t) = \sum \mathfrak{L}h_i(t) = \sum F_i(p) = F(p),$$

unde

$$F_i(p) = \mathfrak{L}h_i(t).$$

— *Diferențierea și integrarea în raport cu un parametru.*

Dacă $h(t)$ este o funcție de t și de un alt parametru, atunci și operatorul $F(p)$ va depinde de acest parametru adică

$$\mathfrak{L}h(t, \lambda) = p\int_0^\infty e^{-pt}\,h(t, \lambda)\,dt = F(p, \lambda).$$

Se demonstrează că

$$\mathfrak{L}\frac{d}{d\lambda}h(t, \lambda) = \frac{d}{d\lambda}F(p, \lambda).$$

Ca exemplu se consideră din nou formula

$$\mathfrak{L}e^{-\omega t} = \frac{p}{p+\omega}.$$

Dacă se diferențiază de $(n-1)$ ori în raport cu parametrul ω se obține

$$\mathfrak{L}(-t)^{n-1}\,e^{-\omega t} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,p}{(p+\omega)^n}$$

sau

$$\mathfrak{L}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\omega t} = \frac{p}{(p+\omega)^n}.$$

In mod analog se obține

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{L}\,h(t, \lambda)\,d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(p, \lambda)\,d\lambda.$$

— Dacă în integrala lui Carson se înlocuește t prin $\frac{t}{k}$, se obține

$$\mathfrak{L}\,h\left(\frac{t}{k}\right) = p\int_0^\infty e^{-pt}\,h\left(\frac{t}{k}\right)dt = kp\int_0^\infty e^{-pk\left(\frac{t}{k}\right)}\,h\left(\frac{t}{k}\right)d\left(\frac{t}{k}\right) = F(pk)$$

adică

$$\mathfrak{L}h\left(\frac{t}{k}\right) = F(pk). \qquad (103.1)$$

Rezultă că valorilor mici ale lui t, le corespund valori mari ale lui p.

— *Diferențierea în raport cu t.*

$$\mathfrak{L}\frac{dh}{dt} = p\int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{dh}{dt}\,dt.$$

Integrând prin părți

$$\mathfrak{L}\frac{dh}{dt} = -p\,h(0) + p\,\mathfrak{L}\,h(t).$$

Aplicând același procedeu de n ori

$$\mathfrak{L}\frac{d^2h}{dt^2} = -ph'(0) - p^2\,h(0) + p^2\,\mathfrak{L}\,h(t)$$

$$\mathfrak{L}\frac{d^nh}{dt^n} = -[ph^{n-1}(0) + p^2h^{n-2}(0) + \ldots\ p^nh(0)] + p^n\,\mathfrak{L}h(t) \qquad (103.2)$$

După Heaviside, dacă

$$\mathfrak{L}h(t) = F(p)\cdot 1$$

se obține

$$\frac{d^n}{dt^n}h(t) = p^n\,F(p)\cdot 1. \qquad (103.3)$$

Regula (103.2) coincide cu (103.3) numai dacă funcția $h(t)$ și primele $(n-1)$ derivate sunt nule pentru $t = 0$.

Se verifică deci că metoda lui Heaviside se aplică numai în cazul în care sistemul se află în repaus în momentul aplicării forței exterioare.

In mod analog se obține:

$$\mathfrak{L}Q^n \mathrm{h}(t) = \frac{1}{p^n}\mathfrak{L}\mathrm{h}(t), \qquad (103.4)$$

unde

$$Q^n \mathrm{h}(t) = \int_0^t d\xi \int_0^t d\xi_1 \ldots \int_0^{\xi_{n-2}} \mathrm{h}(\xi_{n-1})\, d\xi_{n-1},$$

regulă care coincide cu aceea a lui Heaviside, dată de formula (97.2), adică pentru $\mathrm{h}(t) = \mathrm{F}(p).1$:

$$Q^n \mathrm{h}(t) = \frac{1}{p^n}\mathrm{F}(p)\, 1$$

Din formulele (103.3) și (103.4) se vede că derivările și integrările funcției $\mathrm{h}(t)$ se traduc prin operații algebrice ale imaginei $\mathrm{F}(p)$. Aceasta explică marile simplificări aduse de calculul operațional.

In general, transformarea lui Carson (Laplace) a permis o fundare matematică riguroasă a calculului operațional conceput de Heaviside, care avea un caracter formal.

In afară de faptul că se pot separa cazurile în care calculul operațional nu este aplicabil, el poate fi extins și asupra sistemelor care inițial nu se află în stare de „repaus". Formula (103.2) arată clar acest lucru.

104. **Calculul unor operatori exponențiali.** Se consideră operatorii de forma $e^{\frac{1}{p}}$, e^{-p} etc. Dacă $\mathrm{F}(p) = e^{-\frac{1}{p}}$, se poate scrie:

$$\mathrm{F}(p).\,1 = \mathrm{F}(p) = e^{-\frac{1}{p}}$$

Ținând seamă că

$$e^{-\frac{1}{p}} = 1 - \frac{p^{-1}}{1!} + \frac{p^{-2}}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} p^{-n} \ldots$$

se obține în baza formulelor cunoscute

$$\mathfrak{L}^{-1} e^{-\frac{1}{p}} = 1 - \frac{t}{(1!)} + \frac{t^2}{(2!)^2} - \ldots (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2}$$

adică

$$\mathfrak{L}^{-1} e^{-\frac{1}{p}} = J_0(2\sqrt{t})$$

unde J_0 este funcția lui Bessel de ordinul 0.

La fel se obține:

$$\mathfrak{L}^{-1}\frac{a}{p} e^{-\frac{a}{p}} = \sqrt{\frac{t}{a}}\, J_1(2\sqrt{at}) \qquad J_1 = -\frac{dJ_0(x)}{dx}$$

unde a este un parametru pozitiv, iar J este funcția lui Bessel de ordinul I.

In general, dacă funcția $\mathrm{f}(t)$ îndeplinește condițiile de desfășurare în serie Taylor

$$\mathrm{f}(t+a) = \mathrm{f}(t) + \frac{a}{1}\mathrm{f}'(t) + \ldots = \sum_0^{\infty} \frac{a^n}{n!}\mathrm{f}^{(n)}(t),$$

se poate scrie:

$$\mathrm{f}(t+a) = \mathrm{f}(t) + \frac{ap}{1}\mathrm{f}(t) + \frac{a^2p^2}{2!}\mathrm{f}(t)\ldots = \sum_0^{\infty}\frac{a^n p^n}{n!}\mathrm{f}(t).$$

Insă

$$e^{ap} = 1 + \frac{ap}{1!} + \ldots = \sum \frac{a^n p^n}{n!}$$

și deci

$$e^{ap}\,\mathrm{f}(t) = \mathrm{f}(t+a)$$

La fel:

$$e^{-ap}\,\mathrm{f}(t) = \mathrm{f}(t-a).$$

105. **Calculul unor operatori singulari.** Pentru realizarea operatorilor de forma $\sqrt{p} = p^{\frac{1}{2}}$ se consideră integrala definită:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

unde se face substituția $x = \sqrt{tp}$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-tp}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{t}}\, dt.$$

Inmulțind ambii membri cu $2\sqrt{\frac{p}{\pi}}$, se obține

$$\sqrt{p} = p\int_0^{\infty} e^{-tp}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, dt.$$

In baza transformării lui Carson rezultă:

$$\mathrm{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

adică

$$\mathfrak{L}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \sqrt{p} \quad \text{sau} \quad \mathfrak{L}^{-1}\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

La fel se obține

$$\mathfrak{L}^{-1} p^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mathfrak{L}^{-1} p^{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\sqrt{p}\; e^{-a\sqrt{p}} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

106. **Concluzii.** Calculul operațional are numeroase aplicații în studiul fenomenelor electrice și în special al regimurilor tranzitorii, în rezolvarea ecuațiilor diferențiale, a ecuațiilor integrale, în calculul unor integrale nedefinite, etc.

Etapele de lucru sunt, în general, următoarele:

a) Stabilirea relaţiilor dintre mărimile căutate şi cele date (de cele mai multe ori, ecuaţii diferenţiale), variabilă independentă fiind t;

b) Aplicarea transformării $\mathfrak{L}$ asupra relaţiilor obţinute, trecând astfel la variabila independentă p.

c) Calculul mărimilor căutate (astfel transformate), care este aproape întotdeauna mai simplu decât rezolvarea directă a relaţiilor prevăzute la punctul a).

d) Aplicarea transformări $\mathfrak{L}^{-1}$ şi deci revenirea la variabila independentă t.

Rezultatele transformării lui Carson

$$\mathfrak{L}\mathrm{h}(t) = p\int_0^{\infty} \mathrm{h}(t)\, e^{-pt} = \mathrm{F}(p)$$

şi ale reciprocei ei $\mathfrak{L}^{-1}\,\mathrm{F}(p) = \mathrm{h}(t)$ sunt date, pentru cazurile cele mai des întâlnite în practică, în tabela care urmează. Unele speţe au fost întâlnite în expunerea precedentă.

Tabela originalelor şi a imaginilor uzuale

(Transformarea lui Carson) *)

$\mathrm{h}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\,\mathrm{F}(p)$	$\mathrm{F}(p) = \mathfrak{L}\mathrm{h}(t)$	Observaţiuni
1	1	
t	$\frac{1}{p}$	
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^n}$	
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{p}$	
$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	

*) Unii autori întrebuinţează transformarea lui Laplace:

$$\mathrm{f}(p) = \int_0^{\infty} \mathrm{h}(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

în locul transformării lui Carson

$$\mathrm{F}(p) = p\int_0^{\infty} \mathrm{h}(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Intre cele două transformări există relaţia

$$p\mathrm{f}(p) = \mathrm{F}(p),$$

trecerea dela o transformare la alta fiind deci foarte simplă. In expunerea de faţă s'a folosit transformarea lui Carson. Transformarea lui Laplace este utilizată în Capitolul III.

(urmare)

$\mathrm{h}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\,\mathrm{F}(p)$	$\mathrm{F}(p) = \mathfrak{L}\mathrm{h}(t)$	Observaţiuni
$e^{\pm\omega t}$	$\frac{p}{p \mp \omega}$	
$\frac{1}{\omega}(1 - e^{-\omega t})$	$\frac{1}{p + \omega}$	
$\frac{1}{\omega}(e^{\omega t} - 1)$	$\frac{1}{p - \omega}$	
$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p^2}{p^2 - \omega^2}$	
$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{p\omega}{p^2 - \omega^2}$	
$\cos \omega t$	$\frac{p^2}{p^2 + \omega^2}$	
$\sin \omega t$	$\frac{p\omega}{p^2 \mp \omega^2}$	
$e^{-bt}\cos \omega t$	$\frac{p(p + b)}{(p \mp b)^2 + \omega^2}$	
$e^{-bt}\sin \omega t$	$\frac{p\omega}{(p \mp b)^2 + \omega^2}$	
$te^{-\omega t}$	$\frac{p}{(p + \omega)^2}$	
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\omega t}$	$\frac{p}{(p \mp \omega)^n}$	
$\frac{e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}}{p_2 - p_1}$	$\frac{p}{(p \mp p_1)(p + p_2)}$	
$J_0(at)$	$\frac{p}{\sqrt{p^2 + a^2}}$	
$J_0\sqrt{t^2 - \xi^2}$	$\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}e^{-\xi\sqrt{p^2+1}}$	$\mathrm{h}(t) = 0$ pentru $t <$
$J_0(2\sqrt{t})$	$e^{-\frac{1}{p}}$	
$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$	$p^{-n}e^{-\frac{1}{p}}$	
$\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{\frac{a^2}{4t}}}{t\sqrt{t}}$	$p\,e^{=a\sqrt{p}}$	

(urmare)

$h(t) = \mathfrak{L}^{-1} H(p)$	$F(p) = \mathfrak{L} h(t)$	Observaţiuni
$1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$e^{-a\sqrt{p}}$	$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2} du$ (integrala lui Gauss)
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\sqrt{p}\, e^{-a\sqrt{p}}$	
$1 + e^t (\Phi\sqrt{t} - 1)$	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$	
$e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{p}{1+\sqrt{p}}$	
$e^t (1 - \Phi\sqrt{t})$	$\frac{\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}$	
$1 + 2e^t (\Phi\sqrt{t} - 1)$	$\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}$	
$1 + (1-2t) e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{(1+\sqrt{p})^2}$	
$(-1-2t) e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{p}{(1+\sqrt{p})^2}$	
$2t e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^2}$	
$1 - 8t e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) - \frac{8\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{(1-\sqrt{p})^2}{(1+\sqrt{p})^2}$	
$1 + (1 - t + 2t^2) e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} (1 - t)$	$\frac{1}{(1+\sqrt{p})^3}$	
$(3t + 2t^2) e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} (1 + t)$	$\frac{p}{(1+\sqrt{p})^3}$	
$(-t - 2t^2) e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) - \frac{2t\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^3}$	
$(-1 - 5t - 2t^2) e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} (2 + t)$	$\frac{p\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^3}$	

(urmare)

$h(t) = \mathfrak{L}^{-1} F(p)$	$F(p) = \mathfrak{L} h(t)$	Observaţiuni
$1 + (2 + 16t + 16t^2) e^t (\Phi\sqrt{t} - 1) + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} (4 + 8t)$	$\left(\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\right)^3$	
$e^{a\lambda + \lambda^2 t}\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + \lambda\sqrt{t}\right)\right] \equiv \psi(t)$	$\frac{\sqrt{p}}{\lambda+\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	
$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - \lambda\psi(t)$	$\frac{p}{\lambda+\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	
$1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) - \psi(t)$	$\frac{\lambda}{\lambda+\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	
$2t \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - (a + 2\lambda t)\psi(t)$	$\frac{\sqrt{p}}{(\lambda+\sqrt{p})^2} e^{-a\sqrt{p}}$	$h(t) = -\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$
$-2\lambda t \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} + (1 + a\lambda + 2\lambda^2 t)\psi(t)$	$\frac{p}{(\lambda+\sqrt{p})^2} e^{-a\sqrt{p}}$	$h(t) = \frac{\partial^2\psi}{\partial a\, \partial\lambda}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \times H_{n-1}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$(\sqrt{p})^n e^{-a\sqrt{p}}$	$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ (polinomul lui Hermite de ordinul n)
$e^{-\omega t} L_n(\omega t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^n}{n!} e^{-\omega t}\right]$	$\left(\frac{p}{p+\omega}\right)^{n+1}$	$L_n(\omega t) = e^{\omega t} \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^n}{n!} e^{-\omega t}\right]$ (polinomul lui Laguerre)
$L_n(\omega t) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu \frac{(\omega t)^\nu}{\nu!}$	$\left(\frac{p-\omega}{p}\right)^n$	
$e^{-\omega t} L_n(2\omega t)$	$\frac{p}{p+\omega}\left(\frac{p-\omega}{p+\omega}\right)^n$	
$\omega\int^t e^{-\omega\xi} L_n(2\omega\xi)\, d\xi$	$\frac{\omega}{p+\omega}\left(\frac{p-\omega}{p+\omega}\right)^n$	

(urmare)

$h(t) = \mathfrak{L}^{-1} F(p)$	$F(p) = \mathfrak{L} h(t)$	Observațiuni
$\left[1 + \omega \int_0^t dt\right] e^{-\omega t} L_n(2\omega t)$ $\left[1 - \omega \int_0^t dt\right] e^{-\omega t} L_{n-1}(2\omega t)$	$\left(\dfrac{p-\omega}{p+\omega}\right)^n$	
$E_n(\omega t) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \dfrac{(\omega t)^n}{\nu!}$	$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \left(\dfrac{\omega}{p}\right)^\nu = \dfrac{1-\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{\omega}{p}}$	
$1 - e^{-\omega t} E_n(\omega t)$	$\left(\dfrac{\omega}{p+\omega}\right)^{n+1}$	
$\dfrac{\cos \omega t - \cos nt}{n^2 - \omega^2}$	$\dfrac{p^2}{(p^2+n^2)(p^2+\omega^2)}$	
$-\dfrac{1}{2} \omega t \sin \omega t$	$\dfrac{p^2 \omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	
$\dfrac{1}{n^2}(1 - \cos nt)$	$\dfrac{1}{p^2+n^2}$	

K. Calculul vectorial *)

a) Algebra vectorială

107. Definiții. Un *scalar* este o mărime caracterizată printr'o singură indicație numerică. De exemplu, temperatura, masa, sarcina electrică, etc.

O mărime care înafară de valoarea sa numerică se caracterizează și prin orientarea sa se numește *vector*. De exemplu, forța, viteza, etc.

Valoarea numerică a unui vector $|\vec{a}| = a$ se numește *modulul* vectorului. In funcție de punctul de aplicație, vectorii se împart în 3 categorii:

— Vectori *liberi* sunt acei vectori care au mărimea și orientarea dată, însă punctul de aplicație arbitrar. De exemplu: un cuplu.

— Vectori *alunecători* sau *glisanți* având mărimea și orientarea date, însă punctul de aplicație arbitrar ales pe o dreaptă dată: dreapta suport. De exemplu: o forță.

— Vectorii *legați* sunt acei vectori care au fixate: mărimea, orientarea și punctul de aplicație. De exemplu un câmp vectorial constitue un câmp de vectori legați.

Pentru definirea analitică a unui vector în spațiu sunt necesare:

pentru vectorii liberi 3 mărimi: *proiecțiile* pe axele de coordonate;

*) In acest capitol de teorie generală, reprezentarea vectorilor s'a făcut prin bararea cu o săgeată. In capitolele următoare, la aplicarea acestui calcul mărimilor electrotehnice având proprietăți similare vectorilor, s'a folosit bararea cu linioară. Ambele notări sunt admise de STAS.

pentru vectorii glisanți 5 mărimi: *proiecțiile* pe axe și *direcția* dreptei-suport;

pentru vectorii legați 6 mărimi: *proiecțiile* pe axe și *coordonatele* punctului de aplicație.

Vectorul având o valoare numerică egală cu unitatea se numește *versor* sau *vector-unitate*. Vectorul unitate a unui vector are aceeași direcție și sens cu vectorul dat, modulul său fiind egal cu unitatea. Versorul unui vector $\vec{a}$ se notează cu $\vec{a}^{\circ}$ și are ca valoare $\vec{a}^{\circ} = \dfrac{\vec{a}}{a}$.

Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt egali dacă valorile lor numerice sunt egale, iar vectorii sunt paraleli și au același sens.

108. Operații cu vectori. *Produsul* unui vector $\vec{a}$ cu un scalar m este un vector $m\,\vec{a}$ având modulul ma și aceiași direcție cu vectorul $\vec{a}$. Dacă $m > 1$, vectorul are același sens cu vectorul dat; dacă $m < 1$ vectorul este de sens contrar. Operația este comutativă și distributivă adică

$$m(n\,\vec{a}) = n(m\,\vec{a}) = (mn)\,\vec{a}$$

$$(m + n)\,\vec{a} = m\,\vec{a} + n\,\vec{a}$$

m și n fiind scalari

Suma a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este diagonala paralelogramului construit pe două segmente echipolente cu vectorii dați, duse printr'un punct arbitrar O (regula paralelogramului).

O altă definiție: dintr'un punct arbitrar O se duce vectorul $\vec{a}$. Din extremitatea lui $\vec{a}$ se duce vectorul $\vec{b}$. Latura OB care închide triunghiul astfel format este suma vectorială (geometrică) a celor doi vectori (fig. 22).

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

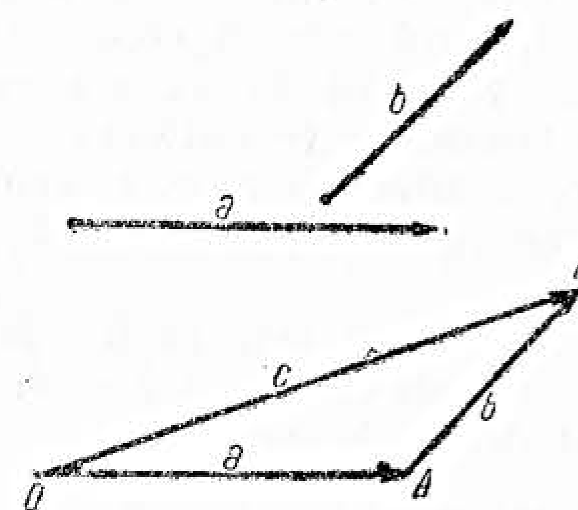


Fig. 22

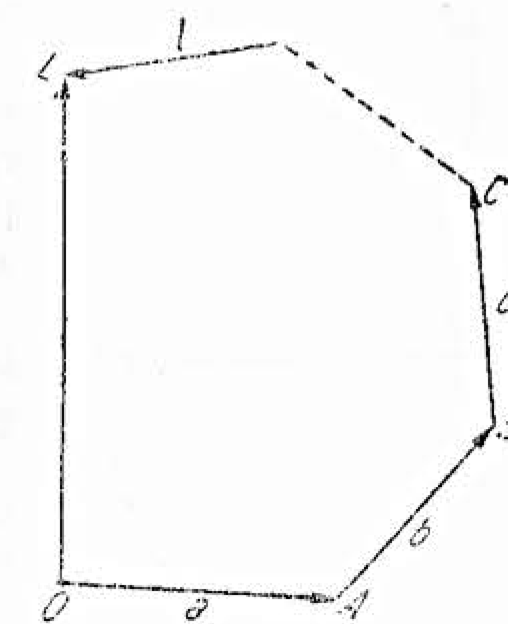


Fig. 23

Dacă se dau mai mulți vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots \vec{l}$, suma lor este egală cu rezultanta OL care închide poligonul format după regula de mai sus, de vectorii dați (fig. 23)

$$\vec{OL} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{l}$$

Operaţia adunării este asociativă şi comutativă.
Suma vectorilor daţi este independentă de alegerea punctului O. Rezultă că suma lor este un vector liber.

109. **Vectori coliniari şi coplanari.** Doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt *coliniari* dacă sunt paraleli cu aceeaşi dreaptă sau situaţi pe aceeaşi dreaptă. Intre ei există o relaţie de forma

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt *coplanari* dacă sunt paraleli cu acelaşi plan sau sunt situaţi în acelaşi plan. Intre ei există o relaţie de forma

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b},$$

unde λ şi μ sunt scalari.
Orice vector $\vec{s}$ poate fi descompus în trei vectori necoplanari $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ adică:

$$\vec{s} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c},$$

unde λ, μ şi ν sunt scalari determinaţi.
Acest mod de descompunere este unic.

110. **Proiecţia unui vector pe o axă** este egală cu mărimea vectorului înmulţită cu cosinusul unghiului format de direcţia vectorului cu direcţia axei; o axă este o dreaptă oarecare, pe care s'a definit *un anumit sens de parcurgere ca fiind pozitiv*. Rezultă:

$$a_l = a \cos \varphi = a \cos (\vec{l}, \vec{a}) = pr_l \vec{a}$$

unde $\varphi = (\vec{l}, \vec{a})$ este unghiul format de direcţia axei cu direcţia vectorului, iar a_l este proiecţia pe direcţia l a vectorului $\vec{a}$.

111. **Sensul de rotaţie** al unei axe este *pozitiv* dacă un observator culcat pe această axă în sensul ei pozitiv vede mişcarea de rotaţie efectuându-se dela dreapta la stânga sa. Sensul axei este *negativ* dacă mişcarea este contrarie.

112. **Sisteme de axe de coordonate.** Se consideră un triedru $Oxyz$ (fig. 24) axele Ox, Oy şi Oz având sensul pozitiv dela O respectiv la x, y, z.

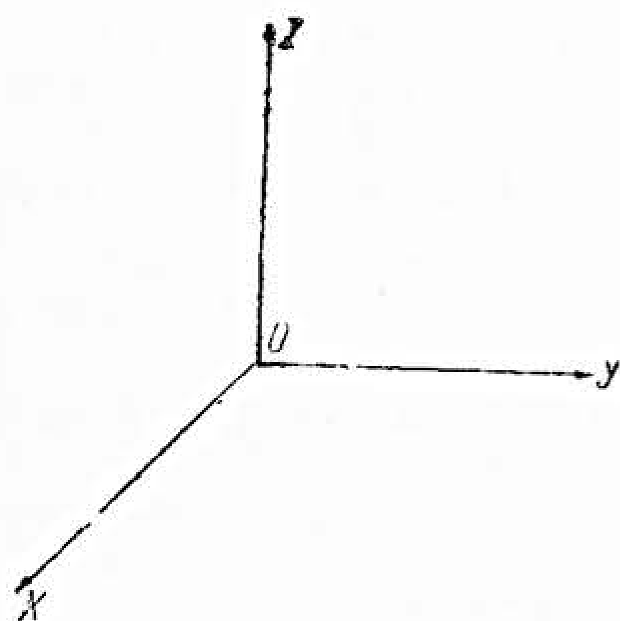


Fig. 24

Triedrul este socotit *direct* sau *drept* dacă rotaţia în jurul axei Oz, inferioară unghiului π, care aduce semiplanul xOz să coincidă cu semiplanul yOz, este pozitivă în raport cu axa Oz. In caz contrar triedrul este «stâng».

O permutare a literelor x, y, z, schimbă dispoziţia triedrului. Două *permutări* îl lasă neschimbat.

Astfel, triedrul $Oxzy$ este stâng, iar triedrul $Ozxy$ este drept. In cele ce urmează se va considera numai sistemul drept de coordonate.

113. **Componentele unui vector** $\vec{a}$ în raport cu un sistem *rectangular* de axe de coordonate sunt proiecţiile vectorului pe cele trei axe adică:

$$a_x = a \cos \alpha \quad , \quad a_y = a \cos \beta \quad , \quad a_z = a \cos \gamma,$$

unde α, β şi γ sunt unghiurile formate de direcţia vectorului $\vec{a}$ cu direcţiile pozitive ale axelor, iar a_x, a_y şi a_z sunt mărimile proiecţiilor vectorului pe cele 3 axe.

Este evident că

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

şi

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Intre cele trei cosinusuri există relaţia

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Semnul din faţa radicalului este totdeauna pozitiv.
Dacă se însemnă cu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, versorii axelor de coordonate, dirijaţi în direcţiile pozitive ale acestora (versori fundamentali), vectorul $\vec{a}$ are expresia:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Această formulă reprezintă descompunerea vectorului dat după versorii fundamentali $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

114. **Vectorul de poziţie** $\vec{r}$ este vectorul care defineşte poziţia unui punct M în raport cu un punct O, considerat ca origine (fig. 25). Se poate scrie:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

unde x, y şi z sunt coordonatele carteziene ale punctului M.
Este evident că

$$d \vec{r} = \vec{i} \, dx + \vec{j} \, dy + \vec{k} \, dz,$$

unde $d \vec{r}$ reprezintă o deplasare infinitezimală a punctului M în punctul M_1.

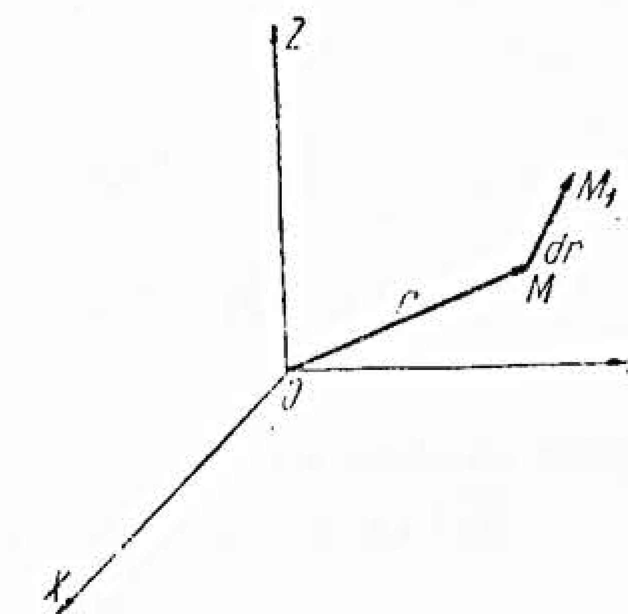


Fig. 25

115. **Produsul scalar a doi vectori** $\vec{a}$ **şi** $\vec{b}$ este o mărime scalară egală cu produsul mărimilor celor doi vectori prin cosinusul unghiului dintre ei

$$\vec{a} . \vec{b} = a b \cos (\vec{a}, \vec{b}).$$

Produsul scalar va fi notat cu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ spre deosebire de produsul vectorial care va fi notat cu $\vec{a} \times \vec{b}$.

Această definiţie este echivalentă cu: produsul scalar a doi vectori este egal cu valoarea numerică a unuia dintre ei înmulţită cu proiecţia celui de al doilea pe direcţia primului vector, adică

$$\vec{a} \; \vec{b} = a \, b_a = b a_b .$$

Expresia analitică a produsului scalar a doi vectori:

$$\vec a = a_x \vec i + a_y \vec j + a_z \vec k$$

$$\vec b = b_x \vec i + b_y \vec j + b_z \vec k$$

este

$$\vec a \, \vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

ținând seamă că $\vec i^2 = \vec j^2 = \vec k^2 = 1$, iar $\vec i \cdot \vec j = \vec j \cdot \vec k = \vec k \cdot \vec i = 0$.

Dacă

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

vectorii sunt perpendiculari.

Exemplu. Să se determine lucrul mecanic al forței $\vec f$, care se deplasează pe distanța $\vec{ds}$. Se scrie:

$$\vec f = f_x \vec i + f_x \vec j + f_z \vec k;$$

$$\vec{ds} = dx \vec i + dy \vec j + dz \vec k$$

$$\vec f \cdot \vec{ds} = f_x \, dx + f_y \, dy + f_z \, dz.$$

116. **Produsul vectorial a doi vectori** $\vec a$ și $\vec b$ este un vector egal în valoare numerică cu $ab \sin \alpha$ și perpendicular pe suprafața formată de cei doi vectori. Orientarea vectorului este astfel încât un observator situat în extremitatea lui va vedea rotația primului vector $\vec a$ către cel de al doilea vector $\vec b$ în sensul contrar acelor unui ceasornic, rotația fiind presupusă că se execută pe drumul cel mai scurt (fig. 26).

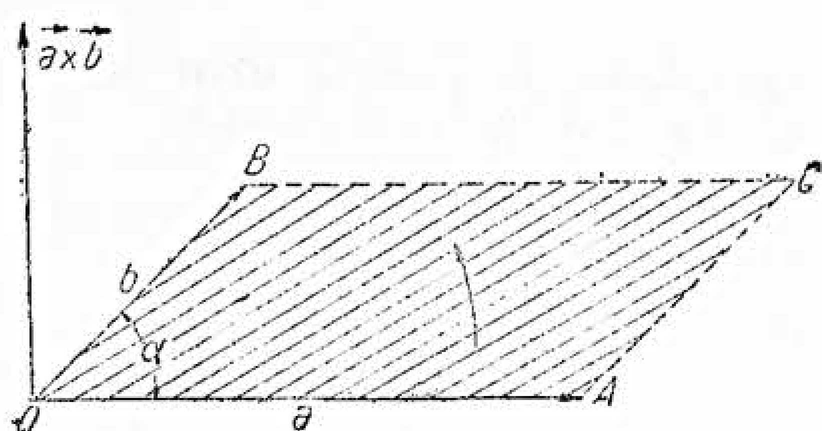


Fig. 26

Este de remarcat că valoarea $ab \sin \alpha$ este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori.

Prin schimbarea ordinei factorilor, produsul vectorial își schimbă semnul

$$\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a.$$

Este evident că

$$\vec a \times \vec a = 0.$$

Aplicând aceste reguli versorilor fundamentali:

$$\vec i \times \vec j = \vec k, \qquad \vec i \times \vec i = 0,$$

$$\vec j \times \vec k = \vec i, \qquad \vec j \times \vec j = 0,$$

$$\vec k \times \vec i = \vec j, \qquad \vec k \times \vec k = 0.$$

Expresia analitică a produsului vectorial este:

$$\vec a \times \vec b = (a_x \vec i + a_y \vec j + a_z \vec k) \times (b_x \vec i + b_y \vec j + b_z \vec k) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec i + (a_z b_x - a_x b_z) \vec j + (a_x b_y - a_y b_x) \vec k,$$

care poate fi scrisă și sub forma

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Componentele produsului vectorial sunt deci

$$(\vec a \times \vec b)_x = a_y b_z - a_z b_y,$$

$$(\vec a \times \vec b)_y = a_z b_x - a_x b_z,$$

$$(\vec a \times \vec b)_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Se verifică ușor că produsul vectorial nu este o operație asociativă, dar este distributivă în raport cu o sumă geometrică.

Exemplu. Legea lui Biot și Savart care exprimă valoarea câmpului magnetic creat de un curent I, parcurgând elementul ds al unui conductor:

$$dH = \frac{I \, ds \sin \alpha}{r^2}$$

poate fi exprimată prin produsul vectorial

$$d\vec H = \frac{I \, \vec{ds} \times \vec r}{r^3}$$

unde $\vec r$ este vectorul de poziție al punctului considerat.

117. **Produsul a trei sau mai mulți vectori.**

(α) *Produsul mixt* are forma

$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c)$$

și este egal în mărime cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori. Semnul este + sau — după cum orientarea vectorilor formează sau nu un fascicol drept.

Expresia analitică a acestui produs poate fi pusă sub forma

$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Produsul rămâne neschimbat dacă factorii se permută ciclic, adică

$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = \vec b \cdot (\vec c \times \vec a) = \vec c \cdot (\vec a \times \vec b)$$

(β) *Dublul produs vectorial*

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c)$$

este un vector perpendicular pe vectorul $\vec a$ și coplanar cu vectorii $\vec b$ și $\vec c$. Expresia lui analitică este

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix}$$

Desvoltând, se obţine rezultatul:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\ \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{a}\ \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Se verifică uşor că

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

118. **Vectori axiali şi vectori polari**. Un vector se numeşte *polar* atunci când el este independent de schimbarea sensului de rotaţie, ales ca pozitiv, al axelor de coordonate. In această categorie intră vectorii care reprezintă viteza, acceleraţia, forţa, câmpul electric, etc. Vectorii care îşi schimbă semnul, atunci când se schimbă sensul ales ca pozitiv al axelor de coordonate se numesc vectori *axiali*. In această categorie intră produsul vectorial, vectorul câmpului magnetic etc. Vectorii polari sunt singurii vectori propriuzişi.

b) Operaţii diferenţiale în raport cu un argument scalar

119. **Vectori variabili ca funcţie de argument scalar.** Un vector $\vec{a}$ este funcţie de o variabilă scalară t dacă fiecărei valori a lui t îi corespunde, după o lege determinată, una sau mai multe valori ale vectorului $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{a}(t)$$

Variabila t poate reprezenta timpul, spaţiul, etc.

De exemplu viteza, acceleraţia, câmpul electric pot fi funcţii variabile în raport cu timpul t.

$$\vec{v} = \vec{v}(t), \quad \vec{w} = \vec{w}(t), \quad \vec{E} = \vec{E}(t), \text{ etc}\ldots$$

120. **Derivata unui vector** $\vec{a}(t)$ în raport cu variabila t este limita raportului

$$\frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t},$$

atunci când creşterea Δt a variabilei tinde către 0, adică

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{i}\frac{da_x}{dt} + \vec{j}\frac{da_y}{dt} + \vec{k}\frac{da_z}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Este evident că diferenţa $\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$ trebue considerată în sens vectorial, adică diferenţa geometrică a vectorilor $\vec{a}(t + \Delta t)$ şi $\vec{a}(t)$ (fig. 27).

In acelaşi fel se definesc şi derivatele de ordin superior.

Diferenţiala unui vector variabil, funcţie de argument scalar, este produsul dintre derivata funcţiei şi diferenţiala variabilei adică

$$d\vec{a} = \vec{a}'(t)\, dt.$$

Dacă funcţiile considerate sunt continue şi derivabile, teoremele fundamentale asupra derivatei sumei, diferenţei şi produsului mai multor funcţii scalare sunt valabile şi pentru funcţiile vectoriale. Astfel:

— Derivata unei sume vectoriale

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots \vec{l}$$

este

$$\vec{s}' = \vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}' + \ldots \vec{l}'.$$

— Derivata produsului $\vec{p}(t) = f \cdot \vec{a}$ a unui vector $\vec{a}(t)$ printr'un scalar $f(t)$ va fi limita expresiei

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{(f + \Delta f)(\vec{a} + \Delta \vec{a}) - f\vec{a}}{\Delta t} = f\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} + \vec{a}\frac{\Delta f}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{a}\, \Delta f}{\Delta t}$$

adică:

$$\vec{p}' = f\vec{a}' + f'\vec{a}$$

— Derivata unui produs scalar:

$\vec{p} = \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)$ va fi:

$$\vec{p}' = \vec{a} . \vec{b}' + \vec{a}' . \vec{b}$$

— Derivata unui produs vectorial:

$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ va fi:

$$\vec{p}' = \vec{a} \times \vec{b}' + \vec{a}' \times \vec{b}$$

In acest caz ordinea factorilor nu trebue intervertită.

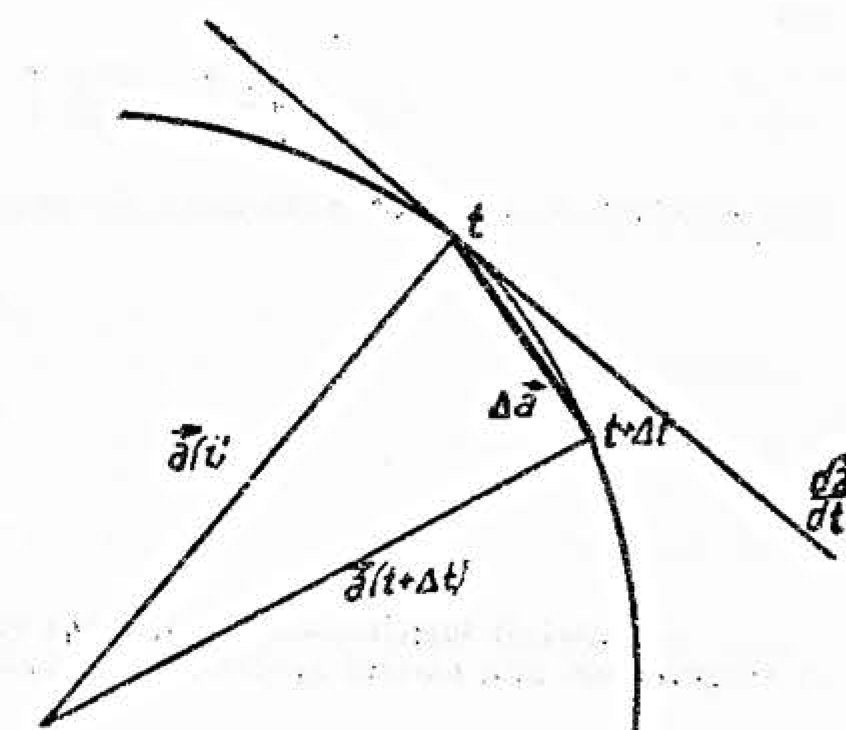


Fig. 27

— Derivata unui vector constant este nulă. Constanţa vectorului este înţeleasă în sensul că acesta îşi păstrează constante atât valoarea numerică cât şi direcţia.

— Dacă se exprimă valoarea unui vector variabil în funcţie de versorul său $\vec{a}^\circ$, atunci

$$\vec{a} = a\, \vec{a}^\circ.$$

Derivând se obţine:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}^\circ + a\frac{d\vec{a}^\circ}{dt}.$$

Formula obţinută ţine seamă atât de variaţia valorii numerice a cât şi de schimbarea direcţiei versorului $\vec{a}^\circ$.

— Dacă

$$\vec{a} = \vec{a}(u),$$

$$u = u(t),$$

atunci

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{du} \cdot \frac{du}{dt}.$$

121. Integrala unui vector variabil $\vec{a}$, în raport cu un argument scalar t, este funcția $\vec{A}(t)$ satisfăcând relația

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{a},$$

$$\vec{A} = \int \vec{a}\, dt + \vec{c} = \vec{i} \int a_x\, dt + \vec{j} \int a_y\, dt + \vec{k} \int a_z\, dt + \vec{c}$$

unde $\vec{c}$ este un vector constant.

Exemple. Dacă un punct material de masă m se mişcă sub influența unei forțe $\vec{F}$, legea mişcării punctului se exprimă sub formă vectorială prin ecuația:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

sau

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\right) = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

care conduce la ecuațiile cunoscute ale mişcării punctului material

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

— Potrivit legii lui Coulomb forța exercitată de o sarcină punctiformă q, aflată în punctul A asupra unei alte sarcini q_1 situată în punctul M, este dată de relația

$$F = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q \cdot q_1}{r^2},$$

Expresia vectorială a acestei forțe se obține înmulțind ambii membri cu versorul $\vec{r}_0$, așa că

$$\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q \cdot q_1}{r^2}\vec{r}_0.$$

Dacă se pune

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r},$$

se obține

$$\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q \cdot q_1}{r^3}\vec{r}$$

care reprezintă formula căutată. Câmpul creat în punctul M va fi

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^3}\vec{r}.$$

Lucrul mecanic dW al câmpului $\vec{E}$, atunci când punctul $M(\vec{r})$ cu sarcina $+1$ se deplasează pe distanța $\overrightarrow{MM_1} = d\vec{r}$ (fig. 28) va fi:

$$dW = \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{\varepsilon r^3}\vec{r} \cdot d\vec{r}.$$

Lucrul mecanic W se obține integrând expresia de mai sus dealungul drumului parcurs de sarcina $+1$, dela M_0 la N, adică

$$W = \int_{M_0 N} \frac{q}{\varepsilon r^3}\vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0 N} \frac{q}{\varepsilon r^3} r\, dr = \int_{M_0 N} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon r_0} - \frac{q}{\varepsilon r_1}.$$

Rezultă că lucrul mecanic al câmpului electrostatic definit mai sus nu depinde de forma traectoriei ci numai de distanțele r_0 și r_1 (inițială, respectiv finală) dela punctul A care creează acest câmp.

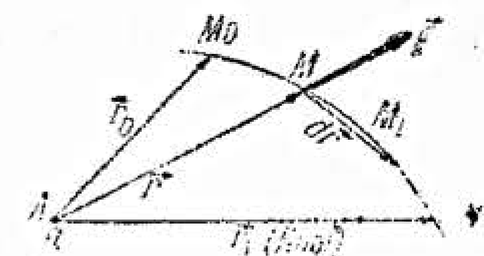


Fig. 28.

Dacă punctul N se deplasează la infinit, atunci

$$W = \int_{M_0}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{\varepsilon r_0}.$$

Valoarea $\frac{q}{\varepsilon r_0}$ se numește *potențialul câmpului electrostatic* în punctul M_0.

c) Câmpuri scalare

122. Funcția de punct. Dacă într'un domeniu D se dă o funcție $\varphi(x, y, z)$ perfect determinată în fiecare punct al domeniului dat, ea se numește *funcție de punct.*

Dacă valoarea funcției în fiecare punct al domeniului este scalară, ea este o *funcție scalară de punct.*

Dacă valoarea ei este un vector avem o *funcție vectorială de punct.*

In domeniul respectiv va exista un *câmp scalar*, respectiv un *câmp vectorial.*

Exemplu de câmpuri scalare: câmpul densităților electrice, al temperaturilor etc. Exemple de câmpuri vectoriale: câmpul vitezelor, al accelerațiilor, câmpul electric, etc.

Inafară de coordonatele punctului, funcția mai poate depinde de una sau mai multe alte variabile.

123. Suprafețe de nivel. Dacă se atribue funcției scalare φ o valoare constantă se obține o suprafață

$$\varphi(x, y, z) = C,$$

care este locul geometric al punctelor în care funcția păstrează aceeași valoare.

Suprafețele de acest fel, atunci când se dau constantei C diferite valori, se numesc *suprafețe de nivel* sau izostatice.

In cazul câmpului potențial

$$\frac{q}{\varepsilon r} = C$$

suprafețele de nivel (echipotențiale) sunt suprafețe sferice cu centrul în punctul în care se află sarcina q și cu raza egală cu

$$r = \frac{q}{\varepsilon C}.$$

124. Derivata unei funcții scalare în raport cu o direcție dată. Gradient. Dacă se consideră variația funcției scalare $\varphi(x, y, z)$, atunci când un punct $M(x, y, z)$ se deplasează într'un punct infinit vecin $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, situat la distanța Δs, într'o anumită direcție având versorul $\vec{s}$, limita raportului:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta s}$$

se numește derivata funcției φ în raport cu direcția $\vec{s}$.

Valoarea acestei derivate este

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma,$$

unde α, β, γ sunt unghiurile pe care versorul $\vec{s}$ le face cu axele de coordonate.

Dacă se consideră vectorul:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k},$$

care va fi numit *gradientul funcției* φ, se observă că derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ este egală cu proiecția acestui vector pe direcția versorului $\vec{s}$ adică

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{s}.$$

Fig. 29

In adevăr:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) (\cos \alpha \, \vec{i} + \cos \beta \, \vec{j} + \cos \gamma \, \vec{k}) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma.$$

Deci derivata, într'un anumit punct, a unei funcții scalare în raport cu o direcție dată, este egală cu proiecția gradientului pe direcția dată.

La o deplasare a punctului $M(x, y, z)$ în punctul $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, se obține la limită:

$$\text{grad } \varphi \cdot d\vec{M} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi.$$

De aci rezultă:

— Vectorul gradient este perpendicular pe suprafața de nivel care trece prin punctul considerat. In adevăr, pe suprafața de nivel: $d\varphi = 0$. Ca urmare, vectorii grad φ și $d\vec{M}$ sunt perpendiculari între ei.

— Vectorul gradient este independent de alegerea axelor de coordonate, adică este *un invariant al câmpului*.

125. Derivata normală Dacă se consideră normala la o suprafață oarecare trecând prin punctul M, derivata funcției φ în punctul M, în raport cu direcția acestei normale, se numește *derivata normală*. Dacă $\vec{n}$ este versorul normalei, derivata va fi egală cu grad $\varphi \cdot \vec{n}$, adică este egală cu proiecția gradientului pe normală. In cazul unei suprafețe de nivel, derivata normală este egală cu grad φ. Cea mai mare variație a funcției φ are loc când deplasarea se face în direcția normalei la suprafața de nivel, și ea este egală cu grad φ.

Exemplu. Considerând câmpul electrostatic produs de o sarcină punctiformă q situată în origină, potențialul câmpului va fi

$$V = \frac{q}{\varepsilon r},$$

unde ε este constanta dielectrică. Proiecțiile gradientului acestei funcții în punctul $M(x, y, z)$ sunt:

$$G_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad G_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad G_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Insă

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

și deci

$$G_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{\varepsilon r^2} \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

In mod analog

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Ca urmare:

$$G_x = -\frac{q}{\varepsilon} \frac{x}{r^3},$$

$$G_y = -\frac{q}{\varepsilon} \frac{y}{r^3},$$

$$G_z = -\frac{q}{\varepsilon} \frac{z}{r^3}.$$

sau

$$\text{grad } V = -\frac{q}{\varepsilon r^3} \vec{r}.$$

Insă

$$\vec{E} = \frac{q}{\varepsilon r^3} \vec{r}$$

și deci

$$\vec{E} = -\text{grad } V.$$

126. Operatorul ∇. Dacă se notează cu ∇ operatorul

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

și se aplică asupra funcției φ, se obține

$$\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi$$

adică

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi.$$

Operatorul ∇ se numește operatorul lui Hamilton și este denumit « nabla ». Se verifică ușor că:

— $\nabla(\varphi + \Psi) = \text{grad}(\varphi + \Psi) = \nabla\varphi + \nabla\Psi$

— $\nabla(\varphi \cdot \Psi) = \text{grad}(\varphi \cdot \Psi) = \varphi \text{ grad } \Psi + \Psi \text{ grad } \varphi = \varphi \nabla \Psi + \Psi \nabla \varphi$

d) Câmpuri vectoriale

127. Funcții vectoriale de punct. Dacă într'un domeniu D, fiecărui punct îi corespunde un vector $\vec{a}$, perfect determinat ca mărime și ca orientare, vectorul $\vec{a}$ este o *funcție vectorială de punct.*

Pentru definirea vectorului $\vec{a}$ este necesar să se dea proiecţiile sale pe axele de coordonate, adică valorile scalare a_x, a_y, a_z, funcţii de coordonatele x, y, z ale punctului considerat.

128. **Linii vectoriale.** Se numesc linii vectoriale liniile la care vectorul câmp este tangent în fiecare punct. Această condiţie se exprimă vectorial prin ecuaţia:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{a} = 0,$$

care arată că versorul $\frac{d\vec{r}}{ds}$ tangent la linia vectorială, trebue să coincidă ca direcţie şi sens cu vectorul $\vec{a}$ (fig. 30).

Sub formă analitică, această ecuaţie diferenţială se exprimă prin:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Fig. 30

In cazul în care se pot găsi două integrale independente,

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1$$
$$\varphi_2(x, y, z) = C_2$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare, intersecţia celor două suprafeţe reprezintă liniile vectoriale căutate.

129. **Fluxul unui vector printr'o suprafaţă.** Dacă se consideră o suprafaţă elementară ΔS în câmpul unui vector $\vec{a}$, se numeşte flux al vectorului $\vec{a}$ prin suprafaţa S expresia:

$$\Delta F = a \, \Delta S \cos(\vec{a}, \vec{n}) = \vec{a} \cdot \vec{n} \, \Delta S,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la elementul de suprafaţă ΔS, având un sens bine determinat (fig. 31).

Presupunând că elementul de suprafaţă tinde spre 0 şi extinzând această expresie la întreaga suprafaţă dată S, valoarea fluxului prin această suprafaţă va fi

$$F = \iint_S \vec{a}\,\vec{n}\, dS = \iint_S [a_x \cos(\vec{n}, x) + a_y \cos(\vec{n}, y) + a_z \cos(\vec{n}, z)]\, dS.$$

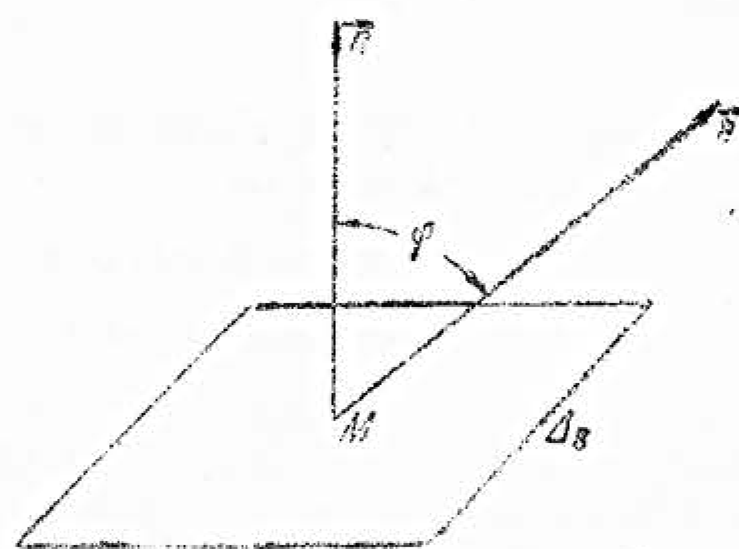


Fig. 31

In cazul în care suprafaţa este închisă, se va considera ca pozitivă direcţia normalei exterioare.

După cum $F > 0$ sau $F < 0$, în interiorul suprafeţei există «surse» respectiv «puţuri».

In cazul $F = 0$, în interiorul suprafeţei date nu sunt nici surse nici puţuri, sau, dacă există, ele se anulează reciproc.

130. **Divergenţa unui vector.** Noţiunea de *divergenţă* permite caracterizarea câmpului vectorial din punct de vedere cantitativ în fiecare punct în parte.

Prin definiţie, divergenţa unui vector $\vec{a}$ într'un punct M este (fig. 32):

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS}{\Delta V},$$

unde ΔV este elementul de volum mărginit de suprafaţa elementară ΔS care înconjoară punctul M.

Valoarea acestui raport, care este o mărime scalară, caracterizează productivitatea surselor câmpului într'un element infinitezimal de volum care înconjoară punctul considerat, valoarea respectivă fiind raportată la unitatea de volum.

Expresia divergenţei câmpului dat în coordonate carteziene este

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Divergenţa nu depinde de sistemul de referinţă, fiind deci *un invariant al câmpului.*

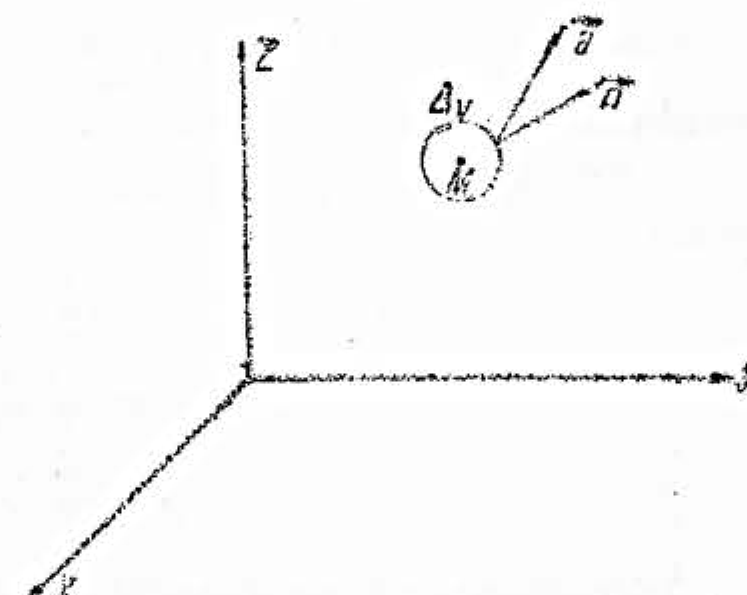


Fig. 32

Exemple. Câmpul electrostatic produs de o sarcină punctiformă situată în punctul A (a, b, c) este:

$$E_x = \frac{q}{\varepsilon}\frac{x-a}{r^3}, \quad E_y = \frac{q}{\varepsilon}\frac{y-b}{r^3}, \quad E_z = \frac{q}{\varepsilon}\frac{z-c}{r^3}.$$

Pentru calculul divergenţei se obţine:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x-a}{r^5}\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r^3} - 3\frac{(x-a)^2}{r^5}\right];$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r_3} - 3\frac{(y-b)^2}{r^5}\right];$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r^3} - 3\frac{(z-c)^2}{r^5}\right].$$

Adunând

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon}\left[\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}\right] = 0.$$

Deci divergenţa câmpului unei sarcini electrostatice este nulă. Teorema rămâne valabilă şi pentru un număr *finit* de sarcini elcetrostatice.

— Fluxul vectorului $\vec{a} = \vec{r}$, printr'o suprafaţă sferică de rază R va fi:

$$F = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S R\vec{n}^2 dS = \iint_S R\, dS = RS.$$

Deoarece $S = 4\pi R^2$,
$F = 4\pi R^3$.

Divergenţa aceluiaşi câmp va fi:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Deci divergenţa acestui câmp este constantă.

Aplicând operatorul ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

asupra vectorului

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

se obţine

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}$$

Deci divergenţa unui vector $\vec{a}$ se obţine efectuând produsul scalar dintre operatorul ∇ şi vectorul dat $\vec{a}$.

— Se obţin uşor următoarele rezultate cu privire la divergenţa unui vector:

$$\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \operatorname{div}\vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad}\varphi$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot}\vec{b}$$

Intrebuinţând operatorul ∇, aceste expresii devin:

$$\nabla(\vec{a} + \vec{b}) = \nabla\vec{a} + \nabla\vec{b}$$

$$\nabla(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\nabla\vec{a} + \vec{a}\,\nabla\varphi$$

$$\Delta(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}(\nabla \times \vec{a}) - \vec{a}(\nabla \times \vec{b})$$

In cele de mai sus, φ este o funcţie scalară.

131. Formula lui Green-Ostrogradschi exprimă egalitatea dintre fluxul vectorului $\vec{a}$ care iese dintr'o suprafaţă închisă oarecare S şi integrala divergenţei acestui vector extinsă la volumul V mărginit de această suprafaţă, adică

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\, dV.$$

Această formulă apare ca o extindere a însăşi formulei de definiţie a divergenţei, dată mai sus pentru un volum şi o suprafaţă elementară.

In coordonate carteziene:

$$\iint_S \left\{a_x \cos(\vec{n}, x) + a_y \cos(\vec{n}, y) + a_z \cos(\vec{n}, z)\right\} dS = \iiint_V \left\{\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right\} dV$$

Dacă în formula

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\, dV$$

se substitue $\vec{a} = \varphi\vec{b}$, unde φ este o funcţie scalară de punct, iar $\vec{b}$ un vector constant, se ştie că

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\varphi\vec{b} = \varphi \operatorname{div}\vec{b} + \vec{b} \operatorname{grad}\varphi.$$

Vectorul $\vec{b}$ fiind constant

$$\operatorname{div}\vec{b} = 0$$

deci

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{b} \operatorname{grad}\varphi,$$

iar formula lui Green-Ostrogradschi ia forma

$$\iint_S \varphi\vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{grad}\varphi\, dV \quad \text{(formula gradientului).}$$

Dacă în aceeaşi formulă se înlocuieşte $\vec{a}$ prin $\vec{a} \times \vec{b}$, unde $\vec{b}$ este un vector constant, atunci

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot}\vec{b} \qquad \text{(a se vedea punctul 132)}$$

Insă $\operatorname{rot}\vec{b} = 0$, deci

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot}\vec{a}.$$

Inlocuind, se va oţine:

$$\iint_S (\vec{a} \times \vec{b})\vec{n}\, ds = \vec{b} \iiint_V \operatorname{rot}\vec{a}\, dV.$$

Insă

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{n} \times \vec{a})$$

şi deci

$$\iint_S (\vec{n} \times \vec{a})\, dS = \iiint_V \operatorname{rot}\vec{a}\, dV \quad \text{(formula rotorului).}$$

Exemplu. Aplicând teorema lui Green-Ostrogradschi câmpului $\vec{a} = \vec{r}$ considerat pe o sferă de rază R, se obţine

$$\int_S \vec{r} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{r}\, dV.$$

Pe suprafaţa sferei $\vec{r} \cdot \vec{n} = R\vec{n}^2 = R$, iar $\operatorname{div}\vec{r} = 3$.

Deci:

$$4\pi R^2 \cdot R = 3V$$

adică

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Cu ajutorul acestei formule, care permite calcularea unei integrale triple atunci când se cunoaşte valoarea integralei duble şi *invers*, s'a obţinut valoarea volumului sferei, presupunând cunoscută valoarea suprafeţei.

132. Circulaţia unui vector. Rotorul. Teorema lui Stokes. Dacă într'un câmp vectorial $\vec{a}$ se consideră un contur C, integrala

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

luată dealungul conturului C poartă numele de *circulaţia* vectorului $\vec{a}$.

In cazul unui contur mărginind un element de suprafață ΔS se demonstrează că

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{l} = \left\{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\vec{n}, x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\vec{n}, y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\vec{n}, z)\right\}\Delta S,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafață, luat astfel ca sensul de parcurgere al conturului să fie direct.

Vectorul având componentele

$$R_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

$$R_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$$

$$R_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

se numește *rotorul vectorului* $\vec{a}$, iar formula precedentă poate fi scrisă

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{l} = \vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}\, dS = \mathrm{rot}_n\,\vec{a}\,.\,\Delta S$$

adică: circulația unui vector dealungul unui contur mărginind un element infinitezimal de suprafață ΔS este egal cu fluxul vectorului rot $\vec{a}$ prin acest element de suprafață.

Teorema lui Stokes extinde acest rezultat la un contur C și la o suprafață arbitrară S, sprijinindu-se pe contur:

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}\, dS = \iint_S \mathrm{rot}_n\,\vec{a}\, dS$$

adică: circulația unui vector $\vec{a}$ dealungul unui contur oarecare C este egală cu fluxul rotorului printr'o suprafață care se sprijină pe acest contur, normala $\vec{n}$ fiind luată în sens direct în raport cu sensul de parcurgere al circuitului.

Analitic, teorema lui Stokes se exprimă prin

$$\int_C a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\vec{n}, x)\ldots\right\} dS.$$

Făcând produsul vectorial dintre operatorul ∇ și vectorul $\vec{a}$:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

se obține

$$\nabla \times \vec{a} = \mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Se verifică ușor că

$$\mathrm{rot}\,(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{rot}\,\vec{a} + \mathrm{rot}\,\vec{b}$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\,\vec{a}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a} \times \mathrm{grad}\,\varphi, \quad (\varphi \text{ scalar})$$

sau sub formă simbolică

$$\nabla \times (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \times \vec{a} + \nabla \times \vec{b}$$

$$\nabla \times (\varphi\vec{a}) = \varphi(\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \times \nabla\varphi$$

133. Derivata unui vector în raport cu o direcție dată. Analog cu expresia obținută pentru o funcție scalară de punct:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma = \vec{s}\,\nabla.\varphi,$$

unde $\vec{s}$ este versorul direcției date, se obține în cazul unui vector

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial s} = \vec{s}\,\nabla\,.\,\vec{a} \quad \text{unde } \vec{s}\,\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma$$

adică

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial s} = \cos\alpha\frac{\partial\vec{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial\vec{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial\vec{a}}{\partial z},$$

In concluzie: operația $\vec{s}\,\nabla$, aplicată asupra unui vector $\vec{a}$ dă derivata acestui vector în raport cu direcția $\vec{s}$,

134. Operații diferențiale de ordinul II. In această categorie intră:

— *Câmpul scalar:*

(1) $\mathrm{div\,grad}\,\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = (\nabla\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi.$

Operatorul $\nabla^2 = \Delta$ se numește operatorul lui Laplace sau *laplacian.*

Aplicat asupra unui vector, laplacianul Δ conduce la rezultatul

$$\Delta\vec{a} = \Delta a_x\vec{i} + \Delta a_y\vec{j} + \Delta a_z\vec{k} = \vec{i}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \ldots\right.$$

(2) $\mathrm{rot\,grad}\,\varphi = \nabla \times (\nabla.\varphi) = 0.$

— *Câmpul vectorial:*

(1) $\mathrm{grad\,div}\,\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\vec{a}) = \left(\dfrac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial^2 a_x}{\partial x\,\partial y} + \ldots\right.$

(2) $\mathrm{div\,rot}\,\vec{a} = \nabla.(\nabla \times \vec{a}) = 0$

(3) $\mathrm{rot\,rot}\,\vec{a} = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \mathrm{grad\,div}\,\vec{a} - \Delta\,\vec{a}$

135. Formulele lui Green. Dacă se aplică formula lui Green-Ostrogradschi:

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV$$

asupra vectorului

$$\vec{a} = \varphi \operatorname{grad} \Psi,$$

unde φ şi Ψ sunt două funcţii scalare de punct şi observând că

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \varphi \vec{n} \operatorname{grad} \Psi = \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

şi

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \Psi) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \Psi = \\ = \varphi \Delta \Psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \Psi,$$

atunci

$$\iint_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS = \iiint_V \{ \varphi \Delta \Psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \Psi \}\, dV$$

care este *prima formulă a lui Green.*

Dacă $\Psi = \varphi$ se obţine:

$$\iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iiint_V \{ \varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2 \}\, dV.$$

Dacă $\Delta\varphi = 0$

$$\iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi)^2\, dV.$$

A doua formulă a lui Green este:

$$\iint_S \left\{ \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS = \iiint_V \{ \varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi \}\, dV.$$

Ea se obţine din prima, intervertind locurile lui φ şi Ψ şi apoi scăzând rezultatele obţinute.

136. Diferite tipuri de câmpuri. Câmpurile în care

$$\operatorname{div} \vec{a} \neq 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \neq 0,$$

sunt de formă generală.

— Câmpurile pentru care

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \neq 0,$$

se numesc *solenoidale.*

— Câmpurile pentru care

$$\operatorname{div} \vec{a} \neq 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0,$$

se numesc *irotaţionale* sau *newtoniene.*

Se demonstrează că:

— Orice vector $\vec{a}$ funcţie de punct, al cărui rotor este identic nul poate fi considerat ca gradientul unui scalar, adică se poate găsi o funcţie de punct φ astfel ca

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a_z.$$

Este evident în acest caz că $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Invers, condiţia necesară şi suficientă pentru ca un câmp vectorial să fie gradientul unui scalar φ, este ca $\operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$.

In acest caz vectorul derivă dintr'un *potenţial scalar* $V = -\varphi$ adică

$$\vec{a} = -\operatorname{grad} V,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = -\Delta V.$$

E x e m p l u : câmpul atracţiei universale, câmpul electric.

— Orice vector $\vec{a}$ a cărui divergenţă este identic nulă poate fi considerat ca rotorul unui vector, adică se poate defini un vector $\vec{A}$ îndeplinind condiţia:

$$\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Există o infinitate de vectori $\vec{A}$ împlinind această condiţie.

Dacă se impune condiţia suplimentară $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, $\vec{A}$ este *potenţialul vector* al lui $\vec{a}$.

In acest caz câmpul vectorului $\vec{a}$ se numeşte *solenoidal* sau *laplacian.*

— Un câmp vectorial oarecare poate fi considerat ca fiind suprapunerea a două câmpuri, unul newtonian şi altul laplacian.

In adevăr, fie câmpul:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}.$$

Dacă se impune condiţia $\operatorname{rot} \vec{b} = 0$ atunci $\vec{b} = \operatorname{grad} \varphi$.

Dacă se ia vectorul $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ şi se pune condiţia ca divergenţa sa să fie nulă, va trebui ca

$$\operatorname{div} \vec{c} = \operatorname{div} \vec{a} - \operatorname{div} \vec{b} = 0$$

adică

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi.$$

Alegând pe φ astfel ca $\Delta \varphi = \operatorname{div} \vec{a}$, se va obţine

$$\operatorname{div} \vec{c} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{b} = 0.$$

Rezultă că vectorul $\vec{a}$ este suma a doi vectori $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, astfel ca

$$\vec{a} = -\operatorname{grad} V + \operatorname{rot} \vec{A}$$

unde $\vec{b}$ derivă dintr'un potenţial scalar $V = -\varphi$, iar $\vec{c}$ derivă dintr'un potenţial vector $\vec{A}$.

137. Exprimarea formulelor diferențiale în coordonate curbilinii. In sistemul rectangular de coordonate carteziene, poziția fiecărui punct este determinată prin distanța sa dela planurile de coordonate.

Astfel, punctul de coordonate x_0, y_0, z_0 poate fi considerat ca fiind între-tăierea planelor

$$x = x_0 \ , \quad y = y_0 \ , \quad z = z_0 \ ,$$

primul fiind paralel cu planul yOz, al doilea cu xOz, al treilea cu xOy.

Când x_0, y_0, z_0 variază, fiecare punct al spațiului poate fi definit ca punctul de întretăiere al acestor 3 familii de plane.

In mod analog, dacă se consideră trei familii de suprafețe

$$q_1 = C_1 \qquad q_2 = C_2 \qquad q_3 = C_3$$

și dacă se dau constantelor C_1, C_2, C_3 diferite valori, se poate considera că fiecare punct al spațiului va fi definit de un grup de valori a acestor constante.

Intersecția suprafețelor $q_2 = C_2$ și $q_3 = C_3$ poate fi considerată ca linie de variație a lui q_1, după cum intersecția planelor $y = \text{const.}$ și $z = \text{const.}$ era considerată ca dreapta de variație a lui x, etc.

Liniile de variație nu vor mai fi în general drepte, ca în cazul coordonatelor carteziene, ci curbe, *formând un sistem de coordonate curbilinii*.

Intre noile coordonate q_1, q_2, q_3 și vechile coordonate x, y, z există relații de forma

$$q_1 = f_1(x, y, z), \qquad x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3),$$
$$q_2 = f_2(x, y, z), \qquad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3),$$
$$q_3 = f_3(x, y, z), \qquad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3),$$

care sunt presupuse cunoscute.

In fiecare punct q_1, q_2, q_3 se pot construi versorii fundamentali $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (fig. 33); aceștia vor fi diferiți dela un punct la altul și vor fi trangenți la liniile de coordonate q_1, q_2, q_3, formând un triedru mobil. Se vor considera numai acele sisteme de coordonate curbilinii în care versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sunt perpendiculari unul pe celălalt, adică sistemele de coordonate curbilinii ortogonale.

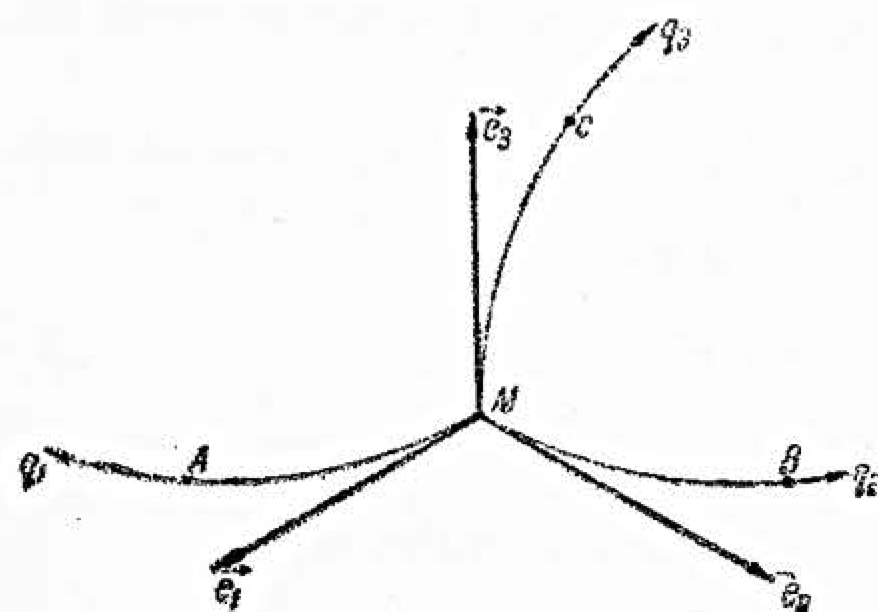


Fig. 33

Fie vectorul de poziție

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3).$$

La o variație dq_1 (q_2, q_3 constanți) deplasarea punctului M va fi $ds_1 = MA$.

In mod analog la variațiile dq_2 respectiv dq_3 deplasările punctului M vor fi $MB = ds_2$ respectiv $MC = ds_3$.

Deoarece sistemul este ortogonal:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2,$$

iar

$$dV = ds_1\, ds_2\, ds_3 ,$$

cu neglijarea infiniților mici de ordin superior.

Ținând seama că derivata vectorului $\vec{r}$ în raport cu q_1 (q_2 și q_3 constanți) este:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right| \vec{e}_1 = H_1 \vec{e}_1, \quad \text{unde} \quad H_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|$$

se obține

$$ds_1\, \vec{e}_1 = d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 = H_1\, \vec{e}_1\, dq_1,$$

adică

$$ds_1 = H_1\, dq_1 .$$

Pentru ds_2 și ds_3 se obțin expresii analoage.

Deci:

$$ds^2 = H_1^2\, dq_1^2 + H_2\, dq_2^2 + H_3\, dq_3^2$$

$$dV = H_1\, H_2\, H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 .$$

Mărimile H_1, H_2 și H_3 se numesc coeficienții lui Lamé.

Valorile lor sunt

$$H_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Utilizând aceste formule se obține:

— *Gradientul*. Dacă funcția scalară de punct este $\varphi(q_1, q_2, q_3)$,

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3 .$$

— *Divergența*. Dacă $\vec{a}(q_1, q_2, q_3)$ este câmpul vectorial dat,

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right\},$$

unde

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 ,$$

a_1, a_2, a_3 fiind funcții scalare de q_1, q_2, q_3.

— *Rotorul*:

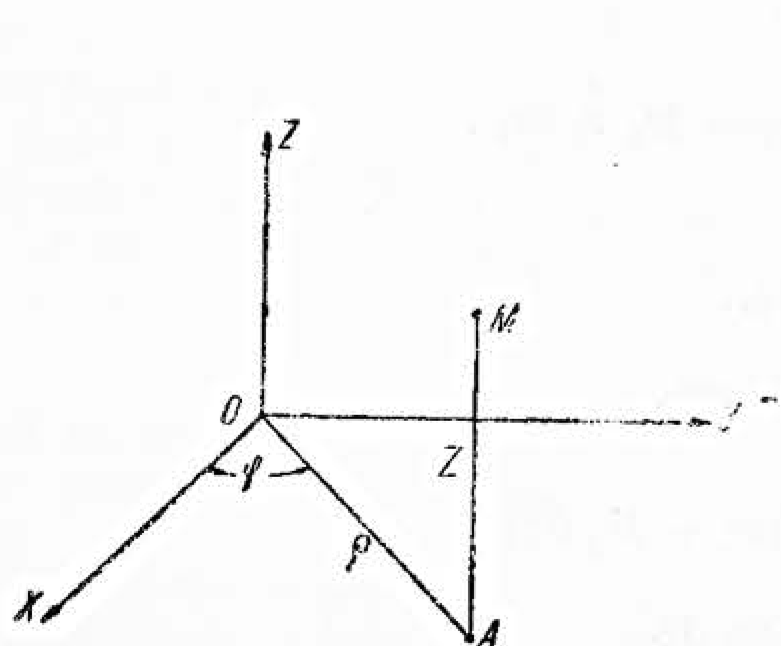
$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3}\right\}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_3 H_1}\left\{\frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_1}\right\}\vec{e}_2 +$$
$$+ \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_2}\right\}\vec{e}_3 ,$$

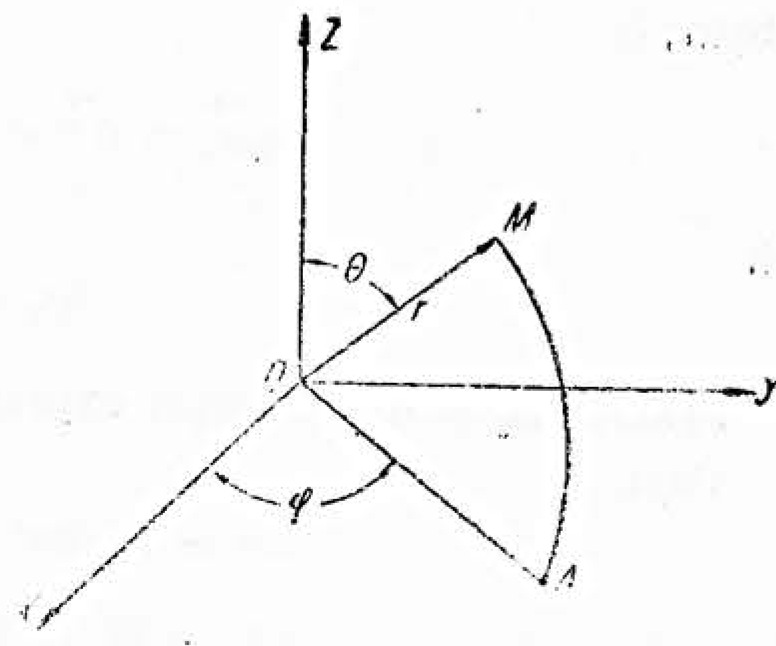
unde

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 .$$

— *Laplacianul*. Dacă $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ este funcţia scalară dată,

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{H_2H_3}{H_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{H_3H_1}{H_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\frac{H_1H_2}{H_3}\right)\right\}$$





Pentru determinarea formulelor respective atunci când se utilizează coordonatele cilindrice sau sferice se iau următoarele valori:

Coordonate cilindrice (fig. 34)	Coordonate sferice (fig. 35)
$H_\rho = 1$	$H_\theta = r$
$H_\varphi = \rho$	$H_\varphi = r \sin\theta$
$H_z = 1$	$H_r = 1$

L. Matrice. Calculul cu matrice

138. Definiţii. Un sistem de $m \times n$ numere, aşezate într'un tablou dreptunghiular format din m linii şi n coloane, constitue o matrice:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn}\end{matrix}\right\|$$

Dacă $m = n$, matricea se numeşte *patratică*.

Elementele a_{ik} pot avea diferite semnificaţii: ele pot fi coeficienţii unui sistem de ecuaţii, a unei transformări liniare, componentele unui tensor etc., iar matricea ca atare are un caracter operaţional. Intr'o matrice patratică, elementele sale pot fi elementele unui determinant.

Fie vectorul $\vec{u}$, având componentele u_1 şi u_2. Se presupune că asupra acestui vector s'a operat o transformare

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2,$$
$$v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2,$$

devenind astfel vectorul $\vec{v}$, de componente v_1 şi v_2.

Tabloul format de coeficienţii transformării

$$\|a\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\|$$

formează matricea transformării. Ea are caracterul unui operator.

Dacă asupra vectorului $\vec{v}$ se aplică o nouă transformare b, care îl transformă într'un nou vector $\vec{w}$, se obţine

$$w_1 = b_{11}v_1 + b_{12}v_2,$$
$$w_2 = b_{21}v_1 + b_{22}v_2,$$

având ca matrice a transformării

$$\|b\| = \left\|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{matrix}\right\|.$$

Pentru a trece direct dela vectorul u la vectorul w, este necesar să se aplice transformarea

$$\left\|\begin{matrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}\end{matrix}\right\|,$$

care este produsul celor două matrice $\|b\| \times \|a\|$.

Acest exemplu ilustrează modul cum matricele apar în mod firesc în cele mai simple operaţii vectoriale.

Cele arătate pentru un spaţiu cu două dimensiuni se aplică identic pentru un spaţiu cu n dimensiuni.

Pentru prescurtare matricea

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{matrix}\right\|$$

va fi notată cu $\|a_{ik}\|$ sau cu $\|a\|$.

139. Matrice egale. Două matrice sunt egale dacă atunci când sunt aplicate aceluiaşi vector $\vec{u}$ dau acelaşi rezultat

$$\|a\|\,\vec{u} = \|a'\|\,\vec{u}$$

sau

$$\sum_1^k a_{ik}u_k = \sum_1^k a'_{ik}u_k\,; \qquad i = 1, 2 \dots n.$$

Deci

$$a_{ik} = a'_{ik}\,.$$

140. Adunarea a două matrice. Suma a două matrice

$$\|a\| + \|b\|$$

este o matrice având elementele egale cu suma elementelor matricelor $\|a\|$ şi $\|b\|$.

$$\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 7 & 21 & -4 \\ 8 & -13 & -5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 24 & 3 \\ 12 & -15 & -10 \end{Vmatrix}$$

Cele două matrice trebue să aibă acelaşi număr de linii şi de coloane.

141. **Produsul unui număr cu o matrice** se obţine înmulţind fiecare element al matricei cu numărul respectiv. De exemplu:

$$8 \times \begin{Vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -24 & 32 \\ -40 & 64 \end{Vmatrix}$$

142. **Produsul a două matrice.** Elementul c_{ik} al matricei produs se obţine înmulţind fiecare element al liniei i (matricea $\|a\|$), cu elementele corespunzătoare ale coloanei k (matricea $\|b\|$) adică

$$c_{ik} = \sum_i a_{ji} b_{ik} .$$

De exemplu:

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (4 \times 2) + (2 \times -4) + (-1 \times 5) \\ (3 \times 2) + (-4 \times -4) + (6 \times 5) \\ (5 \times 2) + (2 \times -4) + (-7 \times 5) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5 \\ 52 \\ -33 \end{Vmatrix}$$

Produsul a două matrice nu este, în general, o operaţie comutativă, adică

$$\|a\| \times \|b\| \neq \|b\| \times \|a\| ,$$

însă este o operaţie asociativă adică

$$\|a\| \times \big[\|b\| \times \|c\|\big] = \big[\|a\| \times \|b\|\big] \times \|c\|$$

Dacă produsul este comutativ, matricele se numesc *permutabile*.

Un vector poate fi reprezentat printr'o matrice cu o singură linie sau o singură coloană:

$$\|u_1 \ u_2 \ldots u_n\| \quad \text{sau} \quad \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix} .$$

Produsul scalar a doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, poate astfel fi scris sub forma:

$$\|u_1 \ u_2 \ldots u_n\| \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Vmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

143. **Diverse matrice speciale.** Fiind dată o matrice de forma:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

sunt de distins următoarele cazuri speciale:

$a_{ik} = a_{ki}$ matricea se numeşte *simetrică*

$a_{ik} = -a_{ki}$ » » » *antisimetrică*.

In acest caz $a_{ii} = 0$.

$a_{11} = a_{22} = \ldots a_{nn} \neq 0$, iar toate celelalte elemente sunt nule, matricea se numeşte *diagonală*

$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$, iar toate celelalte elemente sunt nule matricea poartă numele de *matrice unitate*

$a_{ik} = 0$ pentru toate valorile lui i şi k, adică toate elementele matricei sunt nule, matricea poartă numele de *matrice zero*.

144. **Matrice transpusă.** Dacă într'o matrice se schimbă liniile şi coloanele între ele, se obţine o nouă matrice, numită *matrice transpusă*. De exemplu matricea

$$\begin{Vmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -6 \\ 4 & 11 & 3 \end{Vmatrix} \quad \text{are ca matrice transpusă} \quad \begin{Vmatrix} 8 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & 11 \\ 5 & -6 & 3 \end{Vmatrix}$$

145. **Matricea inversă.** Dacă $\vec{v} = \|a\| \vec{u}$ adică

$$v_i = \sum a_{ik} u_k , \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad (145.1)$$

se poate determina matricea care să permită trecerea dela vectorul $\vec{v}$ la vectorul $\vec{u}$; ea va avea ca elemente coeficienţii b_{lm} din relaţiile:

$$u_l = \sum b_{lm} v_m . \qquad (l = 1, 2 \ldots n)$$

Matricea $\|a\|^{-1}$ formată de coeficientul b_{lm} se numeşte *matrice inversă* a matricei $\|a\|$.

Pentru determinarea coeficienţilor b_{lm} este necesar să se rezolve sistemul de ecuaţii (145.1), în raport cu $u_1, u_2 \ldots u_n$.

După cum se ştie aceşti coeficienţi sunt egali cu

$$b_{lm} = \frac{A_{ml}}{\Delta} ,$$

unde Δ este determinantul matricei $\|a\|$, iar A_{ml} este determinantul minor corespunzând elementului a_{ml}, având semnul $(-1)^{l+m}$.

Totodată este de remarcat că minorul A_{ml} corespunde elementului b_{lm} adică se obţine din determinantul matricei transpuse a matricei $\|a\|$.

Exemplu. Pentru a calcula matricea inversă a matricei

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

se procedează astfel:

(α) se ia matricea transpusă

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{Vmatrix}$$

(β) se înlocuește fiecare element al acesteia cu valoarea minorului respectiv ținând seamă de semne

$$\begin{Vmatrix} -5 & 27 & 26 \\ -38 & 5 & 26 \\ -8 & -14 & 13 \end{Vmatrix}$$

și se împarte apoi cu $\Delta = 143$

146. **Matricea hermitică** este aceea în care elementele simetrice în raport cu diagonala principală sunt numere complexe conjugate.

De exemplu matricea

$$\begin{Vmatrix} 4 & 1-j & 2+3j \\ 1+j & 2 & -3 \\ 2-3j & -3 & -7 \end{Vmatrix}$$

este o matrice hermitică.

In general, la o matrice hermitică

$$a_{ik} = \tilde{a}_{ki}$$

unde semnul ~ indică numărul complex conjugat al elementului a_{ik}.

Elementele diagonalei principale sunt evident reale.

Produsul a două matrice hermitice este o matrice hermitică, numai dacă cele două matrice sunt permutabile.

147. **Matricea adjunctă** a unei matrice $\|a\|$ are ca elemente **conjugatele matricei transpuse.**

O matrice hermitică este propria sa adjunctă.

148. **Ecuația caracteristică a unei matrice.** Dacă transformarea reprezentată de matricea $\|a\|$, aplicată asupra unui vector $\vec{u}$, conduce la același vector $\vec{u}$ multiplicat cu o valoare scalară λ, adică

$$\|a\| \vec{u} = \lambda \vec{u}, \quad \text{unde } \vec{u} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix}$$

vectorul $\vec{u}$ este un *vector propriu* al matricei $\|a\|$, iar direcția vectorului o *direcție proprie* a matricei $\|a\|$.

Aceasta se exprimă prin ecuațiile evidente

$$(a_{11}-\lambda) u_1 + a_{12} u_2 + \dots + a_{1n} u_n = 0,$$
$$a_{21} u_1 + (a_{22}-\lambda) u_2 + \dots + a_{2n} u_n = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda) u_n = 0$$

Pentru ca acest sistem să aibă o soluție diferită de 0 este necesar ca determinantul

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Aceasta este *ecuația caracteristică* a matricei $\|a\|$. Rădăcinile ei $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda^n$ definesc valorile proprii ale vectorului $\vec{u}$, și direcțiile proprii ale acestuia. In adevăr, introducerea valorii unei rădăcini λ în sistemul de ecuații de mai sus, permite să se calculeze vectorul propriu corespunzător acestei rădăcini, adică direcția proprie respectivă.

Fie de exemplu matricea

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix},$$

având ca ecuație caracteristică

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

care are ca rădăcini 4 și 1.

Inlocuind una dintre valori, de exmplu $\lambda = 4$, în ecuațiile

$$(2-\lambda) u_1 - u_2 = 0,$$
$$-2u_1 + (3-\lambda) u_2 = 0,$$

se obține

$$-2u_1 - u_2 = 0,$$
$$-2u_1 - u_2 = 0,$$

ceeace era de așteptat, prin condiția impusă ca determinantul ecuației caracteristice să fie egal cu 0.

Insemnând $u_1 = p_1$, p_1 fiind o variabilă arbitrară, se obține $u_2 = -2p_1$.

In mod analog, pentru cealaltă rădăcină se obține $u_1 = u_2 = p_2$.

Cele două valori proprii ale vectorului $\vec{u}$ vor fi

$$p_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix}, \quad p_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Dacă matricea este raportată la direcțiile sale proprii $(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$, ea capătă forma diagonală

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

Acest lucru era de prevăzut, deoarece matricea diagonală trebue să transforme vectorul de bază $\vec{e_i}$ al axei i, în vectorul $\lambda_i \vec{e_i}$.

149. Funcţii de matrice. In general, o funcţii de matrice se poate exprima în funcţie de ecuaţia caracteristică şi de rădăcinile acesteia. In acest scop este necesar de precizat:

— Puterea unei matrice, raportată la direcţiile proprii, este

$$\| a \|^t = \begin{Vmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{Vmatrix}$$

— O matrice patratică este rădăcina ecuaţiei sale caracteristice (teorema Cayley-Hamilton), adică

$$\Delta(\| a \|) = \| 0 \|.$$

Acest rezultat este evident dacă se ţine seamă că matricea $\Delta(\| a \|)$, aplicată asupra unui vector $\vec{u}$ raportat la direcţiile proprii ale matricei $\| a \|$, conduce la componentele $\Delta(\lambda_i)\, u_i$, unde $\Delta(\lambda_i) = 0$. Având în vedere că vectorul $\vec{u}$ este oarecare, condiţia poate fi împlinită numai dacă

$$\Delta(\| a \|) = \| 0 \|$$

— Dacă

$$\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots A_0 = 0$$

este forma desvoltată a ecuaţiei caracteristice $\Delta = 0$, ţinând seamă de faptul că $\Delta(\| a \|) = \| 0 \|$, atunci

$$\| a \|^n + A_{n-1} \| a \|^{n-1} + \dots A_0 \| 1 \| = 0.$$

Se ştie însă din teoria ecuaţiilor că

$$A_{n-1} = -\sum_1^n \lambda_i$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$A_0 = \prod_1^n \lambda_i .$$

Rezultă deci că

$$\| a \|^n = -A_{n-1} \| a \|^{n-1} - \dots A_0 \| 1 \|,$$

ca şi puterile superioare $\| a \|^{n+1}$ etc., pot fi exprimate în funcţie de rădăcinile ecuaţiei caracteristice şi de puterile lui $\| a \|$ inferioare lui n.

In consecinţă, orice funcţie $f(\| a \|)$, care poate fi desvoltată într'o serie de puteri

$$f(\| a \|) = \sum_1^\infty c_i \| a \|^i$$

poate fi adusă la forma:

$$f(\| a \|) = \sum_1^n g_i \| a \|^i.$$

Pentru calculul acestor expresii se întrebuinţează:

— *Formula lui Duncan şi Collar*

$$f(\| a \|) = \sum f(\lambda_r)\, z_r ,$$

unde z_r sunt cunoscutele formule de interpolare ale lui Lagrange:

$$z_1 = \frac{(\| a \| - \lambda_2 \| 1 \|)(\| a \| - \lambda_3 \| 1 \|) \dots (\| a \| - \lambda_n \| 1 \|)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_n)}$$

$$z_2 = \frac{(\| a \| - \lambda_1 \| 1 \|)(\| a \| - \lambda_3 \| 1 \|) \dots (\| a \| - \lambda_n \| 1 \|)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \dots (\lambda_2 - \lambda_n)}$$

$$z_3 = \dots$$

— *Formula lui Baker*

$$f(\| a \|) = \frac{D_{n-1}}{D} \| a \|^{n-1} + \frac{D_{n-2}}{D} \| a \|^{n-2} + \dots \frac{D_0}{D} \| 1 \|,$$

unde

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

iar

$$D_{r-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-2} & \lambda_2^{r-2} & \dots & \lambda_n^{r-2} \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & \dots & f(\lambda_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

obţinut din determinantul precedent prin înlocuirea elementelor liniei r, prin $f(\lambda_1), f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n)$.

Fie de aplicat aceste formule asupra expresiei

$$f(\| a \|) = \| a \|^3 + 2 \| a \|^2 - 3 \| a \| + \| 1 \|,$$

în care

$$\| a \| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$$

considerată mai sus.

Valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$.

Aplicând formula lui Duncan şi Collar se găseşte:

$$f(\| a \|) = f(\lambda_1)\, z_1 + f(\lambda_2)\, z_2 ,$$

unde

$$z_1 = \frac{\|a\| - \lambda_2 \|1\|}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}}{4-1} = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}}{3},$$

$$z_2 = \frac{\|a\| - \lambda_1 \|1\|}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} - 4\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}}{1-4} = -\frac{\begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}}{3}.$$

$$f(\lambda_1) = 64 + 32 - 12 + 1 = 85,$$

$$f(\lambda_2) = 1.$$

$$f(a) = z_1 f(\lambda_1) + z_2 f(\lambda_2) = \frac{1}{3}\left\{85 \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix} - 1 \begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 29 & -28 \\ -56 & 57 \end{Vmatrix}.$$

Aplicând formula lui Baker:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(4) & f(1) \end{vmatrix}, \quad D_0 = \begin{vmatrix} f(4) & f(1) \\ 4 & 1 \end{vmatrix},$$

sau

$$D = 3, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 85 & 1 \end{vmatrix} = -84, \quad D_0 = \begin{vmatrix} 85 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 81.$$

Deci:

$$f(\|a\|) = \frac{D_1}{D}\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} + \frac{D_0}{D}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 29 & -28 \\ -56 & 57 \end{Vmatrix},$$

adică acelaşi rezultat ca şi înainte.

Verificarea se poate face şi direct din formula

$$f(\|a\|) = \|a\|^3 + 2\|a\|^2 - 3\|a\| + \|1\|;$$

în adevăr, dacă

$$\|a\| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Se obţine:

$$\|a\|^3 = \begin{Vmatrix} 22 & -21 \\ -42 & 43 \end{Vmatrix} \quad \|a\|^2 = \begin{Vmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{Vmatrix},$$

$$f(\|a\|) = \begin{Vmatrix} 22 & -21 \\ -42 & 43 \end{Vmatrix} + 2\begin{Vmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 29 & -28 \\ -56 & 57 \end{Vmatrix}.$$

Metoda poate fi aplicată în mod analog şi în cazuri mai puţin simple decât cele expuse.

150. **Derivata unei matrice** $\|a\|$ ale cărei elemente sunt funcţii de variabila x este:

$$\frac{d}{dx}\|a\| = \begin{Vmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \dots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{n1}}{dx} & \frac{da_{n2}}{dx} & \dots & \frac{da_{nn}}{dx} \end{Vmatrix},$$

adică se obţine prin derivarea fiecărui element în parte.

151. **Integrarea unei matrice** $\|a\|$

$$\int_{x_0}^{x} \|a\|\, dx = \begin{Vmatrix} \int_{x_0}^{x} a_{11}\, dx & \int_{x_0}^{x} a_{12}\, dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{1n}\, dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_0}^{x} a_{n1}\, dx & \int_{x_0}^{x} a_{n2}\, dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{nn}\, dx \end{Vmatrix}$$

se obţine prin integrarea fiecărui element în parte.

★

Teoria matricelor are aplicaţii directe în nenumărate ramuri ale matematicei şi tehnicei dintre care sunt de citat: rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, studiul cuadripolilor, mecanica quantică, etc. etc.

M. Elemente asupra tensorilor

152. **Definiţii.** Un *scalar* este definit printr'un singur număr care reprezintă valoarea sa absolută (de exemplu masa, densitatea, energia etc.). El poate fi considerat ca un *tensor de ordinul* 0.

Un *vector* este definit prin cele r componente ale sale în raport cu cele r axe de coordonate (într'un spaţiu cu r dimensiuni), fiind astfel socotit ca un *tensor de ordinul I* (forţa, viteza, acceleraţia etc.).

Un tensor de ordinul II este reprezentat în general printr'un tablou de r^2 componente, dacă r este numărul de dimensiuni ale spaţiului considerat. Intr'un spaţiu cu 3 dimensiuni numărul componentelor este de 9.

Ca exemplu de tensor de ordinul II (într'un spaţiu cu 3 dimensiuni) poate fi considerat tensorul tensiunilor într'un corp solid deformat, după cum se arată în fig. 36.

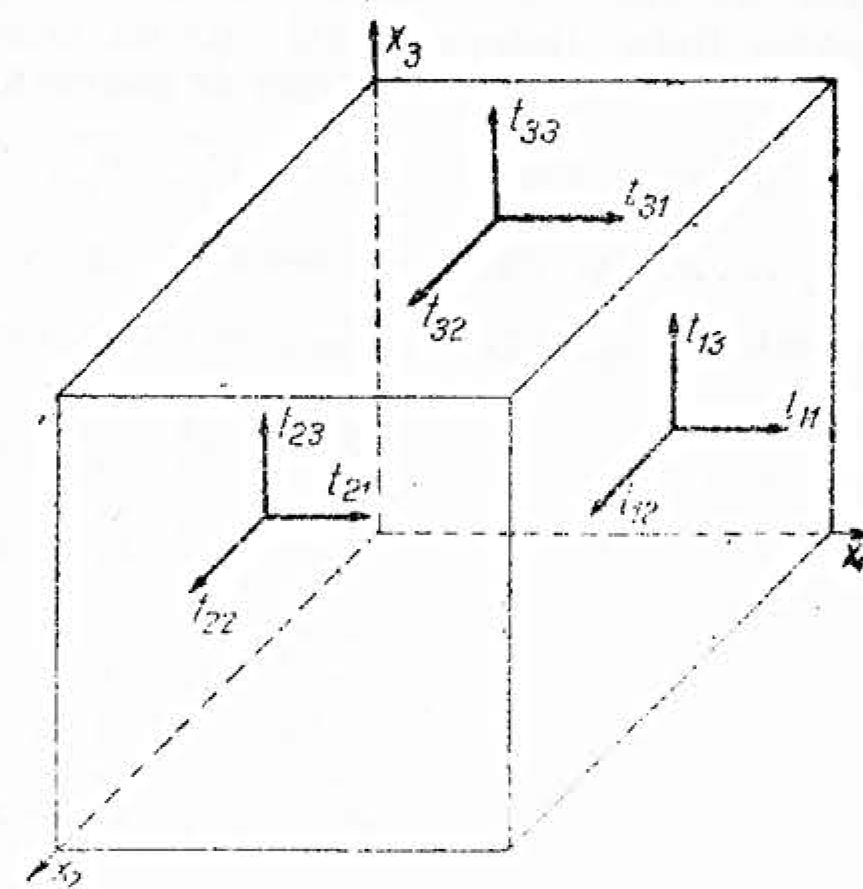


Fig. 36

Cele 9 mărimi (dintre care în cazul de faţă numai 6 sunt distincte, deoarece $t_{12} = t_{21}$, $t_{23} = t_{32}$, $t_{13} = t_{31}$) se comportă ca şi componentele unei mărimi noi, fiind inseparabile unele de altele.

Acelaşi tip de mărimi având r^2 componente apar în numeroase alte probleme ale fizicii. Ele poartă numele de *tensori* şi se reprezintă prin:

$$(t_{ik}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Dacă $t_{ik} = t_{ki}$ tensorul se numeşte *simetric*
Dacă $t_{ik} = -t_{ki}$ » » » *antisimetric.*
In general un tensor de ordinul al doilea are r^2 componente;

un tensor de ordinul al doilea simetric are $\frac{r(r+1)}{2}$ componente;

un tensor de ordinul al doilea antisimetric are $\frac{r(r-1)}{2}$ componente.

Tensorii de ordin superior într'un spaţiu cu r dimensiuni vor avea r^3, r^4... componente.

153. **Spaţiu vectorial afin. Spaţiu metric.** Intr'un spaţiu cu r dimensiuni, un vector $\vec{u}$ va fi definit prin cele r componente ale sale.

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \ldots + u_r \vec{e}_r$$

în care $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_r$ sunt vectorii unitate (versorii) pentru fiecare dintre cele r axe.

Dacă nu există posibilitatea ca între cele r unităţi să se stabilească un etalon comun de măsură, avem de a face cu un *spaţiu afin*. Dacă această posibilitate există, spaţiul se numeşte *metric*. Ca exemplu de spaţiu afin sunt de citat diagramele trasate în termodinamică între p, v şi T, care nu au nicio măsură comună. Spaţiul în care ele sunt trasate este deci un spaţiu afin. Exemplele de acest fel sunt mai numeroase decât apar la prima vedere. Numărul maxim de vectori liniar independenţi într'un spaţiu cu r dimensiuni este r.

154. **Schimbarea axelor de coordonate.** Dacă într'un spaţiu afin se consideră o serie de r vectori de bază $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \ldots \vec{E}_r$, în locul vectorilor de bază iniţiali $\vec{e}_1\, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_r$, şi dacă se consideră că vectorul $\vec{E}_M$ are faţă de primul sistem componentele $\alpha_M^1, \alpha_M^2 \ldots \alpha_M^r$, se obţin formulele de transformare

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \alpha_1^1\, \vec{e}_1 + \alpha_1^2\, \vec{e}_2 + \ldots \alpha_1^r\, \vec{e}_r \\ \vec{E}_2 &= \alpha_2^1\, \vec{e}_1 + \alpha_2^2\, \vec{e}_2 + \ldots \alpha_2^r\, \vec{e}_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{E}_M &= \alpha_M^1\, \vec{e}_1 + \alpha_M^2\, \vec{e}_2 + \ldots \alpha_M^r\, \vec{e}_r \\ \vec{E}_r &= \alpha_r^1\, \vec{e}_1 + \alpha_r^2\, \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_r^r\, \vec{e}_r \end{aligned} \qquad (154.1)$$

Pentru ca noii vectori de bază $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \ldots \vec{E}_r$ să fie independenţi este necesar ca determinantul

$$\Delta = |\alpha_M^k| \neq 0.$$

Mărimile $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \ldots \vec{E}_r$ ca şi $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_r$ nu sunt supuse niciunei alte condiţii decât acelea care caracterizează mărimile vectoriale.

Acest sistem de ecuaţii ale transformării este fundamental pentru întregul calcul tensorial.

155. **Covarianţa şi contravarianţa în sistemul de axe rectilinii.** Sistemul (154.1) poate fi exprimat sub forma

$$\vec{E}_M = \sum_k \alpha_M^k\, \vec{e}_k \qquad (M = 1, 2 \ldots r)$$

în care se presupune că α_M^k sunt constanţi, adică axele sunt rectilinii.

Insemnând cu

$$\beta_k^M = \frac{A_M^k}{\Delta}, \qquad (155.1)$$

în care A_M^k este minorul corespunzător elementului α_M^k în determinantul $|\alpha_M^k|$ înmulţit cu $(-1)^{M+k}$, se obţine:

$$\sum_M \alpha_M^k \beta_j^M = \delta_j^k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } k = j, \\ 0 & \text{dacă } k \neq j; \end{cases} \qquad (155.2)$$

(δ poartă numele de *simbolul lui Kronecker*).

In adevăr, desvoltând determinantul Δ după coloana k:

$$\Delta = \sum_M \alpha_M^k A_M^k.$$

Inlocuind valoarea lui $A_M^k = \Delta\, \beta_k^M$ din (155.1) se obţine:

$$\Delta = \sum_M \Delta\, \alpha_M^k \beta_k^M,$$

sau simplificând cu Δ

$$1 = \sum_M \alpha_M^k \beta_k^M,$$

adică prima din formulele (155.2).

Dacă $k \neq j$ se obţine aceeaşi desvoltare a determinantului Δ, însă făcută după coloana j, în care elementele acestei coloane ar fi fost înlocuite cu acelea ale coloanei k. Determinantul având două coloane egale, rezultatul va fi evident egal cu 0.

In acelaşi fel

$$\sum_k \alpha_M^k \beta_k^L = \delta_M^L = \begin{cases} 1 & \text{dacă } M = L, \\ 0 & \text{»} \quad M \neq L, \end{cases}$$

în cazul în care desvoltarea s'ar face după elementele liniei L.

Formulele *inverse* de trecere dela sistemul $\vec{E}_i$ la sistemul $\vec{e}_i$ vor fi:

$$\vec{e}_k = \sum_L \beta_k^L\, \vec{E}_L \qquad (k = 1, 2 \ldots r)$$

iar valorile α_M^k se obţin din formulele

$$\alpha_M^k = \frac{B_k^M}{\Delta'},$$

unde B_k^M este minorul elementului β_k^M, în determinantul $|\beta_k^M| = \Delta'$.

Se ştie că
$$\Delta' = \frac{1}{\Delta}.$$

Orice vector $\vec{a}$ care se transformă după aceleaşi reguli ca şi vectorii de bază se numeşte *covariant* şi va fi notat cu un indice inferior. Dacă componentele sale sunt $a_1, a_2 \ldots a_r$ vectorul transformat $\vec{A}$ va avea componentele

$$A_M = \sum_k \alpha_M^k a_k$$

şi invers

$$a_k = \sum_L \beta_k^L A_L.$$

Un vector obişnuit nu se transformă în general după regulile de covarianţă, ci după regula de *contravarianţă*.

In adevăr, fie vectorul $\vec{x}$ având componentele $x^1, x^2, x^3 \ldots x^r$ în sistemul de bază $\vec{e_i}$ şi componentele $X^1, X^2, X^3 \ldots X^r$ în sistemul de bază $\vec{E_i}$. Se obţine:

$$\vec{x} = \sum_k x^k \vec{e_k} = \sum_k \sum_L x^k \beta_k^L \vec{E}_L = \sum_L X^L \vec{E}_L,$$

de unde

$$X^L = \sum_k \beta_k^L x^k,$$

adică formule de transformare inverse acelora ale vectorilor de bază.

Vectorii care se transformă în baza acestor formule se numesc vectori *contravarianţi* şi se notează cu indici superiori.

E x e m p l u. Fie în spaţiul cu două dimensiuni un vector contravariant având componentele x^1, x^2 şi un vector covariant având coordonatele a_1 şi a_2.

Dacă se formează expresia

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 = K$$

şi, în general, într'un spaţiu cu n dimensiuni expresia

$$\sum a_k x^k = K,$$

aceasta rămâne invariantă faţă de orice schimbare de axe de coordonate. In adevăr, făcând transformările aferente vectorilor covarianţi şi contravarianţi se obţine:

$$\sum a_k x^k = \sum \sum \sum \beta_k^L A_L \alpha_M^k X^M = \sum A_L \delta_M^L X^M = \sum A_M X^M = K.$$

156. **Definiţia generală a unui tensor.** După cum s'a arătat mai sus, un vector poate fi covariant sau contravariant, componentele respective având câte un singur indice.

Un tensor se caracterizează prin doi sau mai mulţi indici, fiecare indice reprezentând un număr corespunzător de componente. Astfel, un tensor având doi indici care pot varia între 1 şi r va avea r^2 componente, un tensor cu 3 indici, r^3 componente etc.

Aceşti indici pot fi covarianţi sau contravarianţi.

In general, un tensor având m indici contravarianţi şi n indici covarianţi este un tensor de ordinul $m + n = p$ şi va fi scris sub forma

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{k_1 k_2 \ldots k_m}$$

In urma unei transformări, acest tensor va lua forma

$$T_{J_1 J_2 \ldots J_n}^{L_1 L_2 \ldots L_m},$$

formulele de transformare fiind

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{k_1 k_2 \ldots k_m} = \sum_{J \ldots L}' \alpha_{L_1}^{k_1} \ldots \alpha_{L_m}^{k_m} \beta_{i_1}^{J_1} \ldots \beta_{i_n}^{J_n} T_{J_1 \ldots J_n}^{L_1 \ldots L_m}$$

şi

$$T_{J_1 \ldots J_n}^{L_1 \ldots L_m} = \sum_{i \ldots k}' \beta_{k_1}^{L_1} \ldots \beta_{k_m}^{L_m} \alpha_{J_1}^{i_1} \ldots \alpha_{J_n}^{i_n} t_{i_1 \ldots i_n}^{k_1 \ldots k_m}$$

Pe baza acestei definiţii generale se poate face clasificaţia:

— Un *scalar* este un tensor de ordinul 0 care rămâne invariant la orice schimbare de axe.

— Un *vector* este un tensor de ordinul 1, putând fi:

vector contravariant x^i
» covariant x_i

— Un tensor de ordinul al doilea poate fi:

de două ori covariant t_{ik}
mixt t_k^i
de două ori contravariant t^{ik}.

Aceşti tensori joacă un rol esenţial în problemele de fizică teoretică.

— Tensori de ordinul trei, care pot fi de 4 tipuri:

$$t^{ikl}, \quad t_l^{ik}, \quad t_{kl}^i, \quad t_{ikl},$$

etc. etc.

157. **Operaţii cu tensori.**

(α) *Adunarea a doi sau mai mulţi tensori* se face termen cu termen, cu condiţia ca tensorii să aibă aceeaşi varianţă.

De exemplu

$$t_m^{ik} = r_m^{ik} + s_m^{ik}$$

reprezintă suma t a doi tensori r şi s. Atât tensorul t care reprezintă suma, cât şi tensorii r şi s sunt de două ori contravarianţi şi odată covarianţi.

O operaţie caracteristică tensorilor este *contracţia*, adică adunarea efectuată asupra a doi indici, unul superior şi altul inferior. De exemplu, dacă la tensorul t_m^{ik} se iau componentele pentru care $m = i$ şi se formează suma:

$$c^k = \sum_i' t_i^{ik}, \qquad (157.1)$$

se obţine un tensor contravariant de ordinul I, adică având doi indici mai puţin.

Caracterul tensorial al acestei noi mărimi se verifică aplicând aceeaşi operaţie de contracţie asupra tensorului transformat T_N^{JL}

$$T_N^{JL} = \sum_{ikm} \beta_i^J \ \beta_k^L \ \alpha_N^m \ t_m^{ik}$$

adică

$$C^L = \sum_J T_J^{JL} = \sum_J \sum_{ikm} \beta_i^J \ \beta_k^L \ \alpha_J^m \ t_m^{ik}$$

Insă

$$\sum_J \alpha_J^m \ \beta_i^J = \delta_i^m = \begin{cases} 1 \text{ pentru } m = 1, \\ 0 \quad \text{»} \quad m \neq i, \end{cases}$$

şi deci

$$C^L = \sum_J T_J^{JL} = \sum_{ik} \beta_k^L \ t_i^{ik} = \sum_k \beta_k^L \ c^k .$$

Această ultimă formulă demonstrează caracterul tensorial al sumei (157.1).

Aplicând această regulă asupra tensorului mixt de ordinul al 2-lea t_i^k, se obţine:

$$c = \sum t_k^k = t_1^1 + t_2^2 + \dots t_r^r,$$

relaţie care demonstrează că suma diagonală a tensorului

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^r \\ t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_r^1 & t_r^2 & \dots & t_r^r \end{pmatrix}$$

este un *invariant* pentru orice schimbare a axelor de coordonate.

(β) *Produsul a doi tensori de un ordin oarecare* dă un tensor de un ordin superior şi se obţine înmulţind termen cu termen cei doi tensori. De exemplu tensorul p, produs al tensorilor r şi s va avea componentele

$$p_{m,n}^{ik,j} = r_m^{ik} \ s_n^j \tag{157.2}$$

Produsul *contractat* se obţine prin operarea asupra unui indice mut, luat odată în poziţia covariantă şi odată în poziţia contravariantă. Aplicând această regulă asupra produselor din formula (157.2) se obţine succesiv

$$c_m^{ij} = \sum_k r_m^{ik} \ s_k^j ,$$

$$d^i = \sum_j c_j^{ij} = \sum_j \sum_k r_j^{ik} \ s_k^j .$$

In cazul produsului

$$t_i^k = u^k \ v_i ,$$

această regulă conduce la rezultatul

$$c = t_i^k = \sum t_k^k = u^1 v_1 + u^2 v_2 + \dots u^r \ v_r$$

adică la produsul scalar a doi vectori u^k şi v_i. Rezultă că în geometria afină produsul scalar se defineşte pentru vectori având varianţe opuse.

Acest rezultat permite să se recunoască dacă o anumită mărime are sau nu un caracter tensorial, precum şi varianţa tensorului recunoscut ca atare.

De exemplu, se ştie că expresia

$$dW = f_1 \, dx^1 + f_2 \, dx^2 + \dots f_r \, dx^r,$$

care reprezintă lucrul mecanic al unei forţe f_k, are un caracter invariant oricare ar fi sistemul de axe de coordonate. Ţinând seamă că deplasarea dx^i constitue un *vector contravariant*, se poate afirma că forţa f_k este un *vector covariant*. Este necesar de menţionat că deşi expresia

$$x^k = \sum \alpha_M^k \ X^M$$

se prezintă ca un produs contractat, valorile α_M^k nu au caracterul unui tensor, ele nefiind legate de un sistem de axe perfect determinat. Tabloul valorilor α_M^k constitue o *matrice*.

158. **Coordonate curbilinii.** Formulele

$$x^k = \sum_M \alpha_M^k \ X^M \text{ şi } X^M = \sum_k \beta_k^M \ x^k,$$

unde α_M^k şi β_k^M au valori constante, permit trecerea dela un sistem de axe rectilinii la alt sistem de axe rectilinii. Această transformare este valabilă pentru întregul spaţiu.

In cazul general, formulele de trecere au forma

$$X^M = F^M (x^1, \ x^2 \dots x^r), \tag{158.1}$$

unde F^M sunt funcţii oarecare de $x^1 \dots x^r$, care nu mai sunt liniare.

Invers, există formulele

$$x^i = f^i \ (X^1, \ X^2 \dots X^r),$$

unde f^i sunt funcţii de $X^1, X^2 \dots X^r$.

Aceste transformări reprezintă trecerea dela un sistem de coordonate curbilinii la alt sistem de coordonate curbilinii.

Forma liniară se menţine numai pentru deplasările infinitezimale:

$$\delta X^M = \sum_k \frac{\partial F^M}{\partial x^k} \delta x^k = \sum \beta_k^M \ \delta x^k \tag{158.2}$$

unde β_k^M sunt funcţii de $x^1, x^2 \dots x^r$.

Pentru aplicarea acestor formule este necesar să se precizeze *în ce puncte anume* se aplică transformarea (158.2), adică să se precizeze punctul de aplicaţie al tensorului sau vectorului definit de această transformare, dându-se componentele lui în funcţie de coordonatele $x^1, x^2 \dots x^r$ ale punctului care se studiază.

159. **Spaţiul metric.** Noţiunile date mai sus sunt independente de existenţa unei măsuri comune pentru vectorii unitari $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \dots \vec{e}_r$.

Dacă se presupune că vectorii unitari $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_r$ pot fi măsuraţi cu o aceeaşi unitate de lungime, spaţiul afin devine un spaţiu metric în care distanţa dintre două puncte vecine poate avea un sens.

Intr'un sistem ortogonal de axe de coordonate, în care vectorii de bază au aceeaşi lungime 1, distanţa dintre două puncte vecine este dată de formula:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \ldots (\mathrm{d}x^r)^2 . \qquad (159.1)$$

Schimbând vectorii de bază şi trecând la noile coordonate $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_r$ (care pot fi şi curbilinii) se obţine

$$\bar{e}_m = \sum_i \alpha^i_m e_i \ , \quad \mathrm{d}x^i = \sum_m \alpha^i_m \, \mathrm{d}\bar{x}^m ,$$

$$e_i = \sum_m \beta^m_i \bar{e}_m \ , \quad \mathrm{d}\bar{x}^m = \sum_i \beta^m_i \, \mathrm{d}x^i .$$

Expresia (159.1) capătă forma:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_i (\mathrm{d}x_i)^2 = \sum_{i,\,l,\,m} \alpha^i_l \alpha^i_m \, \mathrm{d}\bar{x}^l \, \mathrm{d}\bar{x}^m = \sum_{lm} \bar{g}_{lm} \, \mathrm{d}\bar{x}^l \, \mathrm{d}\bar{x}^m , \qquad (159.2)$$

unde

$$\bar{g}_{lm} = \sum_i \alpha^i_l \alpha^i_m = \bar{g}_{ml} .$$

Forma patratică care reprezintă, după transformare, distanţa dintre două puncte vecine are numai $\frac{r(r+1)}{2}$ componente g_{lm} independente, din cauza simetriei exprimate prin relaţia $\bar{g}_{lm} = \bar{g}_{ml}$.

Intr'un spaţiu cu trei dimensiuni formula (159.2) devine:

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2 + g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2 + g_{33}(\mathrm{d}x^3)^3 +$$
$$+ 2 g_{12} \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 + 2 g_{13} \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^3 + 2 g_{23} \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^3 .$$

In general, patratul distanţei între două puncte vecine în coordonate curbilinii se exprimă prin formula patratică omogenă

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} g_{ik} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^k \ , \quad g_{ik} = g_{ki} ,$$

unde g_{ik} sunt funcţii oarecare de $x^1, x^2 \ldots x^r$, ale punctului unde se determină această distanţă.

Ţinând seamă că $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}x^k$ sunt contravarianţi, rezultă că g_{ik} este un *tensor covariant simetric.*

Formula (159.1) este un caz particular în care:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \cdots g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} \cdots g_{2r} \\ \cdots & \cdots \\ g_{r1} & g_{r2} \cdots g_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Tensorul g_{ik} se numeşte *tensorul metric fundamental.*

Determinantul format de elementele g_{ik}:

$$g = | g_{ik} | = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rr} \end{vmatrix}$$

poate fi scris sub forma

$$g = \sum_k g_{ik} G_{ik} \qquad \text{(desvoltare după linia } i\text{)}$$

$$g = \sum_i g_{ik} G_{ik} \qquad \text{(desvoltare după coloana } k\text{)}$$

Deasemenea

$$\sum_k g_{ik} G_{jk} = 0 \quad \text{şi} \quad \sum_i g_{ik} G_{il} = 0. \qquad (i \neq j, \ k \neq l).$$

Dacă se notează cu

$$g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g} ,$$

se obţine

$$\sum_k g_{ik} g^{jk} = \delta^j_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ 0 & \quad " \quad i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_i g_{ik} g^{il} = \delta^l_k = \begin{cases} 1 & \quad " \quad k = l, \\ 0 & \quad " \quad k \neq l. \end{cases}$$

Având în vedere că δ^j_i sau δ^i_k sunt invarianţi, rezultă că g^{ik} este un tensor contravariant, deoarece g_{ik} este un tensor covariant.

160. Exemple de coordonate curbilinii în spaţiul euclidian cu 3 dimensiuni.

— *Axe oblice în plan* (fig. 37). Dacă vectorii unitari sunt e_1 şi e_2, coordonatele unui punct P vor fi

$$OQ = e_1 x^1,$$
$$QP = e_2 x^2,$$
$$\overline{OP}^2 = (e_1 x^1)^2 + (e_2 x^2)^2 + 2 e_1 x^1 e_2 x^2 \cos\theta,$$

adică

$$g_{11} = (e_1)^2 \quad g_{22} = (e_1)^2 \quad g_{12} = e_1 e_2 \cos\theta.$$

Tensorul metric fundamental este

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^2 & e_1 e_2 \cos\theta \\ e_1 e_2 \cos\theta & e_2^2 \end{pmatrix} .$$

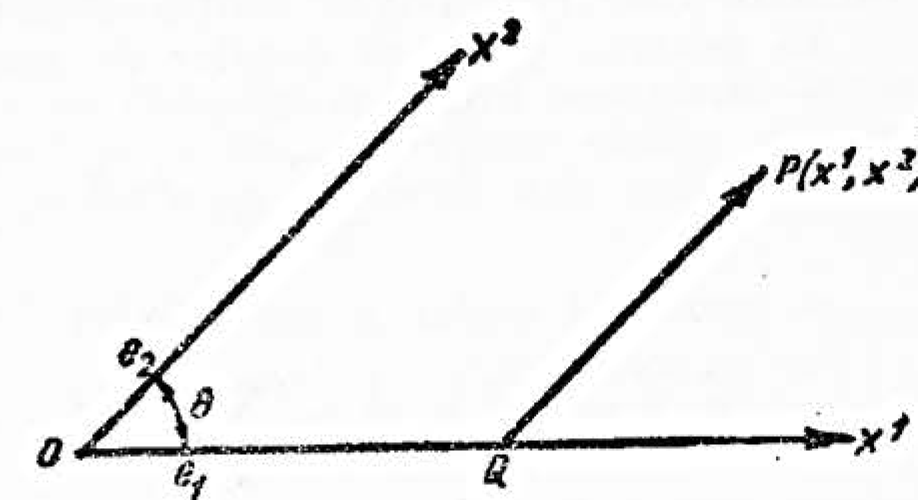


Fig. 37

— *Coordonate cilindrice* (fig. 38):

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z.$$

Dacă variem în punctul P pe r, θ şi z, se obţin ca deplasări infinitezimale ortogonale:

$$\mathrm{d}r, \qquad r\mathrm{d}\theta, \qquad \mathrm{d}z,$$

adică unităţile locale sunt:

$$e_1 = 1 \qquad e_2 = r \qquad e_3 = 1$$
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \, \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Tensorul metric fundamental are forma:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ al cărui determinant } g = r^2.$$

— *Coordonate sferice:*

$$x^1 = r, \qquad x^2 = \theta, \qquad x^3 = \varphi.$$

Dacă în punctul P variem pe r, θ şi φ se obţin deplasările ortogonale

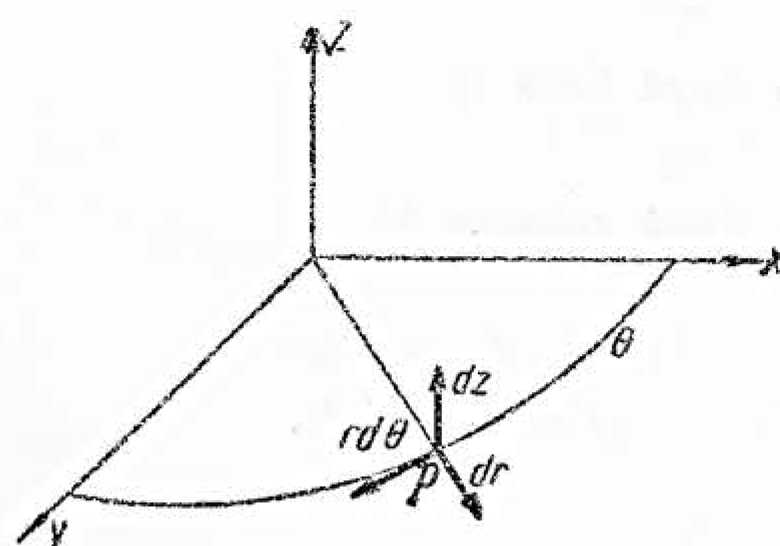


Fig. 38

$$dr, \qquad r\,d\theta, \qquad r \sin\theta \, d\varphi$$

având ca unităţi locale:

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = r, \qquad e_3 = r \sin\theta,$$

şi deci

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

Tensorul are forma

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

al cărui determinant $g = r^4 \sin^2\theta$.

161. Componentele covariante sau contravariante ale aceluiaşi vector. Odată cu introducerea unei metrici, varianţa unui tensor, care în geometria afină constitue o calitate intrinsecă a acestuia, poate fi schimbată.

In adevăr, dacă se consideră vectorul contravariant u^k şi se efectuează produsul contractat

$$u_i = \sum_k g_{ik} u^k$$

se obţin componentele covariante ale aceluiaşi vector.

Formula inversă dă

$$u^k = \sum_j g^{jk} u_j,$$

de unde rezultă că un vector poate fi reprezentat atât prin componentele sale covariante cât şi prin cele contravariante.

In general, pe baza datelor de mai sus se defineşte:

— lungimea unui vector

$$|u|^2 = \sum_{ik} g_{ik} u^i u^k = \sum_i u_i u^i = \sum_{ij} g^{ij} u_i u_j;$$

— produsul scalar a doi vectori

$$\vec{u}, \vec{v} = \sum_i u_i v^i = \sum_{ik} g_{ik} u^k v^i = \sum_k u^k v_k = \sum_{jk} g^{jk} u_j v_k;$$

— unghiul a doi vectori

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sum g_{ik} u^i v^k}{\sqrt{(\sum g_{ik} u^i u^k)(\sum g_{ik} v^i v^k)}}.$$

Calculul tensorial are numeroase aplicaţii în fizica teoretică, teoria relativităţii, mecanică, electrotehnică, piezo-electricitate, în calculul reţelelor electrice, etc.

II. MĂRIMI ŞI UNITĂŢI

A. Consideraţii generale

1. Mărimi şi relaţii fizice. Un fenomen fizic este determinat de manifestările sale care pot fi exprimate sub forma unei relaţii între o serie de mărimi fizice, care-l caracterizează.

Mărimea este caracterizată prin proprietatea sa esenţială de a putea creşte şi descreşte. Astfel, de exemplu, *distanţa* dintre două puncte, *masa* unui corp, *sarcina electrică*, sunt mărimi fizice.

Sunt mărimi cărora li se pot aplica în acelaşi timp proprietăţile de *egalitate* şi de *adunare*. *Distanţa, masa, curentul electric,* fac parte din această categorie.

Mărimile care nu pot fi exprimate decât cu o aproximaţie de o constantă, care deci depind de alegerea unei origini de referinţă arbitrară, sunt susceptibile de proprietatea de *egalitate*, nu însă şi de aceea de adunare. Este cazul tuturor mărimilor având caracterul de potenţial, ca de exemplu: *potenţial electric, potenţial magnetic, înălţime*, etc. Diferenţa acestor categorii de mărimi este însă susceptibilă şi de egalitate, şi de adunare. Este cazul de exemplu pentru *diferenţa de înălţime, diferenţa de potenţial.* In acest caz aproximaţia de o constanta se elimină prin diferenţă.

Orice mărime fizică se caracterizează printr'o serie de proprietăţi: unele mai accesibile mijloacelor noastre de investigaţii, iar altele comportând cercetări mai aprofundate. Progresul ştiinţelor fizice este caracterizat prin pătrunderea cât mai adâncă şi obiectivă a proprietăţilor mărimilor fizice, spre a ne apropia necondiţionat de adevărul absolut al realităţii fizice.

Relaţiile dintre diferitele mărimi fizice constituesc relaţii fizice. Ele se exprimă deobicei sub forma unor ecuaţii matematice în care mărimile sunt reprezentate prin simboluri literale. Relaţiile fizice sunt *fundamentale*, dacă se referă la un fenomen fizic descoperit pe cale experimentală şi *derivate*, dacă sunt deduse din primele.

2. Mărime, unitate, valoare. O mărime fizică se exprimă cantitativ prin măsurare.

A măsura o mărime înseamnă a o putea compara cu o altă mărime de aceeaşi natură, care se alege în mod convenţional ca *unitate*. Raportul dintre mărimea de măsurat A şi unitatea respectivă a se numeşte valoarea (sau măsura) acelei mărimi α.

$$A/a = \alpha \quad \text{sau} \quad A = a\,\alpha.$$

O mărime A este egală cu produsul dintre unitatea a şi valoarea sa α.

Mărimea şi *unitatea* sunt noţiuni fizice. Valoarea fiind raportul dintre două mărimi de acelaşi fel, ea este un simplu *număr* fără dimensiune fizică.

Mărimea nu variază cu unitatea aleasă. Valoarea variază invers cu unitatea.

Pentru a exprima diferitele ordine de mărime ale unei mărimi fizice, se întrebuinţează unităţi care sunt multipli sau submultipli de puteri zecimale ale unităţilor de bază şi sunt caracterizate prin prefixe.

Exemplu. In expresia unei lungimi $l = 60$ km, l (lungime) este mărimea, 60 valoarea şi km unitatea. Aceeaşi lungime poate fi scrisă $l = 60\,000$ m. Mărimea l a rămas aceeaşi, valoarea este de 1000 ori mai mare, pentrucă unitatea este de 1000 ori mai mică.

Dotând mărimile fizice cu o valoare numerică, relațiile dintre ele se pot înlocui cu ecuații matematice între valori, adică între numere, care permit efectuarea operațiilor matematice ca: multiplicarea, diviziunea, extragerea rădăcinii, etc.

Simbolurile unităților trebue tratate ca factori algebrici, aplicându-li-se toate regulile algebrice de calcul.

3. **Etaloane.** Realizarea materială a unor unități (eventual a unor multipli ori submultipli), sau a unor mărimi în raport cu care se definește *unitatea respectivă*, se numește etalon de măsură, sau, mai simplu, *etalon*.

Etalonul trebue să îndeplinească următoarele condiții:

— să poată fi reconstituit;

— să fie cât mai invariabil față de oricare influență fizică (temperatura, umezeala, etc.);

— să poată fi ușor folosit în tehnica operațiilor de măsurare.

Nu este necesar ca etaloanele să coincidă chiar cu unitățile fundamentale. In sistemul mecanic, etalonul este kg masă, iar unitatea fundamentală este kg forță.

In electricitate, drept al patrulea etalon se ia permeabilitatea vidului. Aceasta nu împiedică să se adopte de exemplu ca a patra unitate fundamentală amperul, a cărui definiție se dă însă ținându-se seama de etalonul permeabilitate.

4. **Expresii fizice.** O expresie sau o formulă fizică este o relație între diferite mărimi, omogenă în oricare sistem coerent de unități și îndeplinind aceleași condiții privind definiția unităților fundamentale și derivate.

Astfel de exemplu: suprafața unei sfere $S = 4\pi r^2$ este expresia acestei suprafețe în oricare sistem de unități în care unitatea de suprafață este pătratul a cărui latură este unitatea de lungime.

Tensiunea $U = RI$ este o expresie valabilă în oricare sistem de unități, în care unitatea de tensiune este aceea produsă la bornele unei rezistențe unitare, când este străbătută de unitatea de curent.

5. **Coeficienți numerici.** Sunt trei categorii de coeficienți numerici care intervin în expresiile fizice:

— *coeficienții paraziți*, care pot fi eliminați prin alegerea convenabilă a unităților; astfel, suprafața unui dreptunghi are expresia riguroasă $S = K \cdot a \cdot b$, în care factorul K devine 1 numai dacă se ia ca unitate de suprafață pătratul a cărui latură este unitatea de lungime;

— *coeficienții organici*, inerenți proprietăților fizice intrinsece fenomenelor respective; aceștia nu pot fi suprimați, ci cel mult deplasați dintr'o formulă într'alta, prin modificarea sistemului de unități (exemplu numărul π);

— *mărimi fără dimensiune*, care sunt considerate deobicei tot ca factori numerici; aceste mărimi se pot exprima de fapt în raport cu anume unități; astfel sunt unghiurile plane sau unghiurile solide.

Factorul 4π, care intervine adeseori în unele expresii, reprezintă deobicei valoarea unghiului solid total, dacă se ia steradianul ca unitate de unghi solid.

6. **Unități fundamentale și derivate.** Intr'un grup de mărimi, se numesc *unități fundamentale* cele care sunt alese arbitrar și convențional. *Unitățile derivate* sunt deduse din cele fundamentale, pe considerația de a suprima factorii numerici din anume relații fizice uzuale.

Dacă *metrul* este ales arbitrar ca unitate fundamentală de lungime, *metrul pătrat* este unitatea derivată de suprafață.

Intr'un grup de mărimi fizice, *numărul minim* de unități fundamentale este

$$n = m - p,$$

în care m este numărul mărimilor, iar p numărul relațiilor fundamentale fizice, care leagă acele mărimi.

Pe baza acestor considerente, în electromagnetism trebue să se aleagă cel puțin o unitate fundamentală în plus peste cele din mecanică.

7. **Ecuații de definiție.** Acestea sunt relațiile care servesc la definirea unităților derivate în funcție de cele fundamentale, prin suprimarea factorilor numerici paraziți din expresiile cele mai simple, convenabil alese.

Astfel, scriind suprafața pătratului $S = l^2$, se definește unitatea de suprafață ca fiind pătratul a cărui latură este unitatea de lungime. Deasemenea unitățile derivate de volum, viteză, forță, etc. se definesc prin ecuațiile de definție corespunzătoare $V = l^3$, $v = l/t$, $F = m \cdot a$.

8. **Coerență.** Aceasta este proprietatea pe care o au unitățile unui grup de mărimi, când conduc la expresia cea mai simplă a ecuațiilor fizice între mărimile respective, în concordanță cu ecuațiile de definiție.

Astfel, dacă se adoptă ca unități fundamentale: *centimetrul*, *gramul*, *secunda*, unitatea coerentă de forță este *dina*, pentrucă numai ea permite a se scrie $F = m \cdot a$.

Două sisteme de unități sunt *coerente între ele*, când ecuațiile fizice sunt scrise identic în ambele sisteme.

De exemplu, în geometrie, sistemul « metru » și « metru pătrat » este coerent cu sistemul « centimetru » și « centimetru pătrat ». In ambele sisteme, expresia suprafețelor geometrice se scrie la fel.

Deasemenea sistemul CGSem și sistemul practic clasic sunt coerente între ele. Sistemele clasice și raționalizate nu mai sunt coerente între ele.

9. **Dimensiune.** Ecuațiile de definiție permit a se defini dimensiunea unei unități derivate, în funcție de unitățile fundamentale. Exponenții din astfel de ecuații se numesc *exponenți de dimensiune*.

Dimensiunea se exprimă printr'o relație simbolică, denumită *formula de dimensiune* prin care se scot în evidență exponenții de dimensiune. Se obișnuește a se scrie aceste relații cu simbolurile majuscule ale mărimilor intercalate sau nu într'o paranteză dreaptă. De exemplu:

Dimensiunea suprafeței: $S = L^2$.

Dimensiunea vitezei: $v = LT^{-1}$.

Dimensiunea forței $F = LMT^{-2}$.

Dimensiunile se exprimă în funcție de mărimile fundamentale, iar formulele de dimensiune se pot supune unui calcul algebric obișnuit, constituind *analiza dimensională*.

10. **Omogenitate.** Toate expresiile fizice trebue să fie *omogene* în raport cu mărimile fundamentale.

Lipsa de omogenitate este datorită fie unei erori, fie faptului că expresia respectivă are un caracter empiric, în care coeficientul numeric cuprinde de fapt valoarea unei mărimi fizice introdusă numeric și valabilă *numai* într'un anumit sistem de unități.

11. **Sisteme de etaloane, de unități și de referință.** Concepția de sistematizare în domeniul unităților se referă de fapt la trei puncte de vedere, între care se impune o distincție:

— *Sistemele de etaloane* reprezintă un grup de realizări materiale, de etaloane comportând anumite proprietăți comune.

— *Sistemele de unități* reprezintă totalitatea unităților de măsură ale unui același grup de mărimi, deduse din unitățile fundamentale corespunzătoare, prin relațiile fizice de definiție.

— *Sisteme de referință.* Dimensiunile de bază în raport cu care se exprimă dimensiunile tuturor unităților derivate din același grup constitue *un sistem de referință dimensională*.

Sistemul de referință dimensională ar trebui să coincidă cu acela al unităților fundamentale adoptate. Aceasta se realizează în majoritatea cazurilor, dar nu totdeauna. Coincidența între un sistem de unități și unul de etaloane se realizează și mai rar.

B. Mărimi şi simboluri literale

12. Consideraţii generale. Mărimile, în acest capitol nu sunt caracterizate prin *Definiţii*, în sensul ştiinţific al acestei noţiuni. Definiţiile se vor introduce într'o ediţie viitoare, după ce se va întocmi un STANDARD în acest sens.

De aceea în prezentul Manual, mărimile au fost caracterizate numai prin unele din proprietăţile lor, mai mult în scopul identificării lor.

Până la apariţia unui STANDARD asupra acestor definiţii, s'a considerat util a complecta, ca documentare, această primă ediţie referitor la mărimile electrice şi magnetice cu textul *Proiectul terminologiei electrotehnicei teoretice*, întocmită recent de Comisia Comitetului de terminologie tehnică a Academiei de Ştiinţe URSS (Anexa o)

Revista „Electricestvo", Ianuarie 1953, de unde s'a luat textul, supune acest Proiect de terminologie unei largi discuţii a cetitorilor.

In ce priveşte simbolurile generale folosite, ele sunt indicate la fiecare mărime după STAS 3087-52.

13. Mărimi electrice. *Sarcină electrică (Cantitate de electricitate) Q.* Exces al sarcinilor electrice elementare de un semn, faţă de acelea de semn contrar într'un corp, pe un corp sau în vid.

Intensitatea curentului electric (sau de preferinţă prin simplificare *curent electric*), *I*. Limita raportului dintre sarcina electrică transportată, care străbate o secţiune determinată, într'un interval de timp, când acest interval tinde spre zero.

Sub o formă mai generală, prin *curent electric* se înţelege suma algebrică a curenţilor de conducţie, de convecţie şi de deplasare, care trec prin suprafaţa considerată.

Curent electric de conducţie. Are ca proprietate mişcarea sarcinilor electrice printr'un conductor, fără alterarea substanţei din care este format acel corp conductor.

Intensitatea curentului electric de conducţie este debitul sarcinilor libere printr'o secţiune dată.

Curentul electric de conducţie poate subsista singur, sau înglobat în curentul electric total.

Curent electric de convecţie. Curentul care se produce prin mişcarea sarcinilor electrice izolate în electrolite, gaze, sau vid.

Curentul electric de convecţie poate subsista singur, sau înglobat în curentul electric total.

Densitatea curentului electric, *J*, *δ*, *S*. O mărime vectorială egală cu limita raportului dintre intensitatea curentului care străbate un element de suprafaţă normal pe direcţia de mişcare a electricităţii şi aria acestui element, când aceasta tinde către zero. Direcţia densităţii curentului electric este inversă mişcării electricităţii negative.

Densitatea medie într'un conductor liniar este egală cu raportul curentului electric prin aria secţiunii drepte a conductorului.

Densitatea electrică de suprafaţă σ. Limita raportului dintre sarcina electrică distribuită la suprafaţa unui conductor şi aria elementului de suprafaţă corespunzător, când acesta tinde către zero.

Densitatea electrică de volum, ρ. Limita raportului dintre sarcina electrică care se găseşte într'un element de volum şi elementul de volum corespunzător, când acesta tinde către zero.

Câmp electric. Formă de existenţă a materiei, deosebită de formaţiile materiale (proton, neutron, electron, atom, etc.) care se caracterizează prin continuitate, prin concentrarea relativ slabă a energiei, prin proprietatea de a transmite interacţiuni între corpurile cu sarcinile electrice. Se mai înţelege regiunea spaţiului unde

este un câmp electric. Câmpurile electrice sunt de două feluri: de surse (electrostatice), de vârtejuri (fenomene de inducţie).

Intensitatea câmpului electric (sau prescurtat *câmp electric*, în sens cantitativ) *E*, *K*. Mărime vectorială care caracterizează câmpul electric în un punct al spaţiului, prin raportul dintre forţa exercitată de către câmp asupra unei sarcini electrice pozitive aşezată în punctul considerat şi mărimea acelei sarcini. Vectorul intensităţii câmpului electric are direcţia şi sensul forţei mecanice produse.

Potenţial electric, *V*. Mărime scalară, al cărei gradient cu semn schimbat dă câmpul electric ca mărime şi direcţie, $E = -\text{grad}\ V$ în cazul unui câmp de surse.

In cazul unui câmp de surse, potenţialul electric al unui punct este integrala de linie a intensităţii câmpului electric dela acel punct până la un alt punct anumit, ales arbitrar, ca origină de potenţiale.

Diferenţă de potenţial, $U = V_1 - V_2 = V_{12}$. Diferenţa de potenţial dintre două puncte este integrala de linie a intensităţii câmpului electric, dela unul dintre cele două puncte până la celălalt în cazul unui câmp de surse.

Tensiune electrică, *U*. Sinonim al diferenţei de potenţial electric într'un câmp fără rotori.

Forţa electromotoare (tensiune electromotoare), *E* (F.E.M.). Cauza sau acţiunea fizică capabilă de a menţine o diferenţă de potenţial electrică între două puncte ale unui circuit deschis, sau de a întreţine un curent electric într'un circuit închis.

In circuit deschis, F.E.M. se evaluează prin diferenţa de potenţial pe care o menţine.

In circuit închis, ea este egală cu raportul dintre puterea instantanee desvoltată şi valoarea corespunzătoare a curentului în acel circuit.

Valoarea forţei electromotoare desvoltată într'un parcurs închis este integrala liniară a intensităţii câmpului electric de-a-lungul parcursului studiat.

Valoarea forţei electromotoare interne a unei surse oarecare este egală cu integrala liniară a intensităţii câmpului electric, de origine neelectrostatică, luată în interiorul sursei de f.e.m. dela polul ei negativ la acel pozitiv.

Moment electric al unui dipol. Mărime vectorială egală cu produsul dintre sarcina pozitivă a unui dipol şi distanţa dintre sarcini, având direcţia dela sarcina negativă spre cea pozitivă.

Intensitatea polarizării electrice a corpului, *P*. Mărime vectorială egală cu limita raportului dintre momentul electric total şi volumul respectiv, când acesta din urmă tinde spre zero.

Capacitatea unui condensator, *C*. Raportul sarcinii electrice a uneia dintre armături, prin diferenţa de potenţial dintre cele două armături, oricare alţi conductori fiind la potenţialul zero, sau infinit îndepărtaţi.

Capacitatea unui conductor, *C*. Raportul sarcinii electrice a conductorului prin potenţialul său, oricare alţi conductori fiind la potenţialul zero sau infinit îndepărtaţi.

Rezistenţă electrică, *R*. Raportul dintre diferenţa de potenţial constantă aplicată la extremităţile unui conductor şi intensitatea curentului continuu care se produce în acel conductor, acesta nefiind sediul niciunei forţe electromotoare interne.

Rezistivitate, ρ. Rezistenţa unui conductor de lungime, unitate şi de secţiune unitate.

Conductanţă, *G*. Inversul rezistenţei $G = \frac{1}{R}$.

Conductivitate, γ, σ. Inversul rezistivităţii $\gamma = \frac{1}{\rho}$.

Pentru un corp izotrop, conductivitatea este raportul dintre densitatea curentului electric de conducţie şi intensitatea câmpului electric; pentru un corp

anizotrop, în direcţia uneia din axele principale este raportul componentei densităţii de curent electric de conducţie şi componenta intensităţii câmpului electric luate dealungul acestei axe.

Mărimi electrice supuse « raţionalizării ». In § *D*, care urmează, se dau explicaţii asupra adoptării operaţiei raţionalizării, a unora din expresiile şi unităţile electrice şi magnetice. Se relevă aici principalele proprietăţi ale acelor mărimi electrice ale căror unităţi sunt supuse raţionalizării, aceste proprietăţi fiind adaptate pentru acele mărimi la cele două variante de *regim clasic* şi *regim raţionalizat*.

α) *Regim clasic*

Flux de inducţie electrică, Ψ. Fluxul de inducţie electrică emis de o sarcină *Q* într'un unghi solid Ω este egal cu produsul sarcinii prin unghiul solid $\Psi_i = Q\,\Omega$.

Fluxul de inducţie electrică străbătând o suprafaţă oarecare şi provenind dela mai multe sarcini electrice este egal cu suma algebrică a fluxurilor provenind dela fiecare din acele sarcini şi străbătând aceeaşi suprafaţă.

Prin urmare, fluxul provenind dela mai multe sarcini şi străbătând o suprafaţă închisă este:

$$\Psi = (\Sigma Q)\,\Omega_t = 4\pi\Sigma Q \qquad \text{(Teorema Gauss)}$$

deoarece

$$\Omega_t = 4\pi.$$

Inducţie electrică, *D*. Inducţia electrică este mărimea vectorială al cărei flux printr'un element de suprafaţă d*S* este egal cu fluxul de inducţie electrică străbătând acelaşi element de suprafaţă.

Constantă dielectrică, ε (permetivitate). Constanta dielectrică într'un punct al unui mediu izotrop electric este raportul dintre intensitatea câmpului de inducţie electrică şi a câmpului electric în acel punct.

Pentru un corp anizotrop, în direcţia uneia din axele principale, este raportul componentei inducţiei electrice la componenta intensităţii câmpului electric, luate în corp dealungul acestei axe.

Constanta dielectrică este mărimea fizică care caracterizează proprietatea mediului dielectric în punctul corespunzător.

Constanta dielectrică a unui mediu oarecare se mai numeşte şi *constanta dielectrică absolută*.

Constanta dielectrică a vidului, ε_0. Valoarea constantei dielectrice într'un punct al spaţiului vid este constanta dielectrică a vidului. Ca oricare constantă dielectrică ea este o mărime fizică.

Constanta dielectrică relativă, ε_r. Raportul dintre constanta dielectrică absolută a unui mediu dielectric şi constanta dielectrică a vidului se numeşte constanta dielectrică relativă. Ea este un număr şi se mai numeşte uneori şi *puterea inductoare specifică*.

Intre aceste trei noţiuni de constante dielectrice există relaţia:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r.$$

Deplasare electrică. Vector având ca direcţie aceeaşi direcţie ca inducţia electrică şi ca valoare inducţia divizată prin 4π.

Fluxul deplasării electrice, Ψ. Fluxul vectorului de deplasare electrică străbătând o anumită suprafaţă.

Curent de deplasare. Curentul care se manifestă într'un dielectric prin variaţia în timp a fluxului deplasării electrice.

Intensitatea curentului de deplasare (sau, abreviat, curent de deplasare cu semnificaţia cantitativă), $I\,(I_d)$. Limita raportului dintre variaţia fluxului deplasării

electrice străbătând o suprafaţă dată, într'un anumit interval de timp, şi acel interval de timp când tinde către zero:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}.$$

Curentul electric de deplasare poate subsista singur, sau înglobat în curentul electric total.

β). *Regim raţionalizat*

Constanta dielectrică absolută a vidului, ε_0'. Raportul dintre cantitatea de electricitate, care se găseşte în spaţiul vid şi fluxul intensităţii câmpului electric, străbătând o suprafaţă închisă care înconjură acea cantitate de electricitate.

Deplasare electrică, *D*. O mărime vectorială egală cu suma geometrică a intensităţii câmpului electric, înmulţită cu constanta dielectrică a vidului şi a intensităţii polarizaţiei electrice a corpului.

Această mărime este identică cu deplasarea electrică din regimul clasic.

Inducţie electrică, *D'*. Aceeaşi ca şi deplasarea electrică (în regim raţionalizat).

Valoarea inducţiei electrice *D'*, în regim raţionalizat este de 4π ori mai mică decât aceea din regimul clasic.

Fluxul deplasării electrice, Ψ. Fluxul vectorului de deplasare electrică printr'un unghi solid, sau străbătând o anumită suprafaţă.

Constanta dielectrică a unui corp, ε'. Pentru un corp isotrop, este raportul inducţiei electrice într'un anumit punct al corpului şi intensitatea câmpului electric în acelaşi punct.

Pentru un corp anisotrop, în direcţia uneia din axele principale, este raportul componentei inducţiei electrice la componentele intensităţii câmpului electric, luate în corp, dealungul acestei axe. Valoarea constantei dielectrice în regim raţionalizat este de 4π ori mai mică ca aceeia din regim clasic pentru aceiaşi situaţie fizică.

Fluxul electric, Ψ'. In regim raţionalizat este identic ca valoare cu fluxul deplasării electrice. Este de 4π ori mai mic decât fluxul electric din regimul clasic. Valoarea fluxului electric în regim raţionalizat, emis de o sarcină electrică printr'o suprafaţă închisă, este egală chiar cu aceea sarcină.

Constanta dielectrică relativă, ε_r. Raportul dintre constanta dielectrică absolută a corpului şi constanta dielectrică a vidului.

Constanta dielectrică relativă, fiind un număr, este identică cu aceea a regimului clasic.

Curent de deplasare. Acelaşi ca în regimul clasic.

Intensitatea curentului de deplasare, (sau abreviat, curent de deplasare, cu semnificaţia cantitativă), $I, (I_d)$. Limita raportului dintre variaţia fluxului deplasării electrice străbătând o suprafaţă dată, într'un anumit interval de timp şi acest interval de timp, când el tinde către zero

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}.$$

Curentul electric de deplasare poate subsista singur, sau înglobat în curentul electric total.

In regim raţionalizat, curentul de deplasare este identic cu acela din regimul clasic ca valoare.

14. Mărimi magnetice. *Inducţie magnetică* (sau densitatea fluxului magnetic), *B*. Vector solenoidal, depinzând de starea magnetică şi îndeplinind condiţia că orice variaţie a fluxului acestui vector, străbătând o linie închisă (oarecare), desvoltă o forţă electromotoare a cărei valoare totală dealungul liniei este egală şi de sens contrar cu derivata fluxului în raport cu timpul.

Inducţia magnetică este mărimea al cărei produs vectorial schimbat de semn, cu lungimea unui element de conductor, este egal cu raportul dintre forţa elementară la care este supus acel element de conductor şi curentul care-l străbate. Sensul elementului de conductor este acel al curentului respectiv.

Flux de inducţie magnetică (sau flux magnetic), Φ. Este fluxul vectorului inducţiei magnetice.

Mărimi magnetice supuse «raţionalizării». In proprietăţile care urmează, se precizează atât distincţia acestora, cât şi a mărimilor respective în cele două situaţii de *regim clasic* şi *raţionalizat*.

Intensitatea câmpului magnetic (sau abreviat, câmp magnetic H). Accepţiunea privind bazele materiale de existenţă se aplică şi câmpului magnetic, ca şi câmpului electric.

In regim clasic, câmpul magnetic este o mărime vectorială a cărei integrală de linie dealungul oricărui contur închis este egală cu suma curenţilor ale căror circuite sunt străbătute de acel contur închis, multiplicată cu unghiul solid total ($\Omega_t = 4\pi$). In această sumă, curenţii sunt introduşi cu semnele lor algebrice, determinate după regula burghiului aplicată la sensul curenţilor străbătuţi, faţă de acela al sensului de parcurgere a conturului respectiv.

Intr'un mediu magnetic omogen, câmpul magnetic produs de un circuit electric într'un punct al spaţiului are o componentă H_a, pe o direcţie oarecare a trecând prin acel punct, egală cu produsul schimbat de semn dintre intensitatea curentului şi derivata în raport cu direcţia a, a unghiului solid sub care, din acel punct, se vede circuitul electric $\left(H_a = -I\frac{d\Omega}{da}\right)$.

In această expresie, unghiul Ω este afectat de semnul +, atunci când curentul are sensul de rotaţie al burghiului care ar înainta dela circuit spre punctul respectiv.

Câmpul magnetic (H') este, *în regim raţionalizat* o mărime vectorială a cărei integrală de linie, dealungul oricărui contur închis, este egală cu suma curenţilor ale căror circuite sunt străbătute de acel contur închis.

Semnele algebrice ale curenţilor se stabilesc după aceeaşi regulă, ca şi în cazul regimului clasic.

Intr'un mediu magnetic omogen, câmpul magnetic produs de un circuit electric într'un punct al spaţiului are o componentă H'_a pe o direcţie oarecare a, trecând prin acel punct, definită prin:

$$H'_a = -\frac{I}{4\pi}\frac{d\Omega}{da},$$

în care I şi Ω au aceleaşi semnificaţii ca în cazul regimului clasic.

Permeabilitatea magnetică a vidului, μ_0. Intr'un punct oarecare al spaţiului vid, permeabilitatea magnetică este raportul dintre inducţia magnetică şi câmpul magnetic în punctul respectiv.

Permeabilitatea magnetică (absolută), μ. Pentru un corp isotrop, este raportul dintre inducţia magnetică şi câmpul magnetic în punctul respectiv al acelui mediu magnetic.

Pentru un corp anisotrop, permeabilitatea magnetică în direcţia uneia dintre axele principale este raportul componentei inducţiei magnetice şi componentei intensităţii câmpului magnetic, luate în corp, dealungul acestei axe.

Proprietatea permeabilităţii, atât în regim clasic cât şi în regim raţionalizat, este aceeaşi, cu precizarea că valorile câmpului magnetic se introduc potrivit regimului respectiv.

In consecinţă, valoarea permeabilităţii în regimul clasic este diferită de aceea din regimul raţionalizat.

In regim raţionalizat valoarea permeabilităţii magnetice este de 4π ori mai mare ca în regim clasic pentru aceeaşi situaţie fizică.

Permeabilitatea magnetică relativă, μ_r. Raportul dintre permeabilitatea magnetică a unui mediu şi permeabilitatea magnetică a vidului:

$$\mu_r = \mu/\mu_0 .$$

Permeabilitatea magnetică relativă este un număr cu aceeaşi valoare în ambele regimuri.

Forţa magnetomotoare, F F_m, $\mathfrak{F}$. Forţa magnetomotoare totală a unui sistem de circuite electrice este egală cu lucrul câmpului magnetic dealungul unui contur închis, străbătând toate acele circuite.

Câmpul magnetic este introdus cu valoarea sa din regimul clasic, ori raţionalizat, potrivit regimului în care se lucrează.

Potenţialul magnetic scalar, V, V_H. Potenţialul magnetic scalar într'un punct este integrala liniară a intensităţii câmpului magnetic, dela acel punct până la alt punct ales arbitrar, ca origine de potenţiale, cu condiţia ca drumul de integrare să fie dispus într'un mediu lipsit de o densitate de curent electric.

Câmpul magnetic este introdus cu valorile clasice, ori raţionalizate, potrivit regimului în care se lucrează.

Intr'un mediu magnetic omogen, potenţialul magnetic produs de un circuit într'un punct este egal cu:

$$V = I \cdot \Omega \qquad \text{în regim clasic;}$$

$$V' = \frac{1}{4\pi} I \cdot \Omega \qquad \text{în regim raţionalizat.}$$

în care I şi Ω au aceleaşi semnificaţii ca şi în expresiile corespunzătoare ale câmpului magnetic.

Aceste expresii presupun că s'a luat ca potenţial de origine acela al unui punct caracterizat prin $\Omega = 0$ (ca de exemplu un punct la infinit).

Diferenţa de potenţiale magnetice scalare între două puncte. Integrala liniară a intensităţii câmpului magnetic între acele două puncte, cu condiţia ca drumul de integrare să fie dispus într'un mediu lipsit de o densitate de curent electric.

Potenţial magnetic vectorial, A. O mărime vectorială al cărei rotor este egal cu vectorul inducţiei magnetice în acel punct.

Atât expresia cât şi valoarea potenţialului vectorial sunt identice în ambele regimuri (clasic şi raţionalizat).

Moment magnetic, M_m $\mathfrak{M}$. Mărime dirijată după linia polilor unei bare magnetice, al cărei *modul* este egal cu raportul dintre momentul cuplului mecanic exercitat asupra acelui magnet, într'un câmp magnetic uniform şi intensitatea acelui câmp, poziţia magnetului fiind normală pe câmp, astfel ca să intervină cuplul de moment maxim $|M| = M_m \times |H|$.

O altă formă de prezentare a mărimii de moment magnetic este raportul dintre momentul cuplului mecanic şi câmpul de inducţie magnetică, în aceleaşi condiţii fizice, ca în cazul precedent $|M| = M'_m \times |B|$.

M_m şi M'_m au valori diferite. Cuplul mecanic M rămâne însă acelaşi. Permeabilitatea magnetică a mediului, presupus omogen, este înglobat în M_m în prima formă de prezentare şi în B în a doua formă. $M'_m = M_m/\mu$.

Momentul magnetic al unei bare este suma vectorială a momentelor magnetice elementare din interiorul barei.

In cazul primei forme de prezentare, valoarea momentului magnetic este diferită în regim clasic şi raţionalizat potrivit valorii corespunzătoare a câmpului magnetic.

In a doua formă, valoarea momentului magnetic este independentă de raționalizare.

Intensitatea de magnetizare, J, M. O mărime vectorială egală cu limita raportului dintre momentul magnetic al unui magnet și elementul său de volum, când acesta tinde spre zero.

Valoarea acestei mărimi este diferită în regim clasic și raționalizat, potrivit valorii corespunzătoare a momentului magnetic.

Susceptibilitate, $\varkappa$, χ_m. Raportul intensității de magnetizare a unui magnet, prin câmpul magnetic care o produce.

Valoarea este diferită în regim clasic și raționalizat, potrivit valorilor corespunzătoare de intensitate de magnetizare și de câmp magnetic.

Reluctanță, R, R_m, $\mathfrak{R}$. Raportul dintre forța magnetomotoare aplicată unui circuit magnetic și fluxul de inducție produs.

Valoarea este diferită în regim clasic și raționalizat, potrivit valorii corespunzătoare a forței magnetomotoare.

Permeanță Λ, *P.* Inversul reluctanței.

Masă magnetică, m. O sursă imaginară de câmp și flux magnetic, introdusă convențional pentru descrierea fenomenelor magnetice și presupusă localizată sub forma a două cantități egale și de semn contrar, la cele două extremități ale unui magnet (poli magnetici). Masa magnetică este egală cu raportul dintre momenul magnetic al unei bare magnetice și lungimea sa.

Un solenoid de secțiune foarte mică, într'un mediu magnetic omogen, este echivalent, din punct de vedere al efectelor magnetice create în afara sa, cu două mase magnetice ipotetice la extremitățile sale

$$\pm m = \pm \mu \cdot w_1 \cdot s\, I,$$

în care μ este permeabilitatea, presupusă uniformă, w_1 numărul de spire pe unitatea de lungime, s secțiunea și I curentul.

Valoarea masei magnetice diferă în regim clasic și raționalizat, potrivit valorii corespunzătoare de permeabilitate magnetică. Masa magnetică, nefiind o realitate fizică, nu este indispensabilă la prezentarea fenomenelor magnetice.

15. **Mărimi electromagnetice și electroenergetice.** *Energie W.* Capacitatea de a săvârși un lucru. Este o entitate fizică, putând afecta un sistem în diferite forme, transformabile una într'alta pe baza principiului conservării și ale căror manifestări mai importante sunt energiile: mecanică, electromagnetică, radiantă, termică, chimică.

Fluxul magnetic total al unui circuit electric : Suma produselor dintre fluxurile magnetice ale tuburilor elementare de inducție magnetică și numărul de spire ale circuitului electric care contribue la formarea tuburilor de inducție respective.

Fluxul magnetic total de inducție mutuală al unui circuit electric. Fluxul magnetic total al unui circuit electric dat, provocat de curenții electrici ai altor circuite.

Inductanța proprie, L. Pentru un circuit filiform închis:

Raportul fluxului total de inducție magnetică, înconjurat de spirele unui circuit, prin curentul care-l străbate, cu condiția ca acel flux să fie provocat excluziv de curentul respectiv.

Pentru un circuit oarecare:

Raportul dintre energia magnetică datorită unui curent străbătând acel circuit, prin jumătate din pătratul intensității acelui curent.

Inductanță mutuală a două circuite, M. (L_{mn}). Raportul dintre fluxul magnetic total al unuia din circuite și intensitatea curentului din celălalt circuit, cu condiția ca curentul electric să existe numai în acest din urmă circuit.

Puterea specifică radiantă, S. O mărime vectorială, al cărei flux, străbătând un contur închis, reprezintă energia transmisă prin suprafața închisă de acel contur în unitatea de timp, în sensul propagării acelei energii electromagnetice.

Sensul acestui vector este acela al produsului vectorial al câmpurilor electric și magnetic.

Expresia acestui vector denumit vectorul Umov-Poynting este:

$$\overline{S} = \frac{1}{4\pi}[\overline{E} \times \overline{H}] \qquad \text{în regim clasic;}$$

$$\overline{S}' = [\overline{E} \times \overline{H}'] \qquad \text{în regim raționalizat.}$$

Valoarea vectorului Umov-Poynting este identică în ambele regimuri: clasic și raționalizat.

Perioadă, T. Intervalul minim al variabilei independente, după care se reproduc aceleași caracteristice ale unui fenomen periodic.

Frecvență, f. Raportul unui număr întreg de perioade, prin intervalul de timp corespunzător.

*) *Pulsație* (în regim sinusoidal) ω. Produsul frecvenței unui fenomen sinusoidal prin factorul $2\,\pi$.

*) *Rezistența în curent sinusoidal, R.* Raportul componentei tensiunii în fază cu curentul, prin intesitatea acelui curent.

*) *Reactanța inductivă* $X_L = L\,\omega$. Produsul inductanței prin pulsație.

*) *Reactanța capacitivă* $X_c = -\dfrac{1}{C\omega}$. Inversul, schimbat de semn, al produsului capacității prin pulsație.

*) *Reactanța* (totală sau efectivă) *X.* Raportul componentei tensiunii, în cuadratură cu curentul prin acest curent.

*) *Impedanța, Z* : raportul tensiunii la bornele unui circuit, prin curentul care-l străbate.

*) *Impedanța vectorială,* $\overline{Z}$. Mărimea vectorială având ca valoare (modul) impedanța și ca fază (argument) defazajul dintre curent și tensiune. Faza este pozitivă când tensiunea este defazată înainte față de curent.

*) *Admitanța, Y.* Inversul impedanței.

*) *Admitanța vectorială,* $\overline{Y}$. Mărime vectorială având ca valoare (modul) admitanța și ca fază defazajul dintre tensiune și curent. Faza este pozitivă când curentul este defazat înainte asupra tensiunii.

*) *Conductanța G.* Raportul componentei curentului în fază cu tensiunea la bornele unui circuit, prin acea tensiune. Conductanța este deci raportul rezistenței prin patratul impedanței.

*) *Susceptanța, B.* Raportul componentei curentului în cuadratură cu tensiunea la bornele unui circuit, prin acea tensiune.

Putere medie, p_m. Raportul dintre energie sau lucru, și timpul în care acea energie sau acel lucru a fost efectuat sau absorbit de sistemul electric respectiv.

In fenomenele periodice, se consideră puterea medie în timpul unei perioade.

Putere instantanee, p: Valoarea puterii circuitului electric în momentul dat. Puterea instantanee este limita puterii medii, când timpul devine infinit de mic.

Putere fluctuantă, p_f. Diferența dintre puterea instantanee și medie. Ea reprezintă termenul alternativ al puterii instantanee.

Putere activă, P. Sinonim cu puterea medie într'un circuit parcurs de un curent alternativ.

In regim sinusoidal, este egală cu produsul tensiunii eficace, prin componenta curentului în fază cu ea. In regim nesinusoidal, suma puterilor active ale tuturor armonicelor.

*) Definiție valabilă numai în curenți sinusoidali.

Putere reactivă, Q. In regim sinusoidal, produsul tensiunii (sau forţei electromotoare) eficace, prin componenta curentului în cuadratură cu ea; în regim nesinusoidal, se consideră puterile reactive pe armonice.

Putere aparentă, S. Produsul curentului eficace prin forţa electromotoare sau tensiunea eficace.

Putere deformantă, D. Mărime caracterizând situaţia unei deformări electrice a curentului faţă de tensiune în regim nesinusoidal, fiind în corelaţie cu puterile aparente, reală şi reactivă, printr'o expresie de forma:

$$S^2 = \left(\sum P_n\right)^2 + \left(\sum Q_n\right)^2 + D^2,$$

în care P_n şi Q_n sunt puterile reale şi reactive pe fiecare armonică de ordinul n, iar $\sum$ se extinde la totalitatea armonicelor.

16. Mărimi fotometrice

Flux luminos, Φ. Debit al energiei radiante, evaluat prin senzaţia luminoasă produsă.

Intensitate luminoasă, $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$. Raportul dintre fluxul luminos emis într'un unghi solid elementar de pe acea direcţie şi acel unghi solid elementar.

Iluminare, E. Iluminarea într'un punct al unei suprafeţe S este densitatea, în acel punct, a fluxului luminos primit pe suprafaţa $E = \frac{d\Phi}{dS}$.

Radianţă (radiere luminoasă), *R.* Densitatea fluxului luminos emis sau radiat într'un punct, prin elementul de suprafaţă radiantă S.

Strălucirea unei suprafeţe, B. Raportul intensităţii luminoase emise uniform într'o direcţie dată, prin suprafaţa proiectată de această suprafaţă pe un plan perpendicular pe direcţia considerată

$$B = \frac{I}{S\cos\alpha}.$$

Cantitate de lumină, Q. Produsul fluxului luminos prin durata sa.

17. Mărimi calorice

Cantitatea de căldură, Q. Una din formele energiei, manifestată sub formă calorică.

Temperatură, θ, t: mărime caracterizând senzaţia de căldură şi proporţională cu energia calorică înmagazinată de materie.

Căldură specifică, c. Cantitatea de căldură necesară pentru a ridica temperatura unităţii de masă a unui corp omogen cu o unitate de temperatură.

Coeficient de dilatare termică. Coeficient indicând creşterea relativă a volumului unui corp, la ridicarea temperaturii cu o unitate de temperatură.

Conductivitate termică. Cantitatea de căldură care se propagă în unitatea de timp, printr'o secţiune unitate a unui corp omogen şi isotrop, pe distanţa unitate căreia i se aplică o diferenţă de temperatură egală cu unitatea.

C. Sisteme de unităţi

18. Generalităţi. Sistemele de unităţi, în sensul celor arătate la § *A*, punctul 11, diferă între ele atât prin alegerea convenţională a unităţilor fundamentale, cât şi prin definirea unităţilor derivate potrivit regimului de coerenţă adoptat, ceeace fixează valoarea şi poziţia factorilor numerici în formulele fizice respective.

19. Sistemul metric. Acest sistem are originea în legea franceză din 7 Aprilie 1795, prin care s'a introdus prima orânduială în unităţile de măsură.

Ca etalon pentru unitatea de lungime, s'a adoptat sfertul meridianului pământesc, a cărui a zecea milioana parte a fost numită *metru.*

Unitatea de masă, denumită *kilogram,* a fost definită ca fiind masa unui decimetru cub de apă distilată la 4°C.

Realizarea materială a etaloanelor s'a dovedit mai târziu că nu mai corespunde riguros principiilor din legea dela 1795. In aceste condiţii, definiţiile acestor unităţi s'au modificat după cum se arată mai departe (Capitolul « Unităţi de măsură în sistemul practic »). Cele două unităţi, complectate apoi şi cu unitatea de timp, au condus şi la definirea câtorva unităţi derivate. Sistemul metric nu constitue totuşi decât un *sistem de etaloane,* la care ne referim apoi spre a stabili o serie de sisteme de unităţi complecte.

20. Sistemul mecanic. Acest sistem a fost elaborat ulterior sistemului metric, pe măsura desvoltării aplicaţiilor mecano-tehnice. El se bazează pe următoarele trei unităţi fundamentale:

Unitatea de lungime: metrul.

Unitatea de forţă, greutatea etalonului de masă stabilit de sistemul metric. Această unitate este deci *kg forţă.*

Unitatea de timp, secunda: a 86 400 parte a zilei solare medii.

Referinţele dimensionale ale acestui sistem sunt deci L.F.T.

Printre unităţile derivate în acest sistem sunt de menţionat:

Unitatea de lucru mecanic sau energie: kilogrammetru (kgm).

Unitatea de putere, kilogrammetru pe secundă (kgm/s).

Se mai întrebuinţează o unitate de putere necoerentă, *cal putere* (CP), definită prin 1 CP = 75 kgm/s, cât şi o unitate de energie *cal-oră* = 75 × 3600 kgm.

Unitatea de masă în acest sistem, *nu este kilogrammasa,* ci 9,81 × kilogram masă. Această unitate nu are nume.

Relaţia dintre unităţile acestui sistem şi cele practice sunt redate în tabela 5 dela § *E*.

Acest sistem se mai notează M *Kf* S (A nu se confunda cu sistemul practic MKS (metru, kilogram masă, secundă) descris la punctul 25 şi diferit de acesta).

Sistemul mecanic nu se extinde în electricitate şi magnetism.

21. Sistemul CGS electromagnetic (CGSem). Pentru stabilirea unui sistem coerent, cu posibilitate de extensiune în toate domeniile ştiinţelor fizice, Congresul electricienilor din 1881 a elaborat sistemul de unităţi CGSem, bazat pe următoarele unităţi fundamentale:

Lungime, centimetru (cm), *masă,* gramul (g), *timp,* secunda (s), *permeabilitate,* permeabilitatea vidului (μ_v).

Referinţele sale dimensionale sunt deci LMTμ. Totuşi, se obişnueşte adeseori să se facă abstracţie de dimensiunea μ, referind acest sistem, de fapt cu patru unităţi fundamentale, numai la trei referinţe dimensionale, LMT. Se pot uşor deduce dimensiunile acestui sistem din acelea din sistemul de referinţă LMTI (tabela 11 dela § *E*). In adevăr, se vede în acea tabelă că dimensiunea permeabilităţii este $[\mu] = (LMT^{-2}\,I^{-2})$, de unde se deduce $[I] = (L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}\,\mu^{-1/2})$. De aci rezultă:

Regulă: dacă în sistemul dimensional LMTI se înlocueşte [I] prin valoarea de mai sus, se obţin expresiile dimensionale LMTμ.

In afară de denumirile de centimetru, gram, secundă, au căpătat nume în acest sistem şi următoarele unităţi:

Dyna (dyn), unitatea de forţă, este acea forţă care imprimă unei mase de un gram o acceleraţie de 1 cm/s².

Erg (erg), unitatea de lucru mecanic, este lucrul unei forţe de o dynă, pe o lungime de 1 *cm* în direcţia sa.

Oersted (Oe), unitatea de câmp magnetic, este câmpul produs în vid de un curent electric, liniar, practic infinit, având valoarea de o unitate CGS de curent, la o distanţă de 2 cm de axa curentului.

Gauss (gauss), unitatea de inducţie magnetică, este inducţia magnetică produsă în vid de un câmp magnetic de un *oersted*.

Gilbert (Gb), unitatea de forţă magnetomotoare, este diferenţa de potenţial magnetic creată de un câmp magnetic de 1 oersted în direcţia sa, pe o distanţă de 1 cm şi fără ca acest drum parcurs să străbată circuitul unui curent electric.

Maxwell (maxwell), unitatea de flux magnetic, este fluxul magnetic produs de un câmp uniform de 1 gauss, străbătând o suprafaţă de 1 cm² situată normal pe câmp.

In sistemul CGSem, deoarece permeabilitatea vidului μ_v este unitate, rezultă pentru valoarea permeabilităţii vidului $\mu_0 = 1$, iar din expresia vitezei *c* a undelor electromagnetice în vid, se deduce $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

Pentru a calcula valoarea oricărei mărimi în CGSem, lungimile se exprimă în cm, masa în g, timpul în s, $\mu_0 = 1$ şi $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, toate mărimile derivate fiind exprimate coerent cu acestea.

Sistemul CGSem este utilizat mai ales în studiile ştiinţifice teoretice şi nu este folosit în lucrările tehnice industriale practice. El este considerat ca un sistem de bază, faţă de care se exprimă unităţile altor sisteme.

22. Sistemul CGS electrostatic (CGSes). Acest sistem, o variantă a sistemului CGS, este caracterizat prin unităţile fundamentale: *centimetrul* (cm,) *gramul* (g), *secunda* (s) *constanta dielectrică a vidului* (ε_v).

Referinţele sale dimensionale sunt L.M.T.ε. Totuşi, procedând în mod impropriu, analog ca la sistemul CGSem, se obişnueşte adeseori a se face abstracţie de dimensiunea ε şi a se limita numai la dimensiunile LMT.

In acest sistem, toate dimensiunile se deduc ca la sistemul CGSem, prin următoarea:

Regulă: dacă în sistemul dimensional LMTI se înlocuieşte

$$[I] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right],$$

se obţin expresiile dimensionale LMTε.

Inafară de unităţile geometrice cinematice şi mecanice, care au acelaşi nume ca în sistemul CGSem, a căpătat nume în sistemul CGSes şi:

Franklin, unitatea de sarcină electrică, este acea sarcină electrică punctuală care, la o distanţă de 1 cm de o sarcină electrică egală, este supusă în vid la o forţă de o dynă.

In sistemul CGSes, valoarea constantei dielectrice în vid este $\varepsilon_0 = 1$ şi deci valoarea permeabilităţii în vid $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

Pentru a calcula valoarea oricărei mărimi în CGSes, lungimea se exprimă în cm, masa în g, timpul în s, $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ şi $\varepsilon_0 = 1$, toate mărimile derivate fiind exprimate coerent cu acestea.

Sistemul CGSes este folosit uneori în studiile ştiinţelor teoretice din domeniul electrostatic. Pentru a se evita orice confuzii, este preferabil a se renunţa la folosirea acestui sistem şi, în orice caz, să se menţioneze clar când este utilizat.

La § *E* este dată o situaţie comparativă cu sistemul CGSem.

23. Sistemul CGS electrodinamic. Acest sistem este bazat tot pe unităţile *centimetru*, *gram*, *secundă* şi, în plus, pe o *unitate de curent electrodinamică*, care ar fi: intensitatea unui curent constant care, menţinut în doi conductori paraleli reclilinii, de lungime practic infinită, de secţiune circulară neglijabilă şi situaţi la 1 cm unul de altul în vid, ar produce între ei o forţă egală cu 1 dynă pe cm lungime.

In aceste condiţii:

$$\text{Unitatea CGS electrodinamică} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{unitate CGSem.}$$

Acest sistem n'a intrat în domeniul aplicaţiilor practice.

24. Sistemul MTS. Acest sistem, adoptat legal în Franţa (1919), se bazează pe următoarele unităţi fundamentale:

Lungime: metrul.

Masă: tona masă = 10^6 g.

Timp: secunda.

Au mai căpătat nume în acest sistem următoarele unităţi derivate:

Unitatea de forţă: Sthena (sn) = 10^8 dyne.

Unitatea de presiune: Pieza (pz) = $10^4 \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}$.

Referinţele dimensionale ale acestui sistem sunt LMT.

Sistemul MTS s'a limitat numai la mecanică. El nu are o extindere coerentă în Electricitate şi Magnetism şi nu se foloseşte ca un sistem practic general.

25. Sistemul MKS. Acest sistem, cunoscut şi sub numele de sistemul „Giorgi" se bazează pe unităţile fundamentale:

Lungime: metrul.

Masă: kg masă = 10^3 g.

Timpul: secunda.

Printre unităţile derivate ale acestui sistem sunt:

Unitatea de forţă: 1 Newton (N) = 10^5 dyne = 1 milistenă = $\frac{1}{9{,}81}$ kgf.

Unitatea de lucru mecanic: 1 Joule = 10^7 erg.

Unitatea de putere: Watt = $\frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ secundă}}$.

Acest sistem se extinde în mod foarte comod şi coerent în domeniul unităţilor practice electrice şi magnetice (a se vedea punctul următor); el este deasemenea foarte comod în mecanică; are marele avantaj că denumirea de *gram*, *kilogram*, sunt rezervate excluziv masei şi astfel dispare orice confuzie între masă şi greutatea unei mase (adică forţă).

Referinţele dimensionale în mecanică ale acestui sistem sunt tot LMT.

26. Sistem practic general. Sistemul MKS (punctul precedent) a putut fi uşor extins în Electricitate şi Magnetism, complectându-se cele trei unităţi fundamentale cu o a patra unitate din grupa unităţilor practice electrice şi magnetice,

oricare ar fi această unitate şi obţinându-se astfel un sistem practic general, valabil în întreg domeniul din Geometrie şi până în Electricitate şi Magnetism. El reprezintă deci o fuziune logică între sistemul MKS din mecanică şi sistemul practic consacrat din Electricitate şi Magnetism.

Se dă totuşi preferinţa a se completa sistemul MKS cu *amperul*, drept a patra unitate fundamentală, realizându-se astfel sistemul practic MKSA, cu dimensiunile LMTI.

In sistemul practic constanta dielectrică cât şi permeabilitatea magnetică a vidului nu mai sunt egale cu unitatea.

Pentru detalii, a se vedea § *E* al prezentului capitol.

Acesta este sistemul azi adoptat în R.P.R., prin STAS 737-49, 738-49, 739-49, 862-49.

27. Sistemul internaţional şi absolut. Sistemele de unităţi empirice sau practice impuneau alegerea unor etaloane uşor reproductibile, care să asigure definirea precisă, prin măsurători, a unităţilor fundamentale.

Odată cu stabilirea unităţilor practice electrice, s'au definit şi o serie de etaloane (Congresul din 1881).

Pentru unitatea practică de rezistenţă, 1 ohm = 10^9 CGSem, a fost definit următorul etalon:

« Un ohm este rezistenţa opusă unui curent invariabil, de o coloană de mercur de o secţiune uniformă, la temperatura de 0° C, având o lungime de 106,3 cm şi o masă de 14,4521 *g* ».

Pentru unitatea practică de curent, a fost definit etalonul:

« Un amper este intensitatea de curent uniformă, care depune pe secundă 0,001118 g argint prin electroliza unei soluţii apoase de nitrat de argint ».

Aceste etaloane au căpătat numele de « unităţi internaţionale » şi au permis astfel definirea tuturor unităţilor practice internaţionale din domeniul electricităţii şi al magnetismului.

Ulterior, s'a dovedit că aceste definiţii nu corespund riguros valorilor teoretice. Ohmul şi amperul internaţional nu sunt riguros egale cu 10^9 şi respectiv 10^{-1} unităţi de rezistenţă şi de curent din sistemul CGSem.

Astfel s'a ajuns la alte definiţii ale unităţilor practice, magnetice şi electrice, care folosesc permeabilitatea vidului ca etalon de permeabilitate.

Aceste noi definiţii au condus la unităţile zise *absolute*. Conferinţa internaţională de Măsuri şi Greutăţi a recomandat punerea în aplicare a *unităţilor absolute*. Unităţile practice dela § *E* al prezentului capitol sunt definite în unităţi absolute.

Relaţia dintre unităţile internaţionale şi cele absolute este redată mai departe la § *E*.

Definirea unităţilor din diferitele sisteme de unităţi se face în unităţi absolute, nu în cele internaţionale.

Diferenţa între unităţile practice internaţionale şi cele absolute este cu totul neînsemnată şi nu prezintă importanţă pentru calculele uzuale.

28. Sisteme simetrice (Sistemele Giorgi şi Calantarov). Dintre sistemele practice şi deci cu patru unităţi fundamentale independente, se disting, printr'o deosebită simetrie şi simplicitate, sistemele care *se bazează pe numai două mărimi din domeniul mecanicei*, deobicei lungime şi timp şi două unităţi alese din domeniul electromagnetic, astfel ca ele să reprezinte o simetrie în raport cu fenomenele exprimate prin legile câmpurilor electromagnetice (Maxwell).

G. Giorgi a propus un astfel de sistem simetric bazat pe patru unităţi fundamentale: *metru, secunda, amper, volt,* deoarece aproape toate măsurătorile electrice se pot reduce la măsurători de curent şi de tensiune.

Iată câteva dimensiuni în acest sistem:

Mărimi electrice	*Mărimi magnetice*
$Q = T.I$	$m = T.V$
$E = L^{-1} V$	$H = L^{-1} I$
$D = L^{-2} TI$	$B = L^{-2} TV$
$\psi = TI$	$\Phi = TV$
$\varepsilon = L^{-1} TI V^{-1}$	$\mu = L^{-1} TI^{-1} V$

Unul din avantajele principale ale acestor feluri de sisteme este faptul că din formula dimensională a diferitelor mărimi se pote recunoaşte imediat şi felul cum este definită şi cum se poate măsura mărimea respectivă, ceeace în sistemele absolute, în general, nu apare evident. Inafară de aceasta, sistemele sunt coerente în întregul domeniu al fizicii.

Sistemul propus încă în anul 1929 de savantul sovietic *Calantarov* are ca mărimi fundamentale electromagnetice sarcina electrică [Q] şi fluxul magnetic [φ], pe lângă lungime [L] şi timp [T]. Prin această alegere, se obţin formule dimensionale deosebit de simple pentru majoritatea mărimilor electromagnetice, energetice şi mecanice, mai ales dacă se aleg ca unităţi fundamentale, unităţile practice corespunzătoare: adică *metrul, secunda, coulombul* şi *weberul* (=10^8 Maxwell).

Sistemul Calantarov pune în evidenţă simetria şi analogia perfectă, în care apar dimensiunile electrice, magnetice şi energetice în sistemul LTQΦ astfel cum se vede din tabela de mai jos:

Electricitate	*Magnetism*	*Energetică*
Sarcină electrică Q	Flux magnetic Φ	Acţiune $Q\Phi$
Intensitate QT^{-1}	Tensiune ΦT^{-1}	Energie $Q\Phi T^{-1}$
Variaţia intensităţii QT^{-2}	Variaţia tensiunii ΦT^{-2}	Putere $Q\Phi T^{-2}$
Deplasare electrică QL^{-2}	Inducţia magnetică ΦL^{-2}	Acţiune specifică $Q\Phi L^{-2}$
Intensitatea câmpului electric $\Phi L^{-1} T^{-1}$	Intensitatea câmpului magnetic $QL^{-1} T^{-1}$	Forţă $Q\Phi L^{-1} T^{-1}$
Constanta dielectrică $Q\Phi^{-1} L^{-1} T$	Permeabilitate $Q^{-1} \Phi L^{-1} T$	Masa $Q\Phi L^{-2} T$

Această comparaţie arată că relaţiile dimensionale pot să descopere dependenţe şi analogii profunde între diferitele mărimi fizice.

Prof. Ing. C. Budeanu a arătat că, în conformitate cu caracteristica principală a sistemelor simetrice, se pot imagina multe sisteme din această categorie, ca de exemplu: LTEH; LTDB; LTψΦ; LTQm; LTV𝔉; LTIV; LTQΦ; etc.

Toate conduc la următoarele proprietăţi esenţiale:

Expresii dimensionale foarte simple, fără exponenţi fracţionali şi simetrice în raport cu mărimile electrice şi magnetice respective.

Simetria lor are, de fapt, la bază proprietăţile legilor câmpurilor electromagnetice (Maxwell).

Toate aceste sisteme scot în evidenţă justificarea fizică a patru mărimi fundamentale în electromagnetism.

Singurele sisteme simetrice, însă, care au fost mai îndeaproape luate în considerare, sunt sistemele LTIV (Giorgi) şi LTQΦ (Calantarov).

Aceste sisteme nu s'au introdus oficial, cu toate avantajele lor, de oarece suprimarea *masei* dintre mărimile fundamentale constitue o dificultate.

Dintre toate sistemele simetrice, acela realizat de Prof. Calantarov se bazează pe mărimile fundamentale fizice ale electromagnetismului Q şi Φ, în concordanţă cu corelaţia acestor mărimi arătată de Acad. Prof. Mitkevici. Pe de altă parte, cantitatea de electricitate Q la baza acestui sistem are un rol fundamental în constituţia materiei.

In orice caz, independent de orice adoptare oficială, *sistemul Calantarov* rămâne un avantajos instrument de investigaţie ştiinţifică şi în special de *analiză dimensională.*

29. Sistemul Gauss. Acest sistem are la bază ideia de a fuziona ambele sisteme CGS *electromagnetic* şi *electrostatic* adoptând ca unităţi fundamentale: *centimetru* (cm), *gram masă* (g), *secunda* (s), *permeabilitatea vidului* (μ_v) şi *constanta dielectrică* sau *permitivitatea vidului* (ε_v). Principalele caracteristice ale acestui sistem sunt: în sistemul Gauss atât valoarea permeabilităţii vidului (μ_0) cât şi acea a constantei dielectrice a vidului (ε_0) sunt ambele 1.

Sistemul Gauss este de fapt o nouă variantă de sistem CGS, în care toate mărimile magnetice sunt scrise în unităţi electromagnetice, iar toate mărimile electrice sunt scrise în unităţi electrostatice.

Sistemul Gauss este de fapt un sistem cu cinci unităţi fundamentale alese arbitrar.

Expresiunile μ şi ε în sistemul Gauss sunt, în general, considerate ca factori fără dimensiuni, deşi se referă la mărimi a căror unităţi, au caracterul de unităţi fundamentale.

In aceste condiţii, dimensiunile tuturor mărimilor electromagnetice în sistemul Gauss sunt exprimate numai în funcţie de dimensiunile lungime [L], masă [M] timp[T].

S'ar putea introduce în expresiile dimensionale şi dimensiunile [μ] şi [ε], dar această procedură nu este uzuală în folosirea sistemului Gauss.

In aceste condiţii, când deci μ şi ε sunt considerate ambele fără dimensiuni, în sistemul Gauss mărimile: *E, D, H, B* au toate aceleaşi dimensiuni $L^{-1/2}\ M^{1/2}\ T^{-1}$ şi deasemeni capacitatea şi inductanta au ambele aceleaşi dimensiuni L.

Situaţia e diferită în toate celelalte sisteme cu patru unităţi fundamentale ca sistemul CGSem, CGSes, sistemul practic sub orice formă, în care toate mărimile mai sus menţionate fiind distincte, au dimensiuni diferite între ele.

Expresiile μ şi ε în sistemul Gauss, echivalează de fapt cu aceea ce se numeşte permeabilitate relativă (μ_r) şi constantă dielectrică relativă (ε_r) în sistemele practice generale, în care se face o distincţie între mărimile μ, ε şi valorile lor relative.

Expresia $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ în sistemul Gauss este un factor numeric fără dimensiuni, pe când în orice sistem cu 4 unităţi fundamentale, ca: CGSem, CGSes, sistemele practice sub orice formă raţionalizate ori nu, expresia $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ după cum a scris-o însuşi Maxwell, are dimensiunea unei viteze şi este egală cu valoarea vitezei undelor electromagnetice în sistemul respectiv şi în mediul cu μ şi ε.

In spaţiul vid această viteză devine $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}$ egală cu viteza luminii *c*.

Se redau comparativ câteva expresii electromagnetice scrise atât în sistemul Gauss cât şi în oricare din sistemele cu patru unităţi fundamentale (ca acelea mai sus menţionate):

Expresia	*Sistem Gauss*	*Sistem cu patru unităţi*	
Legea inducţiei	$e = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$	$e = -\frac{d\Phi}{dt}$	
Legea circuitului magnetic	$c\int_c \overline{H}\cdot d\overline{l} = (\sum i)$	$\int_c \overline{H}\cdot d\overline{l} = (\sum i)$	raţionalizat.
	$c\int_c \overline{H}\cdot d\overline{l} = \sum(4\pi i)$	$\int_c \overline{H}\cdot d\overline{l} = \sum(4\pi i)$	clasic
Viteza undelor electromagnetice	$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$	

şi mai multe alte expresii se prezintă analog.

In toate aceste expresii *c* reprezintă, de fapt, raportul între unităţile electromagnetică şi electrostatică de sarcină electrică.

In sistemul Gauss unităţile derivate sunt cu totul diferite de unităţile practice uzuale.

Astfel, de exemplu, în acest sistem unitatea derivată de f.e.m. este 300 V, aceea de curent este $1/3.10^9$ A, etc.

Aceste unităţi Gauss nici nu au nume.

Sistemul Gauss nu are aplicaţii curente în tehnică.

Sistemul Gauss este, de fapt, în afară de prevederile STAS 737-49.

D. Operaţia raţionalizării

30. Consideraţii şi proprietăţi generale ale raţionalizării. In *Electricitate*, expresia fizică a fluxului electric este proporţională cu sarcina *Q* care-l produce şi cu unghiul solid Ω în care acest flux se distribue sub forma:

$$\Psi = K_1\, Q\, \Omega \tag{30.1}$$

în care K_1 este o constantă numerică de proporţionalitate, care se defineşte prin alegerea convenţională a unităţilor respective.

Fluxul emis printr'o suprafaţă închisă, având deci $\Omega_t = 4\pi$, devine:

$$\Psi = K_1\, 4\pi\, Q. \tag{30.2}$$

Deasemenea o sarcină electrică distribuită în spaţiu cu o densitate variabilă ρ produce într'un punct *M*, situat la o distanţă *r* de fiecare punct de densitate ρ, un potenţial electric:

$$V = K_1 \int_{vol} \frac{\rho\, dV}{\varepsilon r} \tag{30.3}$$

în care K_1 are aceeaşi semnificaţie şi valoare ca şi constanta din (30.1).

In *Electromagnetism*, observaţia fizică de bază este aceea a câmpului magnetic în jurul unui curent rectiliniu, practic infinit (Biot şi Savart):

$$H = K_2 \frac{i}{r}, \tag{30.4}$$

în care K_2 este deasemenea o constantă de proporţionalitate, care se poate determina numai prin alegerea convenţională a unităţilor.

Din această expresie, se deduce: câmpul produs de un curent infinit mic (Laplace):

$$dH = \frac{K_2}{2}\,\frac{i\,dl\cdot\sin\alpha}{d^2}, \tag{30.5}$$

apoi, potenţialul magnetic:

$$V = \frac{K_2}{2} I\Omega, \tag{30.6}$$

în care Ω este unghiul solid sub care, din punctul respectiv, se vede circuitul străbătut de curentul I, ceeace conduce apoi la noţiunea de forţă magnetomotoare (şi deci pentru $\Omega_t = 4\pi$):

$$\mathfrak{F} = \frac{K_2}{2} I\Omega_t = \frac{K_2}{2} 4\pi I. \tag{30.7}$$

In relaţiile (30.5), (30.6), (30.7), K_2 are aceeaşi semnificaţie ca în relaţia (30.4).

Constantele K_1 şi K_2 pot avea o infinitate de valori, potrivit convenţiilor făcute asupra unităţilor adoptate.

In toată teoria clasică a electricităţii şi magnetismului, s'au ales unităţile astfel, încât $K_1 = 1$ şi $K_2 = 2$.

Mai târziu, Heaviside, urmărind suprimarea factorului 4π din anumite formule, ceeace a condus inevitabil la apariţia lui în alte formule, a propus operaţia «raţionalizării», care implică alegerea unor alte unităţi pentru unele dintre mărimile electrice şi magnetice, astfel încât în relaţiile de mai sus factorii numerici devin:

$$K_1 = \frac{1}{4\pi} \quad \text{şi} \quad K_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

In aceste condiţii, cele şapte formule anterioare capătă forma lor definitivă prin stabilirea valoriilor următoare ale celor două constante, precum urmează:

Regim clasic	*Regim raţionalizat*
$K_1 = 1$	$K_1 = \frac{1}{4\pi}$
$K_2 = 2$	$K_2 = \frac{1}{2\pi}$

Fiecare din sistemele C.G.S. şi M.K.S. poate fi raţionalizat.

In tabela 8—3 dela § E, se dă o situaţie comparativă detailată a expresiilor fizice, în cele două regimuri (clasic şi raţionalizat), în concordanţă cu valorile constantelor numerice, astfel cum se arată mai sus.

31. Trecerea dela regimul clasic la cel raţionalizat şi invers. Prin alegerea convenţională a constantelor K_1 şi K_2, se pot imagina diverse sisteme de raţionalizare, ceeace s'a şi propus dealtfel.

In prezent însă prin raţionalizarea folosită în practică se înţelege exprimarea relaţiilor dintre mărimi astfel ca în unele din ele să dispară factorul 4π ceeace are de urmare apariţia lui în altele.

Consecinţele acestei operaţii sunt următoarele:

Unităţile raţionalizate de *forţă magnetomotoare*, de *reluctanţă*, de *câmp magnetic*, de *constantă dielectrică*, de *flux electrostatic*, de *inducţie electrostatică*, sunt de 4π ori mai mari decât unităţile aceloraşi mărimi exprimate în regim clasic.

Unităţile raţionalizate de *permeabilitate*, de *permeanţă*, de *masă magnetică*, de *moment magnetic*, de *intensitate de magnetizare*, sunt de 4π ori mai mici decât unităţile aceloraşi mărimi exprimate în regim clasic.

Unităţile mărimilor de *flux magnetic*, de *inducţie magnetică*, de *câmp electric*, de *inductanţă*, de *capacitate*, unităţile tuturor celorlalte mărimi electrice uzuale (curent, tensiune, f.e.m., sarcină electrică, rezistenţă, etc.) cât şi toate unităţile *geometrice*, *cinematice*, *mecanice*, *energetice* (energie, putere, etc.), nu se modifică prin operaţia raţionalizării.

Valorile mărimilor, ale căror unităţi sunt supuse raţionalizării, se găsesc deci într'un raport invers faţă de acel al unităţilor respective.

In cele ce urmează, se redă relaţia dintre valorile exprimate în regim clasic şi valorile aceloraşi mărimi, exprimate în regim raţionalizat (notate cu prim).

Forţă magnetomotoare	$\mathfrak{F} = 4\pi\mathfrak{F}'$	Permeanţă	$\Lambda = \frac{1}{4\pi}\Lambda'$
Reluctanţă	$R = 4\pi R'$	Moment magnetic	$M_m = \frac{1}{4\pi} M'_m$
Constantă dielectrică	$\varepsilon = 4\pi\varepsilon'$	Intensitate de magnetizare	$J = \frac{1}{4\pi} J'$
Flux electric	$\Psi = 4\pi\Psi'$	Potenţial magnetic	$V_m = 4\pi V'_m$
Inducţie electrică	$D = 4\pi D'$	Câmp magnetic	$H = 4\pi H'$
Permeabilitate	$\mu = \frac{1}{4\pi}\mu'$		

Aplicaţie. Când se urmăreşte transformarea unei expresii din regim clasic în regim raţionalizat sau invers, se înlocuesc valorile acelor mărimi, potrivit corelaţiei de mai sus.

De exemplu:

Câmpul magnetic al unui curent rectiliniu:

In regim clasic: $H = \frac{2I}{r}$.

In regim raţionalizat: $H' = \frac{I}{2\pi r}$.

In această transformare, s'a folosit relaţia:

$$H = 4\pi H'.$$

32. Proprietăţile generale ale operaţiei raţionalizării. Principalele proprietăţi ale acestei operaţii sunt, în linii generale, următoarele:

Valoarea fluxului electrostatic emis printr'o suprafaţă închisă (teorema Gauss) devine, în sistem raţionalizat, identică cu aceea a sarcinilor electrice închise în acea suprafaţă.

In regim clasic, unitatea de flux electrostatic este fluxul emis de o sarcină unitate, prin unitatea de unghi solid, pe când în regim raţionalizat, unitatea de flux electrostatic este fluxul emis de unitatea de sarcină electrică, în întregul spaţiu (adică în 4π unităţi de unghi solid).

Valoarea forţei magnetomotoare a unui curent devine, prin raţionalizare, identică cu valoarea acelui curent.

Legile Maxwell în aer, în spaţiul vid, sau în orice mediu lipsit de o densitate de curent electric, se scriu la fel, atât în regim clasic, cât şi în regim raţionalizat.

Insă într'un punct unde există o densitate de curent electric, legea Maxwell se scrie:

$$\text{în regim clasic: rot } \overline{H} = 4\pi\overline{J} + \frac{d\overline{D}}{dt};$$

$$\text{în regim raţionalizat: rot } \overline{H'} = \overline{J} + \frac{d\overline{D'}}{dt}.$$

Vectorul Umov-Poynting se scrie:

$$\text{în regim clasic: } \overline{S} = \frac{1}{4\pi}[\overline{E} \times \overline{H}];$$

$$\text{în regim raţionalizat: } \overline{S} = [\overline{E} \times \overline{H'}].$$

Prin raţionalizare, *inducţia electrică* şi *deplasarea electrică* devin identice ca valoare.

In calculele numerice ale tuturor mărimilor ale căror unităţi nu sunt supuse raţionalizării (rezistenţă, inductanţă, capacitate, câmp electric, etc.), factorul 4π rămâne la locul său, indiferent dacă în expresia respectivă literală, în mod aparent, acel factor este suprimat prin raţionalizare.

Exemplu. Expresia unui condensator plan:

$$\text{în regim clasic: } C = \varepsilon\frac{S}{4\pi e};$$

$$\text{în regim raţionalizat: } C = \varepsilon'\frac{S}{e}.$$

Se caracterizează dielectricul, astfel cum se face totdeauna prin constanta dielectrică relativă, de exemplu $\varepsilon_r = 5$.

Constantele dielectrice devin, în acest caz, în sistemul de unităţi practice de exemplu:

$$\text{în regim clasic: } \varepsilon = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r}{9.10^9};$$

$$\text{în regim raţionalizat: } \varepsilon' = \varepsilon'_0 \times \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r}{4\pi.9.10^9};$$

deci calculul numeric al capacităţii respective devine:

$$\text{în regim clasic: } C = \varepsilon\frac{S}{4\pi e} = \frac{\varepsilon_r}{9.10^9} \times \frac{S}{4\pi e};$$

$$\text{în regim raţionalizat: } C = \varepsilon' \cdot \frac{S}{e} = \frac{\varepsilon_r}{4\pi.9.10^9} \times \frac{S}{e};$$

factorul 4π, în calculul numeric, rămâne deci la locul său.

Situaţia este aceeaşi pentru oricare calcule, de energie a câmpurilor magnetice şi electrice, de inductanţe, de câmpuri electrice, de forţă purtătoare (a unui electromagnet), de rezistenţe, etc.

In tehnică, în special la maşini, se întrebuinţează mărimea măsurată în Amperi-spire (As). Ea trebue privită ca distinctă de forţa magnetomotoare. Această mărime este identică cu forţa magnetomotoare, în regim raţionalizat, dar este egală cu forţa magnetomotoare divizată prin 4π în regim clasic.

33. Situaţia adoptării raţionalizării. Raţionalizarea a fost adoptată de unii autori. In situaţia de azi, este însă necesar să se cunoască atât regimul clasic cât şi cel raţionalizat.

Standardizarea nu s'a pronunţat încă asupra adoptării raţionalizării. Organele oficiale internaţionale, deasemenea, încă nu s'au pronunţat asupra adoptării raţionalizării.

Prin comunicarea Institutului de metrologie U.R.S.S. către Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi sesiunea 1948, se precizează că prin Regulamentul introdus la 1 Mai 1948 în U.R.S.S. asupra unităţilor electrice şi magnetice, se prevăd unele măsuri obligatorii, ca de exemplu introducerea unităţilor absolute. In ceeace priveşte raţionalizarea, prin acest regulament se dă o preferinţă asupra regimului raţionalizat, fără însă a constitui un obstacol pentru continuarea folosirii şi a regimului clasic (neraţionalizat.).

Relaţiile din Cap. III sunt scrise în sistemul practic absolut raţionalizat cât şi în sistemul practic neraţionalizat.

E. Tabele şi date numerice

a) Unităţile fundamentale ale sistemelor generale

(După STAS 737-49)

1. Unităţile de lungime

a) *In sistemul MKS*: metrul.

Metrul este lungimea, la temperatura de 0°C, a prototipului internaţional de platină iridiată, sancţionat în 1889 de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi şi păstrat la Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi din Sèvres-Franţa.

b) *In sistemul CGS*: centimetrul.

Centimetrul este a suta parte din metrul definit mai sus.

2. Unităţile de masă

a) *In sistemul MKS*: kilogramul.

Kilogramul este masa prototipului internaţional de platină iridiată, sancţionat în anul 1889 de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi şi păstrat la Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi din Sèvres-Franţa.

b) *In sistemul CGS*: gramul.

Gramul este a mia parte din kilogramul definit mai sus.

3. Unitatea de timp

In sistemul MKS şi CGS: secunda.

Secunda (de timp mijlociu) reprezintă a 86 400-a parte a zilei solare mijlocii.

Anul tropic (adică intervalul mijlociu dintre două treceri consecutive ale soarelui la punctul echinoxial mijlociu de primăvară) are 365, 242 198 79 zile solare mijlocii

b) Unităţile geometrice ale sistemelor generale

(după STAS 738-49)

1. In tabela 1 sunt cuprinse definiţiile unităţilor în sistemul MKS şi relaţiile de transformare ale acestora în unităţi CGS.

Definiţiile unităţilor sistemului CGS nu sunt cuprinse în tabelă. Ele pot fi însă obţinute, dacă denumirea unităţilor, în definiţiile date la sistemul MKS, se înlocueşte cu aceea corespunzătoare sistemului CGS.

Tabela 1

Denumirea şi simbolul mărimii	Dimensiuni	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură în sistemul MKS: Denumire şi definiţie	Unitatea de măsură în sistemul MKS: Simbol	Unitatea şi simbolul în sistemul CGS Relaţii de transformare
Lungime l	L	—	Metru Unitate fundamentală (STAS 737-49)	m	Centimetru, cm 1 m = 100 cm
Arie A, S	L^2	—	Metru pătrat Aria unui pătrat cu latura de un metru	m^2	Centimetru pătrat, cm^2 $1\ m^2 = 10^4\ cm^2$
Volum V	L^3	—	Metru cub Volumul unui cub cu latura de un metru	m^3	Centimetru cub, cm^3 $1\ m^3 = 10^6\ cm^3$
Unghi plan α	—	$\alpha = \frac{\text{arc}}{\text{rază}}$	Radian Unghiul plan, la centru, care interceptează un arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza	rad	Radian, rad
Unghi solid Ω	—	$\Omega = \frac{\text{supr. sfer.}}{r^2}$	Steradian Unghiul solid la centru, care delimitează pe sferă o suprafaţă egală cu pătratul razei	str	Steradian, str

2. In afară de unităţile definite mai sus, anumite unităţi principale ale sistemelor respective, se mai pot folosi multiplii şi submultiplii zecimali ai acestora. Denumirile respective se formează conform STAS 669-49.

3. Dintre unităţile geometrice principale şi multiplii sau submultiplii acestora, unele poartă denumiri speciale; ele sunt arătate în tabela 2, care cuprinde şi domeniul respectiv de întrebuinţare.

Tabela 2

Denumirea şi simbolul mărimii	Unitatea de măsură: Denumire	Unitatea de măsură: Simbol	Relaţiile cu unităţile uzuale	Domeniul de aplicare
Lungime l	Micron	μ	$1\ \mu = 10^{-6}\ m = 10^{-4}\ cm$	Se utilizează în fizică şi tehnică
	Angström	Å	$1\ Å = 10^{-10}\ m = 10^{-8}\ cm$	Se utilizează în fizică
	Unitate X	U·X	$1\ U{\cdot}X = 10^{-13}\ m = 10^{-11}\ cm$	

4. Unităţile geometrice de mai sus ale sistemului MKS au întrebuinţare generală. In lucrările ştiinţifice se pot folosi şi unităţile sistemului CGS.

c) Unităţile geometrice în afara sistemelor generale
(după STAS 738-49)

1. Dintre unităţile geometrice, care nu fac parte din sistemele generale, se pot folosi cele arătate în tabela 3, care cuprinde şi domeniul respectiv de întrebuinţare.

Tabela 3

Denumirea şi simbolul mărimii	Unitatea de măsură: Denumire şi definiţie	Unitatea de măsură: Simbol	Relaţiile cu unităţile sistemelor generale	Domeniul de aplicare
Capacitate V	Litrul metrologic Capacitatea egală cu volumul unui kilogram de apă distilată, lipsită de aer, la densitatea maximă, sub presiunea de 1 Atm (1,013 25 bari)	l_m	$1\ l_m = 1{,}000\,027\ dm^3$	Se foloseşte în măsurătorile de precizie
Unghiu plan α	Unghiu drept Unul din unghiurile formate de două drepte care se taie, determinând unghiuri adiacente egale. Submultiplii unghiului drept sunt următorii: *a)* submultiplii vechi:	∟		
	— Gradul vechiu (de unghi)	°	$1° = \frac{1 ∟}{90} = \frac{\pi}{180}\ rad$	Se va evita folosirea gradului vechi cu submultiplii săi
	— Minutul (sexagesimal)	′	$1' = \frac{1°}{60}$	
	— Secunda (sexagesimală)	″	$1'' = \frac{1'}{60}$	
	— submultiplii secundei sexagesimale sunt zecimali; *b)* submultiplii noui:			
	— Gradul nou (de unghi)	g	$1^g = \frac{1 ∟}{100} = \frac{\pi}{200}\ rad$	
	— Minutul centesimal	c	$1^c = \frac{1^g}{100}$	
	— Secunda centesimală — submultiplii secundei centesimale sunt zecimali	cc	$1^{cc} = \frac{1^c}{100}$	

2. Relaţiile dintre unităţile de unghiu plan sunt următoarele:

Tabela 4

	în°	în^g	în rad	în∟	în m_a
1° =	1	10/9 = 1,111 111...	π/180 = 0,017 453	1/90 = 0,011 111...	17,453 292
1^g =	9/10 = 0,9	1	π/200 = 0,015 708	1/100 = 0,01	15,707 963
1 rad =	180/π = 57°17′44,8″ = 57,295 78	200/π = 63,661 977	1	2/π = 0,636 620	1 000
$1^∟$ =	90	100	π/2 = 1,570 796	1	1 570,796
1 m_a =	0,057 296	0,063 662	1/1 000 = 0,001	0,000 636 6	1

d) Unităţile mecanice ale sistemelor generale

(după STAS 739-49)

1. In tabela 5 sunt cuprinse definiţiile unităţilor în sistemul MKS şi relaţiile de transformare ale acestora în unităţi CGS.

Definiţiile unităţilor sistemului CGS nu sunt cuprinse în tabelă. Ele pot fi însă obţinute, dacă denumirea unităţilor în definiţiile date la sistemul MKS se înlocueşte cu cea corespunzătoare sistemului CGS.

Tabela 5

Denumirea şi simbolul mărimii	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură în sistemul MKS		Unitatea şi simbolul în sistemul CGS Relaţii de transformare
			Denumire şi definiţie	Simbol	
Lungime l	L	—	Metru Unitate fundamentală (STAS 737-49)	m	Centimetru, cm 1 m = 100 cm
Timp t	T	—	Secunda Unitate fundamentală (STAS 737-49)	s	Secunda, s
Viteză v	LT^{-1}	$v = \frac{l}{t}$	Metru pe secundă Viteza unui punct în mişcare rectilinie şi uniformă, parcurgând un metru în fiecare secundă	m/s	Centimetru pe secundă, cm/s 1 m/s = 100 cm/s
Acceleraţie a	LT^{-2}	$a = \frac{v}{t}$	Metru pe secundă la pătrat Acceleraţia unui punct în mişcare rectilinie şi uniform variată, a cărui viteză se modifică cu un metru pe secundă, în fiecare secundă	m/s²	Centimetru pe secundă la pătrat, cm/s², sau Gal, gal. 1 m/s² = 100 cm/s² Galul nu este încă o denumire internaţională
Viteză unghiulară ω	T^{-1}	$\omega = \frac{\alpha}{t}$	Radian pe secundă Viteza unghiulară a unui punct în mişcare circulară uniformă, a cărui rază vectoare parcurge un unghiu la centru de un radian, în fiecare secundă	rad/s	Radian pe secundă, rad/s
Masă m, M	M	—	Kilogram Unitate fundamentală (STAS 737-49)	kg	Gram, g 1 kg = 1000 g
Forţă F, f	LMT^{-2}	$F = ma$	Newton Forţa care într'o secundă imprimă masei de un kilogram o creştere de viteză de un metru pe secundă	N	Dynă, dyn. 1 N = 10⁵ dyn

Tabela 5 *(urmare)*

Denumirea şi simbolul mărimii	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură în sistemul MKS		Unitatea şi simbolul în sistemul CGS Relaţii de transformare
			Denumire şi definiţie	Simbol	
Masă specifică *) (Densitate) ρ	$L^{-3}M$	$\rho = \frac{m}{V}$	Kilogram pe metru cub Masa specifică a unui corp omogen, având o masă de un kilogram şi un volum de un metru cub	kg/m³	Gram pe centimetru cub, g/cm³. Densitatea apei la + 4° este (cu aproximaţie de 1/30 000) 1 g/cm³ = 1 000 kg/m³
Presiune **) p	$L^{-1}MT^{-2}$	$p = \frac{F}{S}$	Newton pe metru pătrat Presiunea exercitată normal de o forţă de un newton, uniform repartizată pe un metru pătrat	N/m²	Dynă pe centimetru pătrat, dyn/cm², sau Barye, barye 1 N/m² = 10 barye — In practică se foloseşte microbarul, 1 μ bar = 1 barye
Energie (Lucru mecanic, energie cinetică, energie internă, etc.) W	L^2MT^{-2}	$W = Fl$	Joule Lucrul mecanic efectuat de o forţă de un newton, al cărei punct de aplicaţie se deplasează cu un metru, în direcţia şi sensul forţei	J	Erg, erg. 1 J = 10⁷ erg
Putere P	L^2MT^{-3}	$P = \frac{W}{t}$	Watt Puterea care desvoltă, în mod uniform, o energie de un joule pe secundă	W	Erg pe secundă, erg/s 1 W = 10⁷ erg/s
Momentul unei forţe (Cuplu) M	L^2MT^{-2}	$M = Fl$	Newton-metru Momentul unei forţe de un newton, în raport cu un punct situat la distanţa de un metru de ea	N·m	Dynă-centimetru, dyn. cm 1 N·m = 10⁷ dyn·cm
Moment de inerţie J	L^2M	$J = ml^2$	Kilogram-metru pătrat Momentul de inerţie a unei mase punctuale de un kilogram, situată la o distanţă de un metru de punctul, axa sau planul în raport cu care se ia momentul	kg·m²	Gram-centimetru pătrat, g cm² 1 kg·m² = 10⁷ g·cm²

*) In ce priveşte greutatea specifică, ea măsurându-se obişnuit în unităţi MKfS, se găseşte trecută în tabela de unităţi ale sistemului mecanic MKfS.

**) In aceleaşi unităţi se măsoară tensiunile şi modulii de elasticitate.

Tabela 5 *(urmare)*

Denumirea şi simbolul mărimii	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură în sistemul MKS — Denumire şi definiţie	Simbol	Unitatea şi simbolul în sistemul CGS Relaţii de transformare
Cantitate de mişcare, impuls M	LMT^{-1}	$M = mv$	N e w t o n - s e c u n d ă Cantitatea de mişcare a unui mobil, având o masă de un kilogram şi o viteză de un metru pe secundă	N·s	Dynă-secundă, dyn s 1 N s = 10^5 dyn s
Percuţie I	LMT^{-1}	$I = Ft$	N e w t o n - s e c u n d ă Percuţia unei forţe de un newton, exercitată timp de o secundă	N·s	Dynă-secundă, dyn s 1 N s = 10^5 dyn s
Viscozitate dinamică η	$L^{-1}MT^{-1}$	$F = \eta S \frac{v}{l}$	D e c a p o i s e Viscozitatea dinamică a unui fluid omogen, în curgere laminată rectilinie şi paralelă cu un plan dat, în care se naşte o tensiune *) egală cu unitatea, atunci când, normal la acel plan, gradientul vitezei este egal cu unitatea	daP	Poise, P 1 daP = 10 P
Viscozitate cinematică ν	$L^{2}T^{-1}$	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	D e c a k i l o s t o k e s **) Viscozitatea cinematică a unui fluid având viscozitatea dinamică de un decapoise şi masa specifică un kilogram pe metru cub	dakSt	Stokes, St. 1 dakSt = 10^4St

*) Tensiune = forţă de frecare pe unitatea de suprafaţă.
**) In literatura tehnică se mai numeşte miriastokes.

2. In afară de unităţile definite mai sus, care se mai numesc unităţi principale ale sistemelor respective, se mai pot folosi multiplii şi submultiplii zecimali ai acestora.

Denumirile respective se formează conform STAS 669-49.

e) Unităţile sistemului mecanic MKfS

(după STAS 739-49)

1. Unităţile din sistemul restrâns mecanic MKfS (metru, kilogram-forţă, secundă) sunt bazate pe mărimile fundamentale: lungime, forţă, timp.

Unităţile fundamentale de lungime şi timp sunt metrul şi secunda (STAS 737-49). Pentru unitatea fundamentală de forţă se adoptă următoarea definiţie: *Kilogramul-forţă* este forţa a cărei valoare este egală cu greutatea prototipului internaţional de masă (STAS 737-49), măsurată în vid, la acceleraţia normală a gravităţii de 9,806 65 m/s².

2. Unităţile de măsură ale mărimilor mecanice din sistemul MKfS, prezentate după natura mărimii, sunt arătate şi definite în tabela 6, care cuprinde şi relaţiile lor cu unităţile corespunzătoare MKS şi CGS.

Tabela 6

Denumirea şi simbolul mărimii	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură — Denumire şi definiţie	Simbol	Relaţii de transformare
Forţă F, f	F	—	K i l o g r a m - f o r ţ ă Unitate fundamentală	kgf	1 kgf = 9,806 65 N 1 kgf = = 9,806 65 × 10^5 dyn
Masă m, M	$L^{-1}FT^{2}$	$m = \frac{F}{a}$	K i l o g r a m - f o r ţ ă - s e c u n d ă l a p ă t r a t p e m e t r u Masa (presupusă concentrată într'un punct) care, sub acţiunea unei forţe de un kilogram-forţă, primeşte o acceleraţie de un metru pe secundă la pătrat	kgf·s²/m	1 kgf·s²/m = = 9,806 65 kg = = 9,806 65 × 10^3 g
Greutate specifică γ	$L^{-3}F$	$\gamma = \frac{G}{V}$	K i l o g r a m - f o r ţ ă p e m e t r u c u b Greutatea specifică a unui corp omogen, având o greutate de un kilogram-forţă şi un volum de un metru cub	kgf/m³	Greutatea specifică a apei la 4° este (cu aproximaţie de 1/30 000): 1 000 kgf/m³. 1 kgf/m³ = = 0,980 665 dyn/cm³
Presiune [1]) p	$L^{-2}F$	$p = \frac{F}{S}$	K i l o g r a m - f o r ţ ă p e m e t r u p ă t r a t Presiunea exercitată normal de o forţă de un kilogram-forţă, uniform repartizată pe un metru pătrat	kgf/m²	In practică se utilizează 1 kgf/cm², denumită atmosferă tehnică
Energie (Lucru mecanic, energie cinetică, energie internă etc.) W	LF	$W = Fl$	K i l o g r a m - m e t r u [2]) Lucrul mecanic efectuat de o forţă de un kilogram-forţă, al cărei punct de aplicaţie se deplasează cu un metru, în direcţia şi sensul forţei	kgm	1 kgm = 9,806 65 J

[1]) In aceleaşi unităţi se măsoară tensiunile şi modulii de elasticitate.
[2]) Unitatea de energie se scrie kilogrammetru, simbol kgm, spre deosebire de unitatea de moment al unei forţe, care se scrie kilogram-metru, simbol kg·m.

Tabela 6 *(urmare)*

Denumirea şi simbolul mărimii	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură		Relaţii de transformare
			Denumire şi definiţie	Simbol	
Putere P	LFT^{-1}	$P = \frac{W}{t}$	Kilogram-metru pe secundă: Puterea care desvoltă, în mod uniform, o energie de un kilogram-metru pe secundă	kgm/s	1 kgm/s = 9,806 65 W
Momentul unei forţe (Cuplu) M	LF	$M = Fl$	Kilogram-metru[1]) Momentul unei forţe de un kilogram-forţă, în raport cu un punct situat la distanţa de un metru de ea	kg·m	1 kg·m = 9,806 65 N·m
Percuţie I	FT	$I = Ft$	Kilogram-forţă-secundă Percuţia unei forţe de un kilogram-forţă, exercitată timp de o secundă	kgf·s	1 kgf·s = 9,806 65 N·s

[1]) S'a păstrat denumirea larg folosită de kilogram-metru, în loc de kilogram-forţă-metru.

3. In afară de unităţile definite mai sus, care se mai numesc unităţi principale ale sistemului, se mai pot folosi multiplii şi submultiplii zecimali respectivi. Denumirile respective se formează conform STAS 669-49.

f) Unităţile mecanice cu denumiri speciale

(după STAS 739-49)

1. Unităţile mecanice cu denumiri speciale, atât cele care fac parte din sistemele de mai sus, cât şi cele din afara acestora, sunt arătate în tabela 7, care cuprinde şi domeniile respective de întrebuinţare

Tabela 7

Denumirea şi simbolul mărimii	Unitatea de măsură		Relaţiile cu unităţile sistemelor generale	Domeniul de aplicare
	Denumire şi definiţie	Simbol		
Timp t	Minut Oră	min. h	1 min = 60 s 1 h = 60 min = 3 600 s	Se foloseşte în tehnică
Viteză unghiulară, ω	Rotaţie pe minut	rot/min	$1\ \text{rot/min} = \frac{2\pi}{60}\ \text{rad/s}$	Se foloseşte în tehnică

Tabela 7 *(urmare)*

Denumirea şi simbolul mărimii	Unitatea de măsură		Relaţiile cu unităţile sistemelor generale	Domeniul de aplicare
	Denumire şi definitie	Simbol		
Masă m, M	Tonă Carat	t ct	1 t = 1 000 kg 1 ct = 0,2 g	 Tolerat în comerţul pietrelor preţioase
Forţă F, f	Tonă-forţă Stena	tf sn	1 tf = 1 000 kgf 1 sn = 10^8 dyn = 10^3N	Tolerată Se va evita folosirea acestei unităţi
Energie W	Kilowatt-oră Wattoră	kWh Wh	1 kWh = 3 600 000 J 1 Wh = 3 600 J	Se foloseşte în tehnică
Putere P	Cal-putere	CP	1 CP = 75 kgm/s	Se va evita folosirea acestei unităţi
Presiune p	Bar Milibar Microbar	bar mbar μ bar	1 bar = 10^6 barye 1 mbar = 10^{-3} bar 1 μ bar = 10^{-6} bar	Se folosesc: în fizică şi meteorologie
	Atmosferă fizică	Atm	1 Atm = 1,033 22 kgf/cm² = 760 mm col. mercur	în meteorologie şi fizică
	Atmosferă tehnică	at	1 at = 1 kgf/cm²	în tehnică
	Torr	torr	1 torr = 1 mm col. mercur	în meteorologie şi fizică

g) Unităţile derivate electrice şi magnetice

(după STAS 862-49)

1. Principalele unităţi de măsură electrice şi magnetice în sistemul practic MKS, atât în varianta clasică (neraţionalizată), cât şi în cea raţionalizată, prezentate după felul mărimii, sunt arătate şi definite în tabela 8—1, care cuprinde şi relaţiile de transformare ale acestora în unităţi CGS.

Definiţiile unităţilor CGS nu sunt cuprinse în tabelă. Ele pot fi însă obţinute dacă denumirea unităţilor, în definiţiile date la sistemul MKS, se înlocueşte cu cea corespunzătoare sistemului CGS.

In tabelă (ultima coloană) sunt date numai denumirile speciale ale unităţilor în sistemul CGS electromagnetic clasic (neraţionalizat). In toate celelalte cazuri, denumirea unităţilor CGS se poate face, fie indicând simplu iniţialele CGS e. m. sau CGS e. s., respectiv în sistemul electromagnetic sau electrostatic, fie introducând prefixele ab şi stat la unităţile din sistemul MKS; de ex., în cazul cantităţii de electricitate, abcoulomb pentru CGS e. m., respectiv statcoulomb pentru CGS e.s.

In coloana de dimensiuni a tabelei se consideră curentul ca a patra mărime fundamentală.

Mărimile care se exprimă în unităţi raţionalizate sunt notate în tabelă cu accent (numai atunci când aceste mărimi comportă unităţi diferite în sistemul raţionalizat şi clasic, neraţionalizat).

Tabela 8—1

Mărimea şi simbolul ei	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură: Denumire şi definiţie	Unitatea de măsură: Simbol	Relaţii de transformare
Unităţi electrice					
Curent (Intensitatea curentului) I	I	$\frac{F}{l} = \mu_0' \frac{I_1 I_2}{2\pi d}$ sau $\frac{F}{l} = 2\mu_0 \frac{I_1 I_2}{d}$	**Amper** Curentul constant care, menţinut în doi conductori, paraleli, rectilinii, de lungime practic infinită şi de secţiune circulară neglijabilă, aşezaţi la o distanţă de un metru unul de altul, în vid, produce între aceşti conductori o forţă de 2×10^{-7} newtoni pe metrul de lungime	A	$1\ A = \frac{1}{10}$ CGS e.m.
Cantitate de electricitate (Sarcină electrică) Q	IT	$Q = It$	**Coulomb** Cantitatea de electricitate, transportată într'o secundă de un curent constant de un amper	C	$1\ C = \frac{1}{10}$ CGS e.m.
Tensiune electrică (Diferenţă de potenţial) U Potenţial V Forţă electromotoare E	$L^2 MT^{-3} I^{-1}$	$U = \frac{P}{I}$	**Volt** Tensiunea electrică între două puncte ale unui fir conductor, prin care trece un curent constant de un amper, când puterea disipată între aceste două puncte este de un watt	V	$1\ V = 10^{8}$ CGS e.m.
Rezistenţă electrică R	$L^2 MT^{-3} I^{-2}$	$R = \frac{U}{I}$	**Ohm** Rezistenţa electrică între două puncte ale unui fir conductor, când o tensiune constantă de un volt, aplicată între aceste puncte, produce în acest conductor un curent de un amper, acel conductor nefiind sediul altor forţe electromotoare	Ω	$1\ \Omega = 10^9$ CGS e.m.
Capacitate C	$L^{-2} M^{-1} T^4 I^2$	$C = \frac{Q}{U}$	**Farad** Capacitatea unui condensator electric care, fiind încărcat cu o sarcină electrică de un coulomb, determină o tensiune de un volt între armăturile lui	F	$1\ F = 10^{-9}$ CGS e.m

Tabela 8—1 *(urmare)*

Mărimea şi simbolul ei	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură: Denumire şi definiţie	Unitatea de măsură: Simbol	Relaţii de transformare
Câmp electric E, K	$LMT^{-3} I^{-1}$	$E = \frac{F}{Q}$	**Volt pe metru** Intensitatea de câmp electric care determină o forţă de un newton asupra unei sarcini punctuale electrice de un coulomb	V/m	$1\ V/m = 10^6$ CGS e.m.
Unităţi magnetice					
Flux de inducţie magnetică Φ	$L^2 MT^{-2} I^{-1}$	$E' = -\frac{d\Phi}{dt}$	**Weber** (Volt·s) Fluxul de inducţie magnetică care, străbătând circuitul unei singure spire, produce în acea spiră o forţă electromotoare de un volt, când fluxul scade uniform la zero, în timp de o secundă	Wb	$1\ Wb = 10^8$ maxwell (unitate CGS e.m.)
Inducţie magnetică B	$MT^{-2} I^{-1}$	$B = \frac{\Phi}{S}$	**Weber pe metru pătrat** Inducţia magnetică care produce un flux de un weber, printr'o suprafaţă normală de un metru pătrat	Wb/m^2	$1\ Wb/m^2 = 10^4$ gauss (unitate CGS e.m.)
a) *raţionalizat*					
Câmp magnetic H	L^{-1} I	$\int H' dl = wI$; $H' = \frac{I}{2r}$	**Amper-spiră pe metru** Câmpul magnetic produs în centrul unei spire circulare având un diametru de un metru şi fiind străbătută de un curent de un amper	A·sp/m	1 A·sp/m $= 10^{-3}$ CGS e.m. raţ.
b) *clasic (neraţionalizat)*					
		$\int H dl = 4\pi wI$; $H = \frac{2I}{r}$	Milioersted Câmpul magnetic produs în jurul unui conductor liniar de lungime practic infinită, la o distanţă de doi metri, când în acel conductor circulă un curent de un amper	mOe	$1\ mOe = \frac{1}{4\pi}$ A. sp/m (Oerstedul este unitatea CGS e. m. în sistemul clasic neraţionalizat)

Tabela 8—1 *(urmare)*

Mărimea şi simbolul ei	Dimensiunile	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură: Denumire şi definiţie	Unitatea de măsură: Simbol	Relaţii de transformare
			a) *raţionalizat*		
Forţă magnetomotoare F, F_m, $\mathfrak{F}$	I	$\mathfrak{F} = wI$	**Amper-spiră** Forţa magnetomotoare produsă de o spiră străbătută de un curent de un amper	A·sp.	1 A·sp. $= \frac{1}{10}$ CGS em raţ.
			b) *clasic (neraţionalizat)*		
		$\mathfrak{F} = 4\pi wI$	**Decigilbert** Forţa magnetomotoare produsă de o spiră străbătută de un curent de $1/4\pi$ amperi	dGb	1 dGb $= \frac{1}{4\pi}$ A·sp (Gilbertul este unitatea CGS em în sistemul clasic neraţionalizat)
Inductanţă L	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	$L = \frac{\Phi}{I}$	**Henry** Inductanţa unui circuit electric, format dintr'o singură spiră, care produce un flux magnetic propriu de un weber, când circuitul este parcurs de un curent de un amper	H	1 H $= 10^9$ CGS e.m.
			a) *raţionalizat*		
Moment magnetic M_m	$L^3MT^{-2}I^{-1}$	$M'_m = \frac{M}{H'}$	Weber-metru Momentul magnetic al unei bare magnetice, aşezată normal pe un câmp magnetic uniform, de o amper-spiră pe metru şi asupra căreia se exercită un cuplu de un newton-metru	Wb·m	1 Wb·m $= 10^{10}$ CGS e.m. raţ.
			b) *clasic (neraţionalizat)*		
		$M_m = \frac{M}{H}$	Newton-metru pe milioersted Momentul magnetic al unei bare magnetice, aşezată normal pe un câmp magnetic uniform de un milioersted şi asupra căreia se exercită un cuplu de un newton-metru	$\frac{N\cdot m}{mOe}$	1 N·m/mOe $= 4\pi$ Wb m; 1 N·m/mOe $= 10^{10}$ CGS e.m. neraţ.

2. Unităţile electrice şi magnetice definite mai sus se numesc absolute, întrucât ele derivă din etaloanele a patru unităţi fundamentale.

Având în vedere dificultăţile experimentale de determinare directă a unităţilor electrice şi magnetice absolute, se vor putea folosi în practică, pentru măsurătorile curente, actualele etaloane naţionale de rezistenţă şi f.e.m., ţinând seamă de corecţiile dela punctul 3.

Etaloanele naţionale ale unităţilor electrice sunt în păstrarea Comisiei de Stat a Standardizării.

3. Unităţile electrice internaţionale nu mai pot fi folosite.

Relaţiile dintre unităţile internaţionale şi cele absolute sunt:

1 J int. = 1,00020 J abs.	1 Ω int. = 1,00050 Ω abs.
1 W int. = 1,00020 W abs.	1 F int. = 0,99950 F abs.
1 A int. = 0,99985 A abs.	1 Wb int. = 1,00035 Wb abs.
1 C int. = 0,99985 C abs.	1 H int. = 1,00050 H abs.
1 V int. = 1,00035 V abs.	

Aceste relaţii sunt bazate pe valorile medii adoptate în 1946 de Comitetul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi pentru ohmul şi voltul internaţional.

4. Unităţile sistemului CGS electrostatic (CGS e.s.) se deduc din unităţile sistemului CGS electromagnetic (CGS e.m.) prin relaţiile următoare:

Intensitatea curentului: 1 CGS e.s. $= \frac{1}{3.10^{10}}$ CGS e.m.

Cantitatea de electricitate: 1 CGS e.s. $= \frac{1}{3.10^{10}}$ CGS e.m.

Tensiunea electrică: 1 CGS e.s. $= 3.10^{10}$ CGS e.m.

Rezistenţa electrică: 1 CGS e.s. $= 9.10^{20}$ CGS e.m.

Capacitatea: 1 CGS e.s. (cm) $= \frac{1}{9.10^{20}}$ CGS e.m.

Constanta dielectrică: 1 CGS e.s. $= \frac{1}{9.10^{20}}$ CGS e.m. clasic (neraţ.).

5. Permeabilitatea vidului (μ_0) şi constanta dielectrică a vidului (ε_0) au următoarele valori:

Tabela 8—2

	Sistemul MKS: raţionalizat	Sistemul MKS: clasic	Sistemul CGS electromagnetic: raţionalizat	Sistemul CGS electromagnetic: clasic	Sistemul CGS electrostatic
μ_0	$4\pi\,10^{-7}$	10^{-7}	4π	1	$\frac{1}{9.10^{20}}$
ε_0	$\frac{1}{4\pi 9.10^{9}}$	$\frac{1}{9.10^{9}}$	$\frac{1}{4\pi 9.10^{20}}$	$\frac{1}{9.10^{20}}$	1

6. In mod obişnuit numai puterea reală se măsoară în waţi, kilowaţi sau megawaţi, în timp ce unităţile corespunzătoare pentru puterea aparentă se iau volt-amper (VA), kilovolt-amper (kVA) şi megavolt-amper (MVA), iar pentru puterea reactivă se iau var (var), kilovar (kvar) şi megavar (Mvar).

h) Tabela formulelor electromagnetice

(după STAS 862-49)

1. Având în vedere că unităţile raţionalizate corespund uneori la forme modificate ale legilor din Electricitate şi Magnetism, faţă de formele clasice ale acestor legi, se dau în tabela 8-3 expresiile principalelor legi scrise în cele două variante, raţionalizată şi clasică (neraţionalizată).

Tabela 8—3

Denumirea expresiei	Sistem clasic (neraţionalizat)	Sistem raţionalizat
Electrostatică		
Legea fluxului electric	$\psi = \int_S D ds = 4\pi Q$	$\psi' = \int_S D' ds = Q$
Divergenţa inducţiei electrice	$\text{div}\, D = 4\pi\rho \left(\rho = \frac{Q}{\text{Vol}}\right)$	$\text{div} D' = \rho$
Potenţialul electric	$V = \int_{Vol} \frac{\rho dv}{\varepsilon r}$	$V = \int_{Vol} \frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon' r}$
	$V = \int E dl$	$V = \int E\, dl$
Câmpul electric	$E = -\text{grad}\ V$	$E = -\text{grad}\ V$
	$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2}$	$E = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{\varepsilon' r^2}$
Capacitate	$C = \frac{Q}{V}$	$C = \frac{Q}{V}$
— a unei sfere	$C = \varepsilon R$	$C = 4\pi\varepsilon' R$
— condensator plan	$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$	$C = \frac{\varepsilon' S}{d}$
— condensator cilindric	$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{R}{r}}$	$C = \frac{2\pi\varepsilon' l}{\ln \frac{R}{r}}$
— condensator sferic	$C = \frac{\varepsilon R r}{R - r}$	$C = 4\pi\varepsilon' \frac{Rr}{R-r}$
Forţa	$F = QE$	$F = QE$
	$F = \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2}$	$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon' r^2}$
Inducţia electrică (Deplasarea)	$D = \varepsilon_0 E + 4\pi P$	$D' = \varepsilon'_0 E + P$
	$D = \varepsilon E$	$D' = \varepsilon' E$
	$D = \frac{Q}{r^2}$	$D' = \frac{1}{4\pi} \times \frac{Q}{r^2}$
Constanta dielectrică (Permitivitatea)	$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + 4\pi k)$	$\varepsilon' = \varepsilon'_0 (1 + 4\pi k)$
Polarizaţia electrică	$P = \varepsilon_0 k E$	$P = 4\pi\varepsilon'_0 k E$
Energia electrică	$W = \frac{1}{8\pi}\int_{Vol} E D\, dv = \frac{1}{2} QU$	$W = \frac{1}{2}\int_{Vol} E D'\, dv = \frac{1}{2} QU$

Tabela 8—3 *(urmare)*

Denumirea expresiei	Sistem clasic (neraţionalizat)	Sistem raţionalizat
Magnetism		
Potenţialul magnetic	$V_H = \frac{m}{\mu r}$	$V'_H = \frac{1}{4\pi}\frac{m'}{\mu' r^2}$
Câmpul magnetic	$H = -\text{grad}\ V_H$	$H' = -\text{grad}\ V'_H$
Cuplul	$M = M_m H$	$M = M'_m H'$
Inducţia magnetică	$B = \frac{\Phi}{S}$	$B = \frac{\Phi}{S}$
	$B = \mu_0 (1 + 4\pi\varkappa) H$	$B = \mu'_0 (1 + 4\pi\varkappa) H'$
	$B = \mu H$	$B = \mu' H'$
Permeabilitatea	$\mu = \mu_0 (1 + 4\pi\varkappa)$	$\mu' = \mu'_0 (1 + 4\pi\varkappa)$
Intensitatea de magnetizare	$J = \mu_0 \varkappa H$	$J' = 4\pi\mu'_0 \varkappa H'$
	$J = \frac{M_m}{Vol}$	$J' = \frac{M'_m}{Vol}$
Energia magnetică	$W = \frac{1}{8\pi}\int_{Vol} H B\, dv$	$W = \frac{1}{2}\int_{Vol} H' B\, dv$
Electromagnetism		
Legea lui Ohm	$U = RI$	$U = RI$
Legea lui Joule-Lenz	$P = RI^2$	$P = RI^2$
Rezistenţa	$R = \rho \frac{l}{S}$	$R = \rho \frac{l}{S}$
Curentul de deplasare	$J_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t}$	$J_d = \frac{\partial D'}{\partial t}$
Legile lui Maxwell	$\text{rot}\ E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\text{rot}\ E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
	$\text{rot}\ H = 4\pi J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\text{rot}\ H' = J + \frac{\partial D'}{\partial t}$
Forţa magnetomotoare	$\mathfrak{F} = 4\pi w I$	$\mathfrak{F}' = w I$
Legea circuitului magnetic	$\int_C H dl = 4\pi w I$	$\int_C H' dl = w I$
— cazul unui tub de forţă]	$\mathfrak{F} = \mathfrak{R}\Phi$	$\mathfrak{F}' = \mathfrak{R}'\Phi$
Legea inducţiei	$E = -\frac{d\Phi}{dt}$	$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}$
Reluctanţă	$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S}$	$\mathfrak{R}' = \frac{l}{\mu' S}$
Potenţialul magnetic scalar	$V_H = I\Omega + 4\pi K I$	$V'_H = \frac{1}{4\pi} I\Omega + KI$
Câmpul magnetic	$H = -\text{grad}\ V_H$	$H' = -\text{grad}\ V'_H$
Potenţialul vector	$A = \int_{Vol} \mu \frac{J dv}{r}$	$A = \int_{Vol} \frac{\mu'}{4\pi}\frac{J dv}{r}$

Tabela 8—3 *(urmare)*

Denumirea expresiei	Sistem clasic (neraţionalizat)	Sistem raţionalizat
Inducţia magnetică	$B = \mathrm{rot}\ A$	$B = \mathrm{rot}\ A$
Câmpul electric	$E = -\mathrm{grad}\ V + \frac{\partial A}{\partial t}$	$E = -\mathrm{grad}\ V + \frac{\partial A}{\partial t}$
Momentul magnetic al circuitului elementar	$M_{\pi} = \mu S I$	$M'_{\pi} = \mu' S I$
Legea Biot-Savart (Formula lui Laplace)	$\mathrm{d}H = \frac{I\mathrm{d}l \sin\alpha}{r^2}$	$\mathrm{d}H' = \frac{1}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}l \sin\alpha}{r^2}$
Câmpul magnetic		
— conductor rectiliniu	$H = \frac{2I}{r}$	$H' = \frac{I}{2\pi r}$
— conductor circular	$H = \frac{2\pi I}{r}$	$H' = \frac{I}{2r}$
— cazul torului	$H = 4\pi w_u I$ *)	$H' = w_u I$ *)
Forţa electromagnetică	$\mathrm{d}F = [I\mathrm{d}l, B]$	$\mathrm{d}F = [I\mathrm{d}l, B]$
	$\frac{F}{l} = 2\mu \frac{I_1 I_2}{\mathrm{d}}$	$\frac{F}{l} = \frac{\mu'}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{\mathrm{d}}$
Formula lui Neumann	$M = \int\int \mu \frac{\mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \cos\alpha}{r}$	$M = \int\int \frac{\mu'}{4\pi} \frac{\mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \cos\alpha}{r}$
Inductanţa torului	$L = \frac{4\pi w^2 S}{l} \mu$	$L = \frac{w^2 S}{l} \mu'$
Energia magnetică	$W = \frac{1}{2} I\Phi$	$W = \frac{1}{2} I\Phi$
Vectorul Umov-Poynting	$S = \frac{1}{4\pi} [E \times H]$	$S = [E \times H']$
Viteza luminii în vid	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_0 \mu'_0}}$

i) Unităţile fotometrice

(după STAS 740-49)

1. Unităţile de măsură ale mărimilor fotometrice în sistemele MKS şi CGS, prezentate după natura mărimii, sunt arătate în tabela 9—1.

In această tabelă sunt cuprinse definiţiile unităţilor în sistemul MKS şi relaţiile de transformare ale acestora în unităţi CGS.

Definiţiile unităţilor CGS nu sunt cuprinse în tabelă. Ele pot fi însă obţinute, dacă denumirea unităţilor, în definiţiile date la sistemul MKS, se înlocueşte cu cele corespunzătoare sistemului CGS.

*) w_u reprezintă numărul spirelor pe unitatea de lungime.

Tabela 9–1

Denumirea şi simbolul mărimii	Dimensiuni	Ecuaţia de definiţie	Unitatea de măsură în sistemul MKS		Unitatea şi simbolul în sistemul CGS Relaţii de transformare
			Denumire şi definiţie	Simbol	
Intensitate luminoasă I	I	—	**Candela** Unitate fundamentală	cd	Candela, cd
Flux luminos Φ	I	$\Phi = I$	**Lumen (nou)** Fluxul luminos emis, în unitatea de unghi solid (steradian), de un izvor punctiform şi uniform, având intensitatea de o candelă	lm	Lumen (nou), lm
Iluminare E	L^{-2} I	$E = \frac{\Phi}{S}$	**Lux (nou)** Iluminarea unei suprafeţe care primeşte un flux luminos de un lumen (nou), uniform repartizat pe un metru pătrat	lx	Phot (nou), ph 1 lx = 10^{-4} ph
Strălucire B	L^{-2} I	$B = \frac{I}{S}$	**Candelă pe metru pătrat** Strălucirea uniformă a unui izvor luminos plan, de un metru pătrat, a cărui intensitate luminoasă, în direcţie normală pe plan, este de o candelă	cd/m²	Stilb (nou), sb 1 cd/m² = 10^{-4} sb
Radianţă (Radiere luminoasă) R	L^{-2} I	$R = \frac{\Phi}{S}$	**Lux (nou)** Radianţa uniformă a unei suprafeţe care emite un flux de un lumen (nou) pe metrul pătrat	lx	Phot (nou), ph 1 lx = 10^{-4} ph
Cantitate de lumină Q	TI	$Q = \Phi t$	**Lumen (nou) — secundă** Cantitatea de lumină care corespunde unui flux luminos de un lumen (nou), în timp de o secundă	lm·s	Lumen (nou) — secundă, lm·s
Factor de eficacitate luminoasă η	$L^{-2} M^{-1} T^3$ I	$\eta = \frac{\Phi}{P}$	**Lumen (nou) pe watt** Factorul de eficacitate luminoasă a unui izvor care emite un flux total de un lumen (nou), pentru o putere consumată de un watt	lm/W	
Cantitate de iluminare L	L^{-2} TI	$L = Et$	**Lux (nou) — secundă** Cantitatea de iluminare produsă de iluminarea de un lux (nou), în timp de o secundă	lx·s	Phot (nou) — secundă, phs 1 lx·s = 10^{-4} ph·s

2. Trecerea dela vechea unitate de intensitate luminoasă, care era lumânarea internațională (b int.) și dela unitățile derivate din aceasta (folosite în R.P.R. până la 1 Ianuarie 1948), la noua unitate — candela — și la unitățile derivate din ea, se face prin înmulțirea numărului vechilor unități cu factorul 1,0197. De exemplu: 30 b int. = 1,0197 × 30 cd.

3. In afară de unitățile definite mai sus, numite unități principale ale sistemelor respective, se mai pot folosi, ca unități secundare, următorii multipli și submultipli uzuali:

Tabela 9–2

Denumirea și simbolul mărimii	Unitatea secundară de măsură		Relații de transformare în unitatea principală	
	Denumire	Simbol	din sistemul MKS	din sistemul CGS
Flux luminos Φ	Decalumen (nou)	dalm	1 dalm = 10 lm	1 dalm = 10 lm
Iluminare E	Miliphot (nou)	mph		1 mph = 10^{-3} ph
Strălucire B	Apostilb Lambert Milila mbert	asb La mLa	1 asb = $1/\pi$cd/m²	1 La = $1/\pi$sb 1 mLa = 10^{-3} La
Radianță R	Miliphot (nou)	mph		1 mph = 10^{-3} ph
Cantitate de lumină Q	Lumen (nou) — oră	lm·h	1 lm.h = 3 600 lm.s	1 lm·h = 3 600 lm·s

k) Prefixe și simboluri pentru multiplii și submultiplii zecimali (după STAS 669-49)

Tabela 10

Prefixe	Multipliicatorii unităților de referință		Simboluri
pico *)	10^{-12}	0,000 000 000 001	p
nano *)	10^{-9}	0,000 000 001	n
micro	10^{-6}	0,000 001	μ
mili	10^{-3}	0,001	m
centi	10^{-2}	0,01	c
deci	10^{-1}	0,1	d
deca	10^{1}	10	da
hecto	10^{2}	100	h
kilo	10^{3}	1000	k
mega	10^{6}	1 000 000	M
giga *)	10^{9}	1 000 000 000	G
tera *)	10^{12}	1 000 000 000 000	T

*) Prefixe facultative.

1. Prefixele și simbolurile lor se scriu fără spațiu liber, trăsătură de unire sau punct, imediat înaintea denumirii unităților, respectiv a simbolurilor acestora.

2. Prefixele pentru multiplii sau submultiplii valorilor care nu se găsesc în tabelă, se pot forma prin combinarea a câte două din prefixele date, valorile multiplicatorilor astfel obținuți fiind egale cu produsul multiplicatorilor celor două componente. Prefixul compus se va forma excluziv: fie din două prefixe pentru multiplii, fie din două prefixe pentru submultiplii, scrise tot fără spațiu liber, trăsătură de unire sau punct între ele.

Primul prefix va fi întotdeauna acela al cărui multiplicator are exponentul cel mai mic în valoare absolută.

l) Dimensiunile unităților electrice și magnetice în sistemul practic cu patru unități fundamentale și în trei variante de referințe dimensionale

(după C. BUDEANU: Asupra mărimilor și unităților electromagnetice 1938)

Tabela 11

Mărimile	Referințele dimensionale		
	L.M.T.Q	L.M.T.I	L.M.T.μ
Lungime	L	L	L
Masă	M	M	M
Timp	T	T	T
Forță	LMT^{-2}	LMT^{-2}	LMT^{-2}
Energie, Lucru mecanic	L^2MT^{-2}	L^2MT^{-2}	L^2MT^{-2}
Putere	L^2MT^{-3}	L^2MT^{-3}	L^2MT^{-3}
Sarcină electrică	Q	TI	$L^{1/2}M^{1/2}\mu^{-1/2}$
Câmp electric	$LMT^{-2}Q^{-1}$	$LMT^{-3}I^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}\mu^{1/2}$
Inducție electrică, Deplasare	$L^{-2}Q$	$L^{-2}TI$	$L^{-3/2}M^{1/2}\mu^{-1\ 2}$
Flux de inducție electrică	Q	TI	$L^{1/2}M^{1/2}\mu^{-1/2}$
Constantă dielectrică	$L^{-3}M^{-1}T^2Q^2$	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	$L^{-2}T^2\mu^{-1}$
Tensiune electrică / Forță electromotoare	$L^2MT^{-2}Q^{-1}$	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}\mu^{1/2}$
Capacitate	$L^{-2}M^{-1}T^2Q^2$	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	$L^{-1}T^2\mu^{-1}$
Curent electric	$T^{-1}Q$	I	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$
Rezistență	$L^2MT^{-1}Q^{-2}$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	$LT^{-1}\mu$
Conductanță	$L^{-2}M^{-1}TQ^2$	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	$L^{-1}T\mu^{-1}$
Permeabilitate	LMQ^{-2}	$LMT^{-2}I^{-2}$	μ
Flux magnetic	$L^2MT^{-1}Q^{-1}$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{1/2}$
Inductanță	L^2MQ^{-2}	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	$L\mu$
Inducție magnetică	$MT^{-1}Q^{-1}$	$MT^{-2}I^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{1/2}$
Tensiune magnetică / Forță magnetomotoare	$T^{-1}Q$	I	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$
Reluctanță	$L^{-2}M^{-1}Q^2$	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	$L^{-1}\mu^{-1}$
Moment magnetic	$L^3MT^{-1}Q^{-1}$	$L^3MT^{-2}I^{-1}$	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{1/2}$
Intensitate de magnetizare	$MT^{-1}Q^{-1}$	$MT^{-2}I^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{1/2}$
Câmp magnetic	$L^{-1}T^{-1}Q$	$L^{-1}I$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$

Observații și aplicațiuni. 1. Trecerea dela oricare din cele trei variante la celelalte se poate realiza ușor prin folosirea relațiilor dimensionale de legătură între aceste variante:

$$Q = TI = L^{1/2}M^{1/2}\mu^{-1/2}$$

$$I = T^{-1}Q = L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$$

$$\mu = LMQ^{-2} = LMT^{-2}I^{-2}$$

Astfel de exemplu, înlocuind în variante LMTQ, expresia dimensională Q în funcţie de I sau μ, obţinem după voe varianta LMTI sau LMTμ.

2. Din varianta LMTQ, înlocuind dimensiunea masei în funcţie de acea a fluxului magnetic prin relaţia dimensională

$$M = L^{-2}TQ\Phi$$

se poate deduce sistemul simetric LTQΦ care a fost stabilit direct de Prof. P. Calantarov.

De exemplu:

Câmp electric $E = LMT^{-2}Q^{-1} = L^{-1}T^{-1}\Phi$.

Câmp magnetic $H = L^{-1}T^{-1}Q$.

Capacitate $C = L^{-2}M^{-1}T^{2}Q^{2} = TQ\Phi^{-1}$.

Inductanta $L = L^{2}MQ^{-2} = TQ^{-1}\Phi$.

m) Corelaţia dimensiunilor şi unităţilor electromagnetice şi electrostatice ale mărimilor electrice şi magnetice

Tabela 12

Mărimea	Dimensiunile		Raportul Ue/Um dintre unităţile CGS electrostatice şi electromagnetice
	electromagnetice ($\mu_0 = 1$)	electrostatice ($\varepsilon_0 = 1$)	
Sarcină electrică	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1/c$
Câmp electric	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	c
Deplasare electrică	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1/c$
Flux de deplasare	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1/c$
Constantă dielectrică	$L^{-2}T^{2}$	1	$1/c^2$
Potenţial electric F.e.m.	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	c
Capacitate	$L^{-1}T^{2}$	L	$1/c^2$
Curent electric	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$1/c$
Rezistenţă	LT^{-1}	$L^{-1}T$	c^2
Conductanţă	$L^{-1}T$	LT^{-1}	$1/c^2$
Permeabilitate	1	$L^{-2}T^{2}$	c^2
Flux magnetic	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}$	c
Inductanţă	L	$L^{-1}T^{2}$	c^2
Inducţie magnetică	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	c
Câmp magnetic	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$1/c$
Potenţial magnetic F.m.m.	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$1/c$
Reluctanţă	L^{-1}	LT^{-2}	$1/c^2$
Moment magnetic	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}$	c
Intensitate de magnetizare	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	

Observaţii. Dimensiunile sunt deduse din sistemele cu patru unităţi fundamentale LMTμ şi LMTε în care dimensiunile μ (electromagnetic) şi ε (electrostatic) sunt suprimate.

Factorul c are valoarea $c = 3.10^{10}$ cm/s.

Raportul dintre valorile mărimilor electrice şi magnetice este invers faţă de raportul Ue/Um al unităţilor respective.

Exemple. a) 1 Unitate CGS e.s. tensiune electrică = 3.10^{10} Unit. CGS e.m. = 300 Volţi

b) 1500 Volţi = 15.10^{10} Unităţi CGS e. m. = $\frac{15.10^{10}}{3.10^{10}}$ = 5 Unităţi CGS e.s.

Indicaţii asupra folosirii simbolurilor literale ale mărimilor electrotehnice

(după STAS 3087-52)

Acest standard indică simbolurile prin litere latine şi greceşti: mari sau mici.

Se recomandă a se folosi literele în forma indicată în standard.

Totuşi în caz de necesitate, literele mici pot fi folosite în locul literelor mari şi vice-versa, dacă schimbarea nu poate produce confuzie. In aceste cazuri, este bine însă să se precizeze semnificaţia acelor simboluri. In aceleaşi condiţii se poate face, la nevoie, şi schimbarea între literele latine şi cele greceşti corespunzătoare.

Orice particularizare a unei noţiuni poate fi realizată prin adăugarea de indici la simbolul respectiv.

Când, în aceeaşi lucrare intervin două mărimi pentru care standardele recomandă acelaşi simbol principal, una din ele va fi reprezentată prin simbolul ei secundar. Dacă nici una nu are simbol secundar, diferenţierea se va face printr'un indice.

Diversele semnificaţii ale valorii unei mărimi, ca momentană, maximă, efectivă, constantă, pot fi puse în evidenţă, prin indici, când precizarea este necesară. Se recomandă în special folosirea literelor mici pentru valorile momentane şi a literelor mari, cu sau fără indici, pentru valorile maxime, efective şi medii.

Folosirea în regim nearmonic a unor mărimi care în mod obişnuit nu au o semnificaţie decât în regim armonic — pulsaţie, reactanţă, impedanţă, admitanţă etc — se poate face numai pe baza unor definiţii şi a unor notaţii speciale.

Simbolurile mărimilor complexe pot fi scrise fie barat, fie nebarat. Simbolurile mărimilor conjugate pot fi precizate prin adăugarea unui asterisc. In general, notaţia specială a mărimilor complexe se foloseşte numai pentru mărimea totală, nu şi pentru componente.

Se scrie adică $\overline{Z} = R + jX$ nu $\overline{Z} = \overline{R} + j\overline{X}$. In caz de abiguitate între simbolurile barate (supraliniate), ca vector sau mărime complexă, se va preciza semnificaţia notaţiei.

o) PROIECTUL DE TERMINOLOGIE AL ELECTROTEHNICEI TEORETICE alcătuit de către comisia Comitetului de terminologie tehnică a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S.[1])

Definiţia noţiunilor fundamentale din electromagnetism: «electricitate», «câmp electromagnetic», etc. se bazează pe faptul de netăgăduit al materialităţii obiectelor corespunzătoare acestor noţiuni. Definiţiile răspândite ale noţiunilor «câmp electromagnetic», «câmp electric», «câmp magnetic», ca fiind spaţii, care posedă proprietăţi fizice speciale, nu sunt corecte, deoarece spaţiul este una din formele de existenţă ale materiei, dar câtuşi de puţin materia însăşi: câmpul electromagnetic însă este o formă a materiei. In consecinţă, câmpul electromagnetic nu este spaţiu. In afară de aceasta, proprietăţile fizice sunt proprii chiar diferitelor forme ale materiei şi aceste proprietăţi deosebesc diferitele forme ale materiei una de alta.

Trebuie menţionat că definiţia unora dintre noţiunile generale, datorită sferei lor largi este însoţită de descrierea unei serii de fenomene fizice caracteristice, în care se manifestă factorul fizic, corespunzător noţiunii examinate.

In terminologie, sunt date definiţii separate pentru noţiunile de «potenţial electric» — caracteristică câmpului electric coulombian, «forţă electromotoare» (f.e.m.) — caracteristică câmpului electric necoulombian, şi «tensiune electrică» — caracteristică câmpului electric rezultant. «Tensiunea electrică» este definită «în lungul unui drum dat», deoarece depinde de alegerea acestui drum.

In terminologie, se folosesc expresiile: «infinit mic», «destul de mic», «elementar» în legătură cu lungimile, ariile şi volumele, deasemenea şi în legătură cu diferite mărimi fizice (de ex. sarcini, conductanţe, etc.). Aceste expresii trebue înţelese în raport cu alte mărimi analoage, care determină trăsăturile de bază ale obiectului considerat (vezi, de exemplu, termenii Nr. 16, 17, 18, 22, 37, etc.).

Termenii, care sunt recomandaţi pentru noţiunea definită sunt scrişi cu caractere aldine. De regulă, pentru fiecare noţiune s'a stabilit numai un singur termen de bază, cel mai corect, eliberat de orice alte înţelesuri secundare, atribuindu-i-se un sens univoc. Totuşi, în unele cazuri, pe lângă termenul de bază, se propune un al doilea termen paralel, care însă nu este scris cu caractere aldine.

Dacă al doilea termen este o formă prescurtată a termenului de bază, adică nu conţine elemente de termeni noi, care să intre în componenţa termenului de bază, se permite utilizarea lui, paralel cu termenul de bază, numai în astfel de condiţii, când nu sunt posibile niciun fel de confuzii (de ex.: «capacitate» şi «capacitate electrică», vezi termenul Nr. 38). Uneori, termenul paralel este construit pe alt principiu (de ex.: «constantă de fază», şi «constanta undei», vezi termenul Nr. 194). In acest caz, la reexaminarea terminologiei, unul din termenii paraleli trebue înlăturat (de exemplu, în funcţie de rezultatele introducerii unei noi variante propuse, care este mai corectă, etc.).

Definiţia (în opoziţie cu termenul) nu poate să fie întrebuinţată întotdeauna în forma sa textuală. După natura expunerii (la un prim studiu al noţiunii şi necesitatea de a explica mai clar şi mai amănunţit esenţa fizică, etc.), definiţia desigur poate fi schimbată, însă fără a călca limitele noţiunii însăşi.

Pentru unii termeni se dau — în paranteze — sinonime, care, în literatură şi în practică se folosesc pentru noţiunea definită, însă nu pot fi recomandate din punct de vedere al preciziei întregului sistem terminologic. In acelaşi timp, unele din aceste sinonime nerecomandabile pentru noţiunile definite, sunt perfect indicate pentru alte noţiuni şi deaceea utilizarea lor în cazurile respective, poate fi perfect justificată.

[1]) Traducere executată de Editura tehnică.

a) Noţiuni fundamentale

1. **Electrotehnică teoretică.** Domeniul electrotehnicei, în care se studiază problemele de bază ale teoriei proceselor electromagnetice care prezintă importanţă pentru tehnică.

2. **Electricitate.** Proprietate a materiei (o formă specială de mişcare a materiei), având o natură dublă şi care se manifestă în anumite particule elementare de materie (electricitatea pozitivă în protoni şi pozitroni, cea negativă în electroni).

Observaţie. In sens restrâns, termenul «electricitate» se foloseşte uneori ca sinonim al termenului «sarcină electrică».

3. **Sarcină electrică.** Mărime scalară, care măsoară cantitativ electricitatea.

Observaţie. Sarcina electrică poate fi definită cu ajutorul fenomenelor interacţiunii mecanice între corpurile electrizate, cu ajutorul fenomenelor electrolizei, etc.

4. **Particulă încărcată.** Particulă elementară de materie, care are un prisos de electricitate pozitivă sau negativă.

5. **Câmp electromagnetic.** O anumită formă a materiei, care se distinge printr'o continuitate a distribuţiei în spaţiu şi se caracterizează prin proprietatea de a se propaga cu viteza luminii, prin proprietatea de a exercita o acţiune mecanică asupra curenţilor şi particulelor încărcate, procese în cursul cărora energia câmpului se transformă în alte forme de energie (termică, mecanică, etc.).

Observaţie. Aplicarea metodelor microfizicei la studiul câmpului electromagnetic scoate în evidenţă structura discretă a acestuia (fotonii).

6. **Câmp electric.** Unul din cele două aspecte ale câmpului electromagnetic, condiţionat (cauzat) de sarcini electrice şi de variaţiile câmpului magnetic şi care se caracterizează prin acţiunea mecanică asupra particulelor încărcate cu sarcini electrice.

7. **Câmp magnetic.** Unul din cele două aspecte ale câmpului electromagnetic, condiţionat (cauzat) de sarcinile electrice ale particulelor încărcate în mişcare şi de variaţiile câmpului electric şi care se caracterizează prin acţiunea mecanică asupra particulelor încărcate în mişcare.

8. **Câmp electrostatic.** Câmpul electric al sarcinilor electrice invariabile ca mărime şi poziţie.

9. **Inducţie electrostatică.** Fenomenul de inducere a sarcinilor electrice într'un corp neîncărcat în prezenţa unui alt corp încărcat, izolat de primul.

10. **Câmpul electric coulombian.** Câmp electric sau o componentă a acestuia, condiţionat (cauzat) de sarcini electrice fixe sau în mişcare şi care are caracter potenţial.

11. **Vid** (Vacuum). Stare de rarefiere limită a unui mediu molecular, care există în spaţiul interplanetar, precum şi stare de rarefiere limită a unui mediu molecular, care poate fi realizată prin metodele tehnice actuale.

Observaţie. In tehnica vidului, termenul «vacuum» se foloseşte pentru a defini un asemenea grad de rarefiere a unui gaz când lungimea parcursului liber al moleculei devine simţitor mai mare, decât dimensiunile liniare ale vasului, în care se creează această rarefiere.

12. **Energie electrică.** O anumită formă de energie în legătură directă cu aspectul electric al câmpului electromagnetic (cu câmpul electric) şi care se transformă în alte forme de energie, când câmpul electric variază, cum şi în procesul lucrului efectuat prin deplasarea într'un câmp electric a particulelor încărcate.

13. **Energie magnetică.** O anumită formă de energie în legătură directă cu aspectul magnetic al câmpului electromagnetic (cu câmpul magnetic) şi care se transformă în alte forme de energie când câmpul magnetic variază, cum şi în procesul lucrului efectuat prin deplasarea curenţilor electrici introduşi în câmp.

14. **Energie electromagnetică.** Energia câmpului electromagnetic, compusă din energiile electrică şi magnetică.

b) Sarcini electrice

15. **Sarcină electrică de volum.** Sarcină electrică distribuită într'un anumit volum.

16. **Sarcină electrică de suprafaţă.** Sarcină electrică distribuită în volumul unui strat de grosime neglijabilă.

17. **Sarcină electrică liniară.** Sarcină electrică distribuită în volumul unui tub a cărui secţiune are dimensiuni neglijabile.

18. **Sarcină electrică punctiformă.** Sarcină electrică, concentrată într'un volum de dimensiuni neglijabile.

19. **Densitatea de volum a sarcinii electrice într'un anumit punct.** Densitatea de volum a sarcinii. Mărime scalară, care caracterizează distribuţia sarcinii electrice de volum şi este egală cu limita raportului dintre sarcina de volum şi volumul în care această sarcină este concentrată, când porţiunea de volum considerată tinde către zero.

20. **Densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice într'un anumit punct.** Densitatea de suprafaţă a sarcinii. Mărime scalară, care caracterizează distribuţia sarcinii electrice de suprafaţă şi este egală cu limita raportului dintre sarcina de suprafaţă şi aria stratului în care este concentrată această sarcină, când aceea arie considerată tinde către zero.

21. **Densitatea liniară a sarcinii electrice într'un anumit punct.** Densitatea liniară a sarcinii. Mărime scalară, care caracterizează distribuţia sarcinii electrice liniare şi este egală cu limita raportului dintre sarcina liniară şi lungimea tubului în care este concentrată această sarcină, când lungimea considerată tinde către zero.

22. **Dipol electric.** Două sarcini electrice punctiforme legate între ele, egale ca mărime şi opuse ca semn, aşezate la o distanţă infinit mică una de cealaltă.

23. **Momentul electric al dipolului electric.** Mărime vectorială, egală cu produsul dintre una din sarcinile dipolului şi distanţa dintre ele şi îndreptată dela sarcina negativă spre cea pozitivă.

24. **Momentul electric al corpului.** Suma vectorială a momentelor electrice ale tuturor dipolilor, din care este compus corpul considerat.

c) Caracteristicile electrice fundamentale ale diferitelor medii şi ale câmpului electric

25. **Intensitatea câmpului electric.** Mărime vectorială care caracterizează acţiunea mecanică a câmpului electric asupra unei particule încărcate şi este egală cu limita raportului dintre forţa, cu care câmpul electric acţionează asupra particulei, introdusă în punctul considerat al câmpului şi sarcina acestei particule, când mărimea sarcinii tinde către zero; se consideră că direcţia vectorului coincide cu direcţia forţei, care acţionează asupra unei particule încărcate pozitiv.

26. **Polarizare electrică.** Stare a materiei, caracterizată prin faptul că momentul electric al întregului corp sau al unei porţiuni din el, are valoare diferită de zero.

27. **Dielectric.** Mediu sau corp, care se polarizează într'un câmp electric şi care permite ca în volumul său să existe timp îndelungat un câmp electrostatic.

28. **Polarizaţie electrică.** Mărime vectorială, care caracterizează, în punctul considerat, gradul de polarizare electrică a unui dielectric şi este egală cu limita raportului dintre vectorul momentului electric al unei porţiuni din volumul dielectricului, ce cuprinde punctul considerat şi acest volum, când acesta din urmă tinde către zero.

29. **Constantă de polarizare electrică** (susceptibilitate electrică). Mărime scalară, care caracterizează proprietatea dielectricului de a se polariza într'un câmp electric şi este egală cu raportul dintre factorul, care multiplică vectorul intensităţii câmpului electric în expresia vectorului polarizării electrice şi permeabilitatea electrică a vidului.

Observaţie. Coeficientul de polarizare electrică a unui mediu anisotrop este un tensor.

30. **Inducţia electrică.** Mărime vectorială, egală cu suma vectorilor intensităţii şi a polarizării electrice, fiecare multiplicat printr'un coeficient, care depinde de alegerea sistemului de unităţi.

Observaţie. In sistemul de unităţi M.K.S. (raţionalizat N.E.T.) coeficientul vectorului intensităţii este permeabilitatea electrică a vidului, iar coeficientul vectorului de polarizare este unitatea.

31. **Permitivitatea.** Constantă electrică (constantă dielectrică; permitivitate dielectrică). Factor care multiplică vectorul intensităţii câmpului electric în expresia vectorului inducţiei electrice în cazul unui mediu izotrop.

Observaţie. Permitivitatea unui mediu anisotrop este un tensor. Permitivitatea vidului în sistemul M.K.S. (raţionalizat N.E.T.) este:

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{4\pi\, 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{\text{farad}}{\text{metru}}.$$

32. **Permitivitate relativă** (constantă dielectrică relativă; permeabilitate dielectrică relativă). Raportul dintre permitivitatea mediului în punctul considerat şi permitivitatea vidului.

33. **Potenţial electric.** Mărime scalară, care caracterizează un câmp electric coulombian şi este egală cu limita raportului dintre lucrul efectuat de forţele acestui câmp, la deplasarea unei particule încărcate pozitiv din punctul considerat al câmpului într'un alt punct, al cărui potenţial este considerat egal cu zero, şi sarcina acestei particule, când sarcina tinde către zero (altfel: potenţialul electric este funcţia de punctul dat a cărui gradient, luat cu semn schimbat, este egal cu intensitatea câmpului).

34. **Diferenţa de potenţial electric dintre două puncte.** Limita raportului dintre lucrul forţelor câmpului electric coulombian, efectuat prin deplasarea unei particule încărcate pozitiv dintr'un punct în altul şi sarcina acestei particule, când sarcina tinde către zero (altfel: integrala de linie a intensităţii câmpului electric coulombian, luată între punctele considerate).

35. **Conductanţă.** Proprietate a unui corp, sau a unui mediu, de a conduce curentul electric continuu sub acţiunea unui câmp electric, care se măsoară prin raportul dintre puterea electrică absorbită de corp şi pătratul tensiunii aplicate corpului (Conductivitate electrică N.E.T.).

36. **Conductor.** Mediu conductor. Mediu sau corp care posedă conductanţă (altfel: mediu sau corp, în care nu este posibilă existenţa unui câmp electrostatic).

37. **Izolant.** Neconductor. Mediu neconductor. Mediu sau corp cu conductanţă neglijabilă.

Observaţie. Uneori, prin termenul «izolator» se denumeşte piesa, sau dispozitivul, care împiedică scurgerea sarcinilor electrice.

38. **Capacitate electrică.** Capacitate. Proprietate a corpurilor conductoare, de a înmagazina şi păstra sarcini electrice şi care se măsoară prin raportul dintre sarcina corpului izolat şi potenţialul său, presupunând că potenţialul unui punct depărtat la infinit este nul.

Observaţie. Uneori, prin termenul «capacitate» se denumeşte prescurtat dispozitivul, în care capacitatea electrică este folosită ca proprietate principală a acestui dispozitiv.

39. **Condesator.** Sistem format din doi conductori (armături) despărţiţi printr'un izolator, în care se foloseşte capacitatea sa electrică.

40. **Capacitatea condesatorului.** Valoarea absolută a raportului dintre sarcina electrică a uneia dintre armăturile condensatorului şi diferenţa de potenţial

dintre armături, cu condiţia ca armăturile să aibă sarcini egale ca valoare şi opuse ca semn.

41. **Capacitate parţială.** Capacitatea între doi conductori (« primul » şi « al doilea »), care fac parte dintr'un sistem de conductori, definită ca valoare absolută a raportului dintre sarcina « primului » conductor şi diferenţa de potenţial între « primul » şi « al doilea », dacă toţi conductorii, înafară celui de « al doilea », au acelaşi potenţial cu primul.

42. **Câmp electric necoulombian.** Câmp electric care nu este determinat prin legea lui Coulomb şi care este cauzat, de exemplu, de variaţia câmpului magnetic, de procese termice, de reacţii chimice, de fenomene de contact, etc.

43. **Intensitatea câmpului electric necoulombian.** Mărime vectorială egală cu limita raportului dintre forţa, care acţionează asupra unei particule încărcate într'un câmp electric necoulombian şi sarcina particulei, când sarcina tinde către zero.

44. **Forţa electromotoare. F.e.m.** Mărime scalară care caracterizează câmpul electric necoulombian şi a cărei valoare este egală cu integrala de linie a intensităţii câmpului necoulombian în lungul unui circuit care trece prin acest câmp.

45. **Tensiunea electrică între două puncte în lungul unui drum dat.** Mărime scalară, care caracterizează câmpul electric (necoulombian şi coulombian) şi a cărei valoare între două puncte în lungul unui drum dat, este egală cu integrala de linie a intensităţii câmpului electric rezultant în lungul acestui drum.

Observaţii. 1. In absenţa câmpului electric necoulombian, tensiunea electrică între două puncte este egală cu diferenţa între potenţialele electrice ale acestor puncte.

2. Tensiunea electrică în lungul unui circuit închis este egală cu f.e.m., care acţionează în acest circuit.

3. La determinarea tensiunii electrice la bornele unei surse de curent electric, drumul de integrare se consideră în afara sursei; când drumul de integrare nu întâlneşte un câmp necoulombian tensiunea sursei de curent este egală cu diferenţa de potenţial la bornele sursei.

46. **Potenţial electrodinamic vectorial.** Mărime vectorială al cărei rotor este egal cu vectorul inducţiei câmpului magnetic.

47. **Potenţial electrodinamic scalar.** Mărime scalară al cărei gradient, luat cu semn schimbat, este egal cu suma dintre intensitatea câmpului electric şi a derivatei în raport cu timpul a potenţialului electrodinamic vectorial.

d) Curent electric

48. **Curent electric.** Curent. Fenomenul de transport al particulelor încărcate, de variaţie în timp a câmpului electric, a polarizării electrice a dielectricilor şi a diferitelor procese electrice, care sunt însoţite de apariţia unui câmp magnetic (care excită câmp magnetic); curentul se măsoară printr'o mărime scalară, egală cu integrala de suprafaţă a vectorului densităţii de curent, luată pe suprafaţa considerată.

Observaţie. Mărimea scalară, care măsoară curentul, este denumită deobicei prin acelaşi termen curent).

49. **Curent electric de conducţie.** Curent de conducţie. Fenomenul de transport, sub acţiunea unui câmp electric al particulelor încărcate libere, măsurat printr'o mărime scalară, egală cu integrala de suprafaţă a vectorului densităţii de curent de conducţie, luată pe suprafaţa considerată.

50. **Curent electric de polarizare.** Curent de polarizare. Fenomenul de deplasare într'un dielectric a particulelor încărcate legate care se produce sub acţiunea unui câmp electric şi care este măsurat printr'o mărime scalară, egală cu integrala de suprafaţă a vectorului densităţii de curent de polarizare, luată pe suprafaţa considerată.

51. **Curent electric de convecţie.** Curent de convecţie. Fenomenul de transport al particulelor încărcate (atât libere cât şi legate), măsurat printr'o mărime scalară, egală cu integrala de suprafaţă a vectorului densităţii de curent de convecţie, luată pe suprafaţa considerată.

Observaţie. In sensul restrâns al cuvântului, prin curent electric de convecţie se înţelege fenomenul de transport al particulelor încărcate sub acţiunea unor forţe mecanice.

52. **Curent electric de deplasare în vid.** Curent de deplasare în vid. Fenomenul de variaţie în timp a câmpului electric, şi care este măsurat printr'o mărime scalară, egală cu integrala de suprafaţă a vectorului densităţii de curent de deplasare în vid, luată pe suprafaţa considerată.

53. **Curent electric de deplasare.** Curent de deplasare. Suma curentului electric de deplasare în vid şi a curentului electric de polarizare, măsurată printr'o mărime scalară, egală cu integrala de suprafaţă a vectorului densităţii de curent de deplasare, luată pe suprafaţa considerată.

54. **Densitate de curent electric de conducţie.** Mărime vectorială, a cărei direcţie coincide cu direcţia de mişcare a particulelor încărcate pozitiv şi al cărui modul este egal cu limita raportului dintre suma valorilor absolute ale sarcinilor electrice (libere N.E.T.) ale particulelor încărcate pozitiv şi negativ, ce se mişcă în sensuri opuse sub acţiunea unui câmp electric şi străbat, într'un interval oarecare de timp, un element de suprafaţă, normal pe direcţia de mişcare a acestor particule, şi produsul dintre acest interval de timp şi aria elementului de suprafaţă, când atât intervalul timp cât şi aria elementului de suprafaţă tind către zero.

55. **Densitatea de curent electric de polarizare.** Mărime vectorială egală cu limita raportului dintre variaţia vectorului de polarizare şi intervalul de timp în care se produce această variaţie, când acest interval de timp tinde către zero (altfel: derivata vectorului de polarizare în raport cu timpul).

56. **Densitatea de curent electric de convecţie.** Mărime vectorială, a cărei direcţie coincide cu direcţia de mişcare a particulelor încărcate pozitiv şi al cărei modul este egal cu limita raportului dintre suma valorilor absolute ale sarcinilor electrice (atât libere cât şi legate N.E.T.) ale particulelor încărcate pozitiv şi negativ, ce se mişcă în sensuri opuse şi străbat într'un interval oarecare de timp un element de suprafaţă, normal pe direcţia de mişcare a particulelor, şi produsul dintre acest interval de timp şi aria elementului de suprafaţă, când atât intervalul de timp cât şi aria elementului de suprafaţă tind către zero.

57. **Densitatea de curent electric de deplasare în vid.** Mărime vectorială, egală cu limita raportului dintre variaţia vectorului intensităţii câmpului electric, şi intervalul de timp în care se produce această variaţie, când acest interval de timp tinde către zero, înmulţită cu constanta electrică a vidului (altfel: derivata vectorului intensităţii câmpului electric în raport cu timpul înmulţită cu constanta electrică a vidului).

58. **Densitatea de curent electric de deplasare.** Mărime vectorială egală cu limita raportului dintre variaţia vectorului de inducţie electrică şi intervalul de timp în care se produce această variaţie când acest interval de timp tinde către zero (altfel: derivata vectorului de inducţie electrică în raport cu timpul).

59. **Densitate de curent electric.** Suma vectorială a vectorului densităţii de curent de conducţie, a vectorului densităţii de curent de convecţie şi a vectorului densităţii de curent de deplasare.

60. **Puterea curentului electric.** Limita raportului dintre lucrul efectuat de curentul electric într'un interval de timp şi acest interval, când intervalul de timp tinde către zero.

Observaţie. Limita considerată este deasemenea egală cu produsul dintre f.e.m. (tensiune) şi curent.

61. **Linie de curent electric.** Linie, la care tangenta în fiecare punct coincide cu direcţia vectorului densităţii de curent (altfel: linia vectorului densităţii de curent electric).

e) Circuit electric, elementele lui şi caracteristicile lor

62. **Rezistenţa electrică.** Proprietatea unui corp, sau a unui mediu, străbătut de curent de a transforma energia electrică în energie termică, care se măsoară prin raportul dintre puterea electrică absorbită de corp şi pătratul curentului care-l străbate.

Observaţie. Dispozitivul, compus din conductori în care se foloseşte rezistenţa lor electrică, este denumit uneori prescurtat «rezistenţă».

63. **Conductivitate electrică.** Factor care multiplică vectorul intensităţii câmpului electric rezultant în expresia vectorului densităţii curentului de conducţie.

Observaţii. 1. Conductivitatea electrică este deasemenea egală cu inversul rezistivităţii electrice.
2. Conductivitatea electrică a unui mediu anisotrop este un tensor.

64. **Rezistivitatea electrică.** Factor care multiplică vectorul densităţii de curent de conducţie în expresia vectorului intensităţii câmpului electric.

Observaţii. 1. Rezistivitatea electrică este deasemenea egală cu inversul conductivităţii electrice.
2. Rezistivitatea electrică a unui mediu anisotrop este un tensor.

65. **Coeficientul de temperatură al rezistenţei electrice.** Raportul dintre variaţia rezistenţei unui mediu, sau a unui corp, corespunzător unei variaţii de temperatură de un grad şi valoarea iniţială a valorii rezistenţei.

66. **Circuit electric.** Ansamblu de surse de curent, rezistente, capacităţi şi inductanţe, prin care pot circula curenţi electrici.

67. **Circuit electric liniar.** Circuit electric, în care rezistenţele, inductanţele şi capacităţile nu depind de valorile curenţilor care trec prin circuit sau de valorile tensiunilor în diferitele porţiuni ale circuitului.

68. **Circuit electric neliniar.** Circuit electric în care rezistenţele, inductanţele şi capacităţile pot varia în funcţie de curentul care trece prin circuit sau de tensiunea aplicată.

69. **Multipol.** O parte a circuitului electric care are cel puţin două borne.

70. **Multipol pasiv.** Multipol care nu conţine f.e.m. (surse de curent).

71. **Multipol activ.** Multipol care conţine f.e.m. (surse de curent).

f) Caracteristice magnetice fundamentale ale câmpului magnetic

72. **Inducţie magnetică.** Mărime vectorială care caracterizează acţiunea mecanică a unui câmp magnetic asupra unui curent electric, cum şi capacitatea câmpului magnetic de a genera, prin variaţia sa, un câmp electric rotaţional. Direcţia vectorului inducţiei magnetice într'un punct al câmpului este direcţia dela polul sud la polul nord al unui ac magnetic, aşezat în punctul considerat al câmpului şi orientat de forţele câmpului. Modulul vectorului inducţiei este egal cu limita raportului dintre forţa care acţionează asupra unui element de conductor prin care trece un curent şi produsul dintre lungimea acestui element şi intensitatea curentului, când atât lungimea elementului, cât şi curentul tind către zero, cu condiţia, ca elementul de conductor considerat să fie normal pe direcţia vectorului inducţiei.

73. **Linie de inducţie magnetică.** (linie magnetică). Linie, la care tangenta în fiecare punct coincide cu direcţia vectorului inducţiei magnetice.

74. **Tub de inducţie magnetică** (tub magnetic). Porţiune a câmpului magnetic, limitată de suprafaţa continuă formată de un tub, ale cărui generatoare sunt liniile de inducţie magnetică.

75. **Flux magnetic.** Fluxul vectorului inducţiei magnetice (altfel: integrala de suprafaţă a vectorului inducţiei magnetice luată pe suprafaţa considerată).

76. **Dipol magnetic.** Curent electric închis care circulă într'un circuit elementar.

77. **Moment magnetic al unui circuit elementar cu curent electric.** Moment magnetic al unui dipol magnetic. Mărime vectorială, proporţională cu produsul dintre valoarea curentului şi aria elementară limitată de circuitul prin care circulă curentul şi dirijată perpendicular pe această arie, după regula burghiului drept.

78. **Moment magnetic al unui corp.** Mărime vectorială, egală cu suma geometrică a momentelor magnetice ale curenţilor elementari închişi, echivalenţi cu curenţii moleculari ai corpului considerat.

79. **Magnetizare.** Proces, în urma căruia corpul capătă moment magnetic.

80. **Forţa de magnetizare** (forţă magnetomotoare). Mărime scalară, care caracterizează acţiunea magnetică a curentului electric, proporţională cu suma algebrică a curenţilor cuprinşi de circuitul închis considerat şi egală cu integrala de linie a intensităţii câmpului magnetic, luată în lungul circuitului. (raţ. N. E. T.)

81. **Polarizare magnetică.** Stare a materiei, caracterizată prin faptul că momentul magnetic al întregului corp, sau al unei porţiuni a acestuia, are o valoare diferită de zero.

82. **Intensitatea de magnetizare.** Mărime vectorială care caracterizează gradul de magnetizare a materiei într'un punct şi este egală cu limita raportului dintre vectorul momentului magnetic al unui volum oarecare, ce cuprinde punctul considerat şi acest volum, când volumul tinde către zero.

83. **Intensitatea câmpului magnetic.** Mărime vectorială, a cărei integrală de linie dealungul unui contur închis este proporţională cu suma curenţilor electrici macroscopici, ce străbat o suprafaţă continuă oarecare, limitată de conturul de integrare; această mărime este egală cu diferenţa dintre vectorul inducţiei magnetice şi intensitatea de magnetizare, fiecare multiplicat cu un factor dependent de alegerea sistemului de unităţi.

84. **Potenţial magnetic scalar.** Funcţie multiformă de punct, al cărei gradient, cu semn schimbat este egal cu intensitatea câmpului magnetic.

Observaţie. In punctele în care densitatea de curent electric este diferită de zero, nu există potenţial magnetic scalar.

85. **Diferenţa de potenţial magnetic scalar între două puncte.** Integrala de linie a intensităţii câmpului magnetic, luată între punctele considerate, cu condiţia, ca drumul de integrare să treacă printr'un domeniu în care densitatea curenţilor electrici este egală cu zero.

86. **Constanta de polarizare magnetică.** (susceptibilitate magnetică). Mărime scalară, care caracterizează proprietatea mediului de a se magnetiza sub acţiunea unui câmp magnetic, şi este egală cu fatorul ce multiplică vectorul intensităţii câmpului magnetic în expresia vectorului intensităţii de magnetizare.

Observaţie. Constanta de polarizare magnetică a unui mediu anisotrop este un tensor.

87. **Permeabilitate magnetică.** Factor care în cazul unui mediu isotrop multiplică vectorul intensităţii (câmpului magnetic N.E.T.) în expresia vectorului inducţiei magnetice.

Observaţie. Intr'un mediu anisotrop, permeabilitatea magnetică este un tensor. Permeabilitatea magnetică a vidului în sistemul M.K.S. (raţ. N.E.T.) este:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Henry}}{\text{metru}}.$$

88. **Permeabilitatea magnetică relativă.** Raportul dintre permeabilitatea magnetică a mediului într'un punct şi permeabilitatea magnetică a vidului.

89. **Curbă de primă magnetizare.** Curbă de variaţie a inducţiei magnetice, în funcţie de intensitatea câmpului magnetic, în cazul magnetizării — prin variaţie monotonă a câmpului magnetic — a unui corp în prealabil demagnetizat.

90. Hysteresis. Fenomenul ireversibil de magnetizare a unui mediu și al dependenței inducției magnetice în procesul de magnetizare de starea magnetică precedentă.

91. Ciclu hysteresis. Curba variației inducției magnetice în funcție de intensitatea câmpului magnetic, când intensitatea câmpului are o variație ciclică.

92. Forță coercitivă. Intensitatea câmpului magnetic care trebue aplicat unui corp magnetizat pentru a reduce inducția magnetică în corp la zero.

93. Magnetizare remanentă. Magnetizare ce se păstrează în corp când forțele de magnetizare, sau intensitatea câmpului magnetic exterior, devin egale cu zero.

94. Magnet. Corp care posedă magnetizare remanentă.

95. Electromagnet. Dispozitiv în care magnetizarea unui miez dintr'un material cu permeabilitate magnetică mare este întreținută de curentul care trece prin înfășurarea de magnetizare.

96. Inducție remanentă. Inducția magnetică a câmpului magnetic, excitat de magnetizarea remanentă.

97. Câmp magnetostatic. Câmpul magnetic al magneților permanenți imobili.

98. Pol magnetic nord. Porțiunea din suprafața unui magnet sau a unui electromagnet, pe care vectorul inducției magnetice și normala exterioară la această suprafață formează un unghi apropiat de zero sau egal cu zero.

99. Pol magnetic sud. Porțiunea din suprafața unui magnet sau a unui electromagnet, pe care vectorul inducției magnetice și normala exterioară la această suprafață formează un unghi apropiat de π sau egal cu π.

100. Circuit magnetic. Totalitatea mediilor și corpurilor ce se găsesc sub acțiunea unor forțe de magnetizare și sunt înlănțuite printr'un flux magnetic comun.

101. Reluctanța circuitului magnetic. Mărime, egală cu raportul dintre forța de magnetizare, care cauzează fluxul magnetic din circuitul magnetic considerat și acest flux.

102. Permeanța circuitului magnetic. Mărime, egală cu raportul dintre fluxul magnetic în circuitul magnetic considerat și forța de magnetizare care cauzează acest flux.

103. Reluctanță. Mărime egală cu raportul dintre diferența potențialelor magnetice scalare a două secțiuni echipotențiale a fluxului magnetic considerat și acest flux.

104. Permeanță magnetică. Mărime, egală cu raportul dintre fluxul magnetic considerat și diferența potențialelor magnetice scalare a două secțiuni echipotențiale ale acestui flux.

105. Flux total. Suma fluxurilor magnetice înlănțuite în diferitele spire ale circuitului electric considerat.

106. Flux total de inducție proprie. Fluxul total al unui circuit electric, condiționat (cauzat) de curentul electric din acest circuit.

107. Flux total de inducție mutuală. Fluxul total al unui circuit electric, condiționat (cauzat) de curentul electric dintr'un alt circuit electric.

108. Inducție electromagnetică. Fenomenul de producere a unui câmp electric rotațional prin variația câmpului magnetic și care duce la inducerea unei f.e.m. într'un circuit închis, când fluxul magnetic, care străbate acest circuit, variază, sau, când întreg circuitul sau o porțiune din el se mișcă într'un câmp magnetic.

109. Inducție proprie. Fenomenul de producere a unei f.e.m. într'un circuit electric prin variația curentului electric, care trece prin acest circuit.

110. Inducție mutuală. Fenomenul de producere a unei f.e.m. într'un circuit electric prin variația curentului electric care circulă într'un alt circuit, ambele circuite având un flux total comun.

111. Inductanță. Proprietate a circuitului electric care condiționează inducerea unei f.e.m. în acest circuit prin variația curentului care trece prin el și care se măsoară prin raportul dintre f.e.m. indusă în acest circuit și derivata în raport cu timpul a curentului care străbate circuitul, sau prin valoarea raportului dintre fluxul total de inducție proprie al acestui circuit și curentul care trece prin el, sau prin valoarea raportului dintre energia magnetică înmagazinată în câmpul magnetic și jumătate din pătratul curentului.

Observații. 1. Când permeabilitatea magnetică a mediului nu este constantă, inductanța nu mai poate fi univoc determinată.

2. Dispozitivul, format deobicei dintr'o bobină din material conductor, folosit pentru inductanța sa, este uneori denumit prescurtat « inductanță ».

112. Inductanță mutuală. Proprietate a unui circuit electric, care condiționează producerea unei f.e.m. într'un alt circuit electric, când variază curentul electric care trece prin primul circuit și care se măsoară prin valoarea raportului dintre f.e.m. indusă în al doilea circuit și derivata în raport cu timpul a curentului din primul circuit, sau prin valoarea raportului dintre fluxul total de inducție mutuală a celor două circuite și curentul din primul circuit.

Observație. Dacă permeabilitatea magnetică a mediului nu este constantă, acest termen nu mai poate fi univoc determinat.

g) Curent alternativ

Observații. 1. Termenii Nr. 113, 114, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 128, 129, 130, 151, 152, care se referă la « curent » se pot folosi și pentru « tensiune », « f.e.m. » etc.

2. Termenii Nr. 136, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 157, care se referă la « curent sinusoidal » se pot folosi și pentru « curent sinusoidal echivalent ».

113. Valoarea instantanee a curentului electric. Valoare instantanee a curentului. Intensitatea curentului electric în momentul considerat.

114. Curent electric periodic. Curent periodic. Curent electric ale cărui valori instantanee se repetă la anumite intervale de timp (perioade).

115. Perioadă. Intervalul de timp minim după trecerea căruia valoarea instantanee a mărimii variabile (f.e.m., tensiune sau curent) se repetă în aceeași succesiune, un număr indefinit de ori.

116. Frecvența curentului alternativ. Număr de perioade în unitatea de timp (altfel: mărime inversă perioadei).

117. Pulsație frecventă unghiulară. Factor care multiplică timpul în expresia argumentului unei mărimi sinusoidale, egal cu numărul de perioade în 2π secunde.

118. Curent neperiodic. Curent electric, care variază în timp după o lege neperiodică.

Observație. Curentul electric, care își păstrează valoarea neschimbată, se numește curent continuu.

119. Impuls de curent. Curent electric de scurtă durată.

120. Curent electric alternativ. Curent alternativ. In sensul larg al cuvântului — orice curent care variază în timp. In sensul restrâns al cuvântului — curent electric alternativ periodic a cărui valoare medie în timpul unei perioade este apropiată de zero sau egală cu zero.

121. Curent electric pulsatoriu. Curent pulsatoriu. Curent electric periodic, ale cărui valori instantanee de un semn sunt considerabil mai mari decât valorile instantanee de semn contrar.

122. Curent electric sinusoidal. Curent electric armonic. Curent sinusoidal. Curent electric periodic care variază în timp după o lege sinusoidală.

123. Curent electric nesinusoidal. Curent electric periodic, diferit de cel sinusoidal.

124. Faza unei mărimi sinusoidale. Fază. Valoarea unghiulară a argumentului unei mărimi sinusoidale, măsurată dela cel mai apropiat punct de trecere a acestei mărimi prin zero, către valori pozitive.

125. Defazare. Diferenţa fazelor a două mărimi care variază după o lege sinusoidală.

126. Fază inițială. Valoarea în momentul inițial a fazei unei mărimi care variază sinusoidal.

127. Puterea instantanee a curentului electric. Puterea instantanee a curentului. Valoarea puterii curentului electric în momentul considerat egală cu produsul valorilor instantanee a f.e.m. care acţionează în circuit, sau a tensiunii la bornele circuitului şi a curentului care trece prin circuit.

128. Valoarea eficace a curentului electric periodic. Valoarea eficace a curentului (valoarea efectivă a curentului electric periodic). Valoarea unui curent continuu, care în timpul unei perioade ar putea produce acelaşi efect termic ca şi curentul periodic considerat, egală cu rădăcina patrată din valoarea medie patratică a curentului periodic.

129. Componenta continuă a curentului electric periodic. Valoarea curentului continuu, egală cu valoarea medie a curentului periodic considerat, în intervalul uneia sau mai multor perioade întregi.

130. Valoarea medie a curentului electric alternativ. Valoarea medie a curentului. Valoarea curentului continuu, egală cu valoarea medie a curentului alternativ în intervalul semiperioadei pozitive.

131. Factor de formă al unei curbe periodice. Factor de formă. Raportul dintre valoarea eficace a mărimii reprezentată de curbă şi valoarea ei medie.

Observație. Valoarea medie se ia în intervalul semiperioadei pozitive.

132. Puterea aparentă a curentului electric periodic. Putere aparentă. Mărime egală cu produsul valorilor eficace a curentului electric periodic din circuit şi a tensiunii la bornele sale.

133. Puterea activă a curentului electric periodic. Puterea activă. Valoarea medie a puterii instantanee în circuitul electric dat, în intervalul unei perioade.

134. Factor de putere. Mărime egală cu raportul dintre puterea activă şi cea aparentă.

Observație. In cazul tensiunii sinusoidale, factorul de putere este egal cu cosinusul unghiului de defazare între tensiune şi curent.

135. Tensiune şi curent sinusoidal echivalente. Tensiune şi curent sinusoidal ale căror valori eficace şi putere activă coincid cu valorile eficace şi puterea activă ale curentului şi tensiunii periodice considerate.

136. Puterea reactivă a curentului sinusoidal. Putere reactivă. Rădăcina pătrată din diferenţa pătratelor puterii aparente şi puterii active.

Observație. 1. Puterea reactivă este egală cu produsul puterii aparente şi sinusul unghiului între curent şi tensiune.

2. Puterea reactivă se consideră pozitivă, când curentul este în urma tensiunii şi negativă când curentul este înaintea tensiunii.

137. Puterea reactivă a curentului electric periodic. Suma algebrică a puterilor reactive ale componentelor armonice ale curentului electric periodic considerat.

138. Puterea deformantă a curentului electric periodic. Puterea deformantă. Rădăcina pătrată din diferenţa pătratelor puterii reactive a curentului sinusoidal echivalent cu curentul periodic considerat şi puterea reactivă a curentului periodic.

139. Rezistenţa unui circuit de curent electric periodic. Rezistenţa activă. Mărime, egală cu raportul dintre puterea activă absorbită în circuit şi pătratul valorii eficace a curentului în acest circuit.

140. Conductanţa unui circuit de curent electric periodic. Conductanţă activă. Mărime, egală cu raportul dintre puterea activă absorbită în circuit şi pătratul valorii eficace a tensiunii la bornele sale.

141. Impedanţa unui circuit în curent sinusoidal. Mărime, egală cu raportul dintre valoarea eficace a tensiunii la bornele circuitului şi valoarea eficace a curentului în circuit.

142. Admitanţa circuitului în curent sinusoidal. Mărime, egală cu raportul dintre valoarea eficace a curentului care circulă prin circuit şi valoarea eficace a tensiunii la bornele sale.

143. Reactanţa circuitului în curent sinusoidal. Rădăcina pătrată din diferenţa pătratelor impedanţei şi rezistenţei active a circuitului.

Observaţie. Valoarea admitanţei circuitului este inversul valorii impedanţei sale.

Observaţii. 1. Reactanţa este deasemenea egală cu raportul dintre puterea reactivă a circuitului considerat şi pătratul valorii eficace a curentului în circuit.

2. Reactanţa este deasemenea egală cu produsul dintre impedanţă şi sinusul unghiului de decalaj între curent şi tensiune.

3. Reactanţa se consideră pozitivă, când curentul este în urma tensiunii şi negativă, când curentul este înaintea tensiunii.

144. Reactanţa inductivă a unui circuit în curent sinusoidal. Reactanţă inductivă. Reactanţă condiţionată de inductanţa circuitului şi egală cu produsul dintre valoarea inductanţei şi pulsaţie.

145. Reactanţă capacitivă a unui circuit în curent sinusoidal. Reactanţă capacitivă. Reactanţă condiţionată de capacitatea conectată la circuit şi egală cu inversul produsului dintre valoarea capacităţii şi pulsaţie.

146. Susceptanţa circuitului în curent sinusoidal. Rădăcina pătrată din diferenţa pătratelor admitanţei şi conductanţei active a circuitului.

Observaţii. 1. Susceptanţa este deasemenea egală cu raportul dintre puterea reactivă a circuitului dat şi patratul valorii eficace a tensiunii la bornele acestui circuit.

2. Susceptanţa este deasemenea egală cu produsul dintre admitanţă şi sinusul unghiului de decalaj între curent şi tensiune.

3. Susceptanţa se consideră pozitivă când curentul este în urma tensiunii şi negativă, când curentul este înaintea tensiunii.

147. Componentă activă a curentului sinusoidal. Componenta activă a curentului. Mărime egală cu raportul dintre puterea activă absorbită în circuitul considerat şi valoarea eficace a tensiunii aplicată la bornele acestui circuit.

Observaţie. Componenta activă a curentului este deasemenea egală cu produsul dintre valoarea eficace a curentului şi cosinusul unghiului de decalaj între curent şi tensiune.

148. Componenta activă a tensiunii sinusoidale. Componenta activă a tensiunii. Mărime, egală cu raportul dintre puterea activă absorbită în circuitul considerat şi valoarea eficace a curentului în acest circuit.

Observaţie. Componenta activă a tensiunii este deasemenea egală cu produsul dintre valoarea eficace a tensiunii şi cosinusul unghiului de decalaj între curent şi tensiune.

149. Componentă reactivă a curentului sinusoidal. Componenta reactivă a curentului. Raportul dintre puterea reactivă a circuitului considerat şi valoarea eficace a tensiunii la bornele sale.

Observaţie. Componenta reactivă a curentului este deasemenea egală cu produsul dintre valoarea eficace a curentului şi sinusul unghiului de decalaj între curent şi tensiune.

150. Componenta reactivă a tensiunii sinusoidale. Componenta reactivă a tensiunii. Raportul dintre puterea reactivă a circuitului considerat şi valoarea eficace a curentului în acest circuit.

Observaţie. Componenta reactivă a tensiunii este deasemeni egală cu produsul dintre valoarea eficace a tensiunii şi sinusul unghiului de decalaj între curent şi tensiune.

151. Amplitudinea complexă a curentului sinusoidal. Amplitudinea complexă a curentului. Mărimea complexă, independentă de timp, modulul şi argumentul căreia sunt respectiv egale cu amplitudinea şi faza iniţială a curentului sinusoidal considerat.

152. Expresia complexă a curentului sinusoidal. Expresie complexă a curentului. Mărime complexă, independentă de timp, modulul şi argumentul căreia sunt respectiv egale cu valoarea eficace şi faza iniţială a curentului sinusoidal considerat.

153. **Impedanţa complexă a unui circuit în curent sinusoidal.** Impedanţă complexă. Mărime complexă, egală cu raportul dintre amplitudinea complexă a tensiunii la bornele circuitului considerat şi amplitudinea complexă a curentului din acest circuit.

154. **Admitanţa complexă a unui circuit în curent sinusoidal.** Admitanţă complexă. Mărime complexă, egală cu raportul dintre amplitudinea complexă a curentului care trece prin circuitul considerat şi amplitudinea complexă a tensiunii la bornele sale.

Observaţie. Admitanţa complexă este mărimea inversă impedanţei complexe.

155. **Impedanţa echivalentă a circuitului sau a unei porţiuni a circuitului în curent sinusoidal.** Impedanţa echivalentă. Impedanţa, în care o tensiune sinusoidală, egală ca mărime şi fază cu tensiunea la bornele circuitului considerat, sau a unei porţiuni a acestui circuit produce acelaşi curent ca mărime şi fază, ca şi în circuitul considerat, sau în porţiunea respectivă a acestuia.

Observaţie. Pentru circuitul sau o porţiune din circuitul de curent continuu, rezistenţa echivalentă este egală cu rezistenţa în care o tensiune, egală cu tensiunea la bornele circuitului considerat sau la bornele unei porţiuni a acestuia, va produce acelaşi curent ca şi în circuitul sau în porţiunea de circuit considerat.

156. **Schemă echivalentă.** Schemă de înlocuire. Circuit electric a cărui rezistenţă (impedanţă) este echivalentă cu rezistenţa (impedanţa) circuitului considerat.

157. **Impedanţa de intrare a unui circuit în curent sinusoidal.** Impedanţă de intrare. Raportul dintre amplitudinea complexă a tensiunii la bornele de intrare ale circuitului considerat şi amplitudinea complexă a curentului din circuit.

Observaţie. Pentru un circuit de curent continuu, rezistenţa de intrare este egală cu raportul dintre tensiunea la bornele circuitului şi curentul care trece prin circuit.

158. **Rezonanţă.** Fenomenul de coincidenţă a fazelor unei tensiuni sinusoidale aplicată la bornele unui circuit oscilant şi a curentului care alimentează acel circuit.

Observaţie. La rezonanţă, sursa de energie, care alimentează circuitul, furnizează acestuia numai putere activă.

159. **Rezonanţă de tensiune.** Rezonanţă serie. Fenomenul de rezonanţă într'un circuit oscilant, care conţine inductanţă şi capacitate, conectate în serie în raport cu sursa de alimentare.

160. **Rezonanţă de curent.** Rezonanţă derivaţie. Fenomenul de rezonanţă într'un circuit oscilant, care conţine inductanţă şi capacitate, conectate în derivaţie în raport cu sursa de alimentare.

161. **Frecvenţă de rezonanţă.** Frecvenţa oscilaţiilor curentului şi tensiunii într'un circuit oscilant, la rezonanţă.

Observaţie. Intr'un circuit oscilant fără pierderi, frecvenţa de rezonanţă coincide cu frecvenţa proprie a circuitului.

162. **Ferorezonanţă.** Fenomenul care are loc în circuite ce conţin o inductanţă cu miez de fier şi capacitate conectate în serie sau în derivaţie, când, datorită unei variaţii a amplitudinii tensiunii sinusoidale aplicate, curentul îşi schimbă brusc mărimea şi semnul defazajului, trecând dintr'o stare stabilă, printr'o stare instabilă într'o altă stare stabilă.

h) Sisteme polifazate

163. **Sistem monofazat.** Ansamblul f.e.m. alternative de aceeaşi frecvenţă, care acţionează într'un circuit electric separat şi admit înlocuirea lor printr'o f.e.m. echivalentă.

Observaţie. Prin f.e.m. echivalentă, se înţelege o astfel de f.e.m. care, conectată în circuitul electric în locul sistemului de f.e.m. considerat produce în acest circuit curenţii de aceleaşi amplitudini şi faze, ca şi sistemul de f.e.m. considerat.

164. **Sistem bifazat.** Ansamblul a două sisteme monofazate în care f.e.m. echivalentă a sistemului al doilea este decalată în raport cu f.e.m. echivalentă a primului sistem cu unghiul $\frac{\pi}{2}$.

165. **Sistem polifazat.** Ansamblul mai multor sisteme monofazate cu o ordine dată a succesiunii lor, în care vectorii f.e.m. echivalente sunt decalaţi unul faţă de altul cu unghiuri a căror sumă este egală cu 2π.

166. **Sistem polifazat simetric.** Sistem polifazat în care f.e.m. echivalente ale fiecărui sistem monofazat sunt egale ca amplitudine şi decalate ca fază cu $\frac{2\pi}{m}$ una faţă de cealaltă, unde m este numărul de sisteme monofazate, care alcătuiesc sistemul polifazat considerat şi se numeşte numărul de faze al sistemului polifazat.

167. **Sistem trifazat simetric.** Ansamblul a trei sisteme monofazate, ale căror f.e.m. echivalente sunt egale ca amplitudine şi decalate cu $\frac{2\pi}{3}$ una faţă de cealaltă.

168. **Sistem polifazat echilibrat.** Sistem polifazat, a cărui putere instantanee este constantă şi egală cu puterea medie.

169. **Circuit monofazat.** Circuit electric separat, în care acţionează un sistem monofazat de f.e.m.

170. **Circuit polifazat.** Ansamblul unor circuite monofazate, în care acţionează un sistem polifazat de f.e.m.

171. **Fază.** Circuit monofazat care face parte din circuitul polifazat considerat.

172. **Circuit polifazat legat.** Circuit polifazat în care diferitele faze sunt legate electric între ele.

173. **Circuit polifazat simetric.** Circuit polifazat în care impedanţele complexe ale fazelor componente sunt indentice.

174. **Circuit polifazat nesimetric.** Circuit polifazat în care impedanţele complexe ale fazelor componente sunt diferite.

175. **Componente simetrice ale unui sistem polifazat nesimetric.** Trei sisteme polifazate, având acelaşi număr de faze ca şi sistemul polifazat nesimetric considerat, şi în care acest sistem poate fi descompus, cele trei sisteme monofazate constând din:

1) sistemul homopolar, în care vectorii coincid ca amplitudine şi fază;

2) sistemul de succesiune directă — sistem simetric — în care vectorii au aceeaşi succesiune ca şi în sistemul nesimetric considerat.

3) sistemul de succesiune inversă — sistem simetric — în care vectorii au o succesiune inversă faţă de sistemul considerat.

i) Procese tranzitorii

Observaţie. Termenii Nr. 177, 178, 179, 180 şi 181, referitor la curent, pot fi folosiţi şi pentru tensiune, f.e.m., sarcină, etc.

176. **Proces tranzitoriu într'un circuit electric.** Proces tranzitoriu. Proces variabil. Proces nepermanent. Proces electromagnetic, care apare într'un circuit electric când:

1) variază rezistenţele, inductanţele şi capacităţile circuitului şi

2) variază curenţii în circuit şi tensiunile aplicate circuitului sau diferitelor porţiuni ale acestuia.

177. **Curent electric permanent.** Curent electric periodic sau continuu, care — după terminarea procesului tranzitoriu — se stabileşte într'un circuit electric când circuitul este sub acţiunea unei surse de f.e.m., de tensiune periodică sau continuă.

178. Curent electric tranzitoriu. Curent nepermanent Curent variabil. Curent electric, care se produce în circuit în timpul procesului tranzitoriu.

Observaţie. Curentul tranzitoriu este egal cu suma algebrică a curenţilor electrici liber şi permanent.

179. Curent electric liber. Curent electric, care apare într'un circuit electric datorită rezervei de energie electromagnetică, înmagazinată în acest circuit, când nu există surse de energie exterioare.

Observaţie. In fenomenele tranzitorii, curentul liber este egal cu diferenţa dintre curentul tranzitoriu şi cel permanent.

180. Curent liber oscilant. Curent electric liber care are oscilaţii.

181. Curent liber aperiodic. Curent liber, care variază monoton în timp.

182. Admitanţă tranzitorie. Funcţie de timp având dimensiunea unei conductanţe, egală cu raportul dintre valoarea curentului tranzitoriu într'un circuit electric, sau într'o porţiune a acestuia, la conectarea acestui circuit sau a unei porţiuni din el la o tensiune constantă, şi valoarea acestei tensiuni.

183. Circuit oscilant. Circuit electric, care conţine inductanţă şi capacitate şi în care sunt posibile oscilaţii libere ale curentului şi tensiunii.

184. Frecvenţa proprie a circuitului oscilant. Frecvenţă proprie. Frecvenţa oscilaţiilor libere, ale curentului şi tensiunii, care apar într'un circuit oscilant.

185. Amortizare. Micşorarea în timp a intensităţii unui proces fizic, legată în mod obişnuit de disiparea energiei acestui proces.

186. Decrementul logaritmic al amortizării. Decrement logaritmic. Caracteristica amortizării unui proces oscilant, egală cu logaritmul raportului dintre două valori instantanee ale mărimii oscilante, considerate la intervalul unei perioade.

187. Constanta de timp a circuitului. Intervalul de timp în decursul căruia procesul tranzitoriu se amortizează de $e = 2{,}718\ldots$ ori.

188. Atenuare. Micşorarea intensităţii unui proces fizic ondulatoriu în timpul propagării lui în spaţiu, legată în mod obişnuit de disiparea energei acestui proces.

j) Circuite cu constante repartizate

189. Circuit electric cu constante concentrate. Circuit electric în care — în funcţie de condiţiile regimului circuitului — se poate considera că rezistenţa, inductanţa şi capacitatea sunt concentrate pe diferite porţiuni ale circuitului şi nu influenţează una pe cealaltă.

190. Circuit electric cu constante repartizate. Circuit electric în care rezistenţa, inductanţa şi capacitatea sunt distribuite dealungul întregului circuit, sau a unor porţiuni ale acestuia.

191. Impedanţa caracteristică. Raportul dintre amplitudinea complexă a tensiunii şi amplitudinea complexă a curentului într'o undă electro- magnetică sinusoidală progresivă, ce se propagă în lungul unei linii.

192. Constantă de propagare. Mărime complexă care caracterizează variaţia modulului şi argumentului amplitudinii complexe a unei unde sinusoidale progresive de tensiune şi de curent, când ea se propagă pe o unitate de lungime în lungul unei linii; constanta de propagare este egală cu logaritmul raportului dintre amplitudinile complexe ale curentului (sau ale tensiunii) în două puncte ale liniei, aşezate — unul faţa de celălalt — la o distanţă egală cu lungimea de undă.

193. Constantă de atenuare. Mărime, care caracterizează micşorarea amplitudinii undei progresive de curent şi tensiune, când această undă s'a deplasat cu o unitate de lungime; constanta de atenuare este egală cu partea reală a constantei de propagare.

194. Constantă de fază. Constantă de lungime de undă. Mărime, care caracterizează variaţia fazei undei sinusoidale de curent şi tensiune, când această undă s'a deplasat cu o unitate de lungime; constanta de fază este egală cu partea imaginară a constantei de propagare.

III. BAZELE FIZICE ŞI TEORETICE ALE ELECTROTEHNICEI

A. Electrocinetica

1. **Forţa electromotoare** este cauza fizică în măsură să producă şi să menţină un curent electric într'un circuit electric închis (Proprietăţi, la cap. « *Mărimi şi Unităţi* »).

Ea este produsă de un generator de energie electrică. Unitatea practică de forţă electromotoare este voltul.

2. **Curentul electric** este sarcina electrică care trece în unitatea de timp printr'un conductor sau printr'un circuit. Unitatea practică de curent electric este amperul (Proprietăţi la cap. « *Mărimi şi Unităţi* »).

3. **Rezistenţa electrică** a unui conductor este raportul dintre o diferenţă de potenţial constantă aplicată la extremităţile sale şi intensitatea de curent care se produce în acel conductor, atunci când acesta nu este sediul unei forţe electromotoare. Unitatea practică de rezistenţă este ohmul.

4. **Legea lui Ohm** este o lege experimentală, care stabileşte că între intensitatea curentului (sau pur şi simplu curentul) permanent I stabilit într'un conductor de o rezistenţă R şi forţa electromotoare E aplicată acelui conductor există relaţia:

$$E = RI.$$

Această lege poate fi scrisă şi sub forma:

$$I = GE.$$

Ambele forme se aplică conductorilor care nu au f.e.m. interioare. Factorul de proporţionalitate G este tot o mărime fizică la fel ca şi R şi se numeşte *conductanţa conductorului*. Relaţia dintre G şi R este deci:

$$G = \frac{1}{R}.$$

Atunci când E este măsurat în volţi şi I, în amperi, R este măsurat în ohmi, iar G, în mho sau siemen şi (simbol S). Dacă în interiorul conductorului se desvoltă o forţă electromotoare internă E_c, atunci legea lui Ohm se scrie:

$$E_t + E_c = RI$$

sau

$$I = G(E_t + E_c)$$

în care E_t este f.e.m. aplicată la extremităţile conductorului.

5. **Rezistenţa conductorilor cilindrici** este proporţională cu lungimea l şi invers proporţională cu secţiunea lor transversală S:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

în care factorul de proporţionalitate ρ se numeşte *rezistivitatea materialului* din care este făcut conductorul. (Pentru valorile numerice ale factorului ρ la diferite materiale v. Capitolul « *Materialele electrotehnice* »).

Rezistivitatea este o mărime fizică, ea caracterizând proprietăţile electrice ale conductorului.

Conductanţa unui conductor electric este:

$$G = \gamma \frac{S}{l},$$

în care γ se numeşte *conductivitatea materialului*. Deoarece $G = I/R$, rezultă că:

$$\gamma = \frac{1}{\rho}.$$

6. Variaţia rezistivităţii, în funcţie de temperatură. Rezistivitatea tuturor corpurilor variază cu temperatura. Rezistivitatea metalelor pure şi a celor mai multe aliaje creşte cu temperatura; rezistivitatea carbonului şi a electroliţilor descreşte cu temperatura.

Pentru condiţiile uzuale şi pentru variaţii de temperatură nu mai mari decât 100°C, rezistivitatea la temperatura t_2 se calculează plecând dela rezistivitatea la temperatura t_1, utilizând formula:

$$\rho_{t_2} = \rho_{t_1} [1 + \alpha (t_2 - t_1)],$$

în care α este coeficientul de variaţie a rezistivităţii cu temperatura, pentru materialul dat şi pentru temperatura iniţială t_1. Pentru cupru, care are rezistivitatea prevăzută în Standardul Internaţional de Cupru recopt şi în STAS 1531-50 $\alpha_{20} = 0{,}003\ 93$, temperatura fiind măsurată în °C.

Proprietatea metalelor de a-şi mări rezistivitatea odată cu creşterea temperaturii a fost stabilită de savantul rus Lenz.

(Pentru valorile lui α la diferiţi conductori, v. Capitolul « *Materialele electrotehnice* »).

7. Legile lui Kirchhoff. Intr'o reţea electrică oarecare, distribuţia curenţilor şi potenţialelor se face după următoarele legi:

In oricare nod, suma algebrică a curenţilor este zero:

$$\sum I = 0,$$

adică suma curenţilor care intră în nod este egală cu suma curenţilor care ies din el; această lege exprimă conservarea sarcinilor electrice.

Pe oricare drum închis al reţelei, parcurs în acelaşi sens, suma algebrică a tensiunilor întâlnite este zero:

$$\sum U = 0.$$

Această lege se poate exprima şi astfel:

Parcurgând oricare drum închis într'o reţea oarecare, această parcurgere fiind efectuată într'un sens oarecare, suma produselor dintre curenţii întâlniţi pe parcurs şi rezistenţele parcurse de aceşti curenţi este egală cu suma forţelor electromotoare întâlnite pe parcurs:

$$\sum RI = \sum E \quad \text{sau} \quad \sum (E - RI) = 0.$$

8. Precauţii de luat la scrierea legilor lui Kirchhoff. La scrierea primei legi se va atribui semnul plus curenţilor care intră în nod şi semnul minus curenţilor care ies din nod.

La scrierea celei de a doua legi a lui Kirchhoff, curenţii care au acelaşi sens cu drumul parcurs se vor introduce în ecuaţia respectivă cu semnul plus, iar curenţii de sens contrar cu semnul minus.

Deasemenea se va atribui semnul plus forţelor electromotoare întâlnite pe drumul parcurs în sens pozitiv (adică acest drum este în interiorul f.e.m. dela polul — la polul +); în caz contrar f.e.m. respective vor fi introduse în ecuaţia corespunzătoare cu semnul minus.

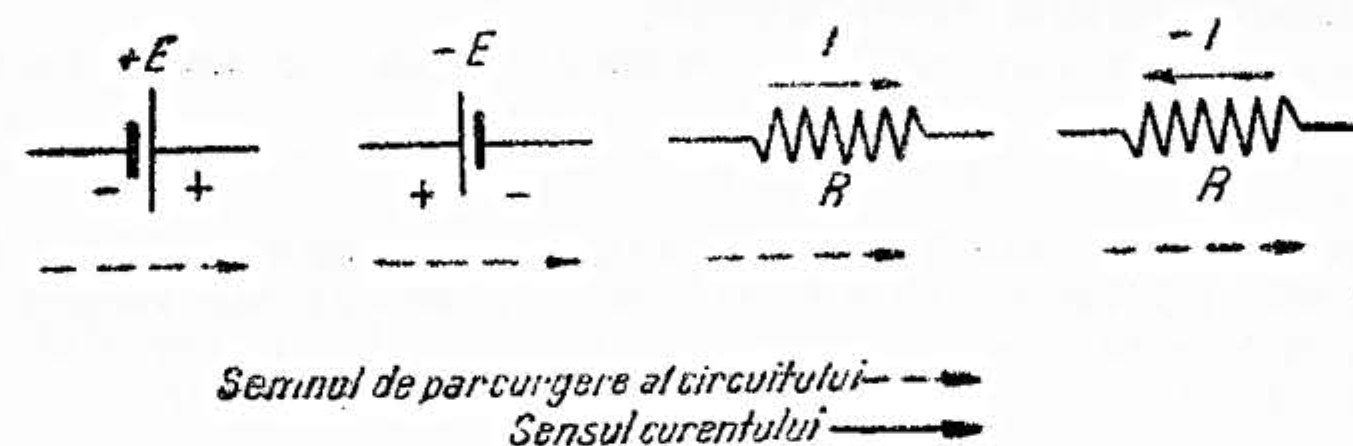


Fig. 1. Semnul atribuit curenţilor şi forţelor electromotoare.

Atunci când nu se cunoaşte sensul adevărat al curenţilor şi f. e. m. dintr'o reţea, se atribue acestor elemente sensuri arbitrare. Din scrierea legilor lui Kirchhoff pe baza acestor sensuri arbitrare, rezultă un număr de ecuaţii care, odată rezolvate, indică valorile reale ale curenţilor şi f.e.m. Valorile reale au chiar sensurile adoptate pentru acele rezultate ale calculului care vor fi găsite pozitive şi vor avea un sens contrar celui adoptat pentru cele la care rezultatul este negativ.

Numărul total al ecuaţiilor care se pot scrie într'o reţea aplicând legile lui Kirchhoff, este mai mare decât numărul elementelor necunoscute. Trebue să se menţină numai ecuaţiile liniar independente între ele.

Dacă se notează cu p numărul nodurilor şi cu l numărul laturilor unei reţele, numărul legilor lui Kirchhoff, independente între ele, care se pot scrie pentru acea reţea este:

— din legea întâi: $n_1 = p - 1$.
— din legea a doua: $n_2 = l - p + 1$.

9. Montarea rezistenţelor şi rezistenţele echivalente

Rezistenţe şi conductanţe în serie. Atunci când două sau mai multe rezistenţe sunt montate în serie, rezistenţa echivalentă R a montajului este egală cu suma rezistenţelor montate în serie:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

Atunci când două sau mai multe conductanţe sunt montate în serie, conductanţa echivalentă G se determină prin relaţia

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \ldots$$

Rezistenţe şi conductanţe în paralel. Valoarea expresiilor echivalente este dată în acest caz prin expresiile următoare:

Rezistenţe în paralel: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$

Conductanţe în paralel: $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$

Se poate deduce această regulă simplă: rezistenţele se adună simplu atunci când sunt montate în serie, conductanţele se adună simplu atunci cânt sunt montate în paralel.

In practică cel mai des se întâlneşte cazul a două rezistenţe montate în derivaţie (paralel). In acest caz:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

10. **Montarea forţelor electromotoare**

In serie. Forţa electromotoare E echivalentă cu mai multe f.e.m. montate în serie este:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$$

In derivaţie. Mai multe f.e.m. egale având fiecare aceeaşi valoare E, montate în derivaţie, sunt echivalente cu o f.e.m. egală, având aceeaşi valoare E. Dacă se notează cu r rezistenţa internă a uneia dintre aceste f.e.m., curentul I pe care îl produce f.e.m. totală debitând pe o rezistenţă exterioară R este:

$$I = \frac{E}{R + \frac{r}{n}},$$

în care n este numărul f.e.m. egale, montate în paralel.

Două pile de f.e.m. diferite E_1 şi E_2 de rezistenţe interioare diferite r_1 şi r_2 montate în paralel sunt echivalente cu o f.e.m.:

$$E = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2}{r_1 + r_2}$$

11. **Tensiune şi potenţial electric.** Intre două puncte a şi b ale unei reţele există o tensiune electrică:

$$U = V_{ab} = \sum E - \sum RI,$$

în care V_{ab} este tensiunea dintre punctele a şi b atunci când drumul între aceste puncte este urmat dela b la a pe oricare traseu, posibil în reţea, între aceste două puncte;
R şi I — rezistenţele conductorilor şi curenţii întâlniţi pe acelaşi drum.;
E — f.e.m. întâlnite dela b la a;
V_{ab} este independent de drumul parcurs. In fig. 2:

$$V_{ab} = -E - R_1 I_1 = +R_2 I_2 = +R_3 I_3.$$

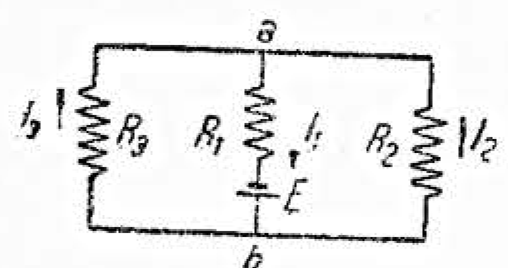


Fig 2. Tensiunea electrică.

α) *Proprietăţile tensiunii electrice:* V_{ab} depinde numai de starea electrică a punctelor a şi b.

In calcularea lui V_{ab} curenţii şi f.e.m. se vor considera cu semnele care rezultă din regula indicată în cazul legilor lui Kirchhoff. Deci:

$$V_{ab} = -V_{ba}.$$

Tensiunea este o mărime analoagă cu E şi se măsoară în aceleaşi unităţi.

β) *Potenţialul electric:* Tensiunile punctelor unei reţele sau ale unui sistem electric faţă de un punct oarecare, a cărui stare electrică este considerată ca origine pentru întregul sistem, se numesc potenţialele punctelor respective. Pentru punctele a, b, etc. ele se notează cu V_a, V_b, etc.

Potenţialul unui punct poate fi definit până la o constantă aditivă care este tocmai potenţialul punctului arbitrar de referinţă. In general se consideră că punctele dela infinit au potenţialul zero. Alteori se ia ca origine a potenţialelor potenţialul solului.

Intre tensiunea V_{ab} şi potenţialele V_a şi V_b există relaţia:

$$V_{ab} = V_a - V_b.$$

Potenţialul unui punct fiind cunoscut numai în raport cu potenţialul unui alt punct, el nu este determinat absolut, ci intervine imprecizia unei constante aditive. Deaceea el nu este susceptibil de adunare sau scădere, el este însă susceptibil de a fi egalat cu alt potenţial, raportat la aceeaşi origine.

Noţiunea de *tensiune* sau de *diferenţă de potenţial* elimină, prin scădere, constanta nedeterminată figurând în expresia unui potenţial. In consecinţă, tensiunea sau diferenţa de potenţial este susceptibilă atât de proprietatea de egalitate, cât şi de posibilitatea de adunare sau scădere.

Se va putea scrie deci:

$$V_{ab} + V_{bc} = V_{ac};$$

dar nu are niciun sens să se adune V_a cu V_b.

12. **Sarcina electrică.** Conform proprietăţi indicate pentru această mărime la Capitolul « *Mărimi şi Unităţi* », un conductor parcurs de curentul i, este străbătut în intervalul $t_2 - t_1$ de o sarcină electrică — adică de o cantitate de electricitate — egală cu:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt,$$

în care curentul i poate fi un curent variabil în timp.

13. **Principii de teoria reţelelor.** In general unele din necunoscutele unei reţele, f.e.m. sau curenţii, pot fi determinate în funcţie de celelalte elemente. In acest scop pot fi folosite diverse metode.

α) *Metoda legilor lui Kirchhoff.* Cu ajutorul acestor legi se poate determina întotdeauna numărul de ecuaţii necesare pentru rezolvarea unei reţele. Trebue dată atenţie la alegerea numărului de ecuaţii independente între ele, ecuaţii care trebue scrise după normele indicate mai sus. (La $A8$).

β) *Metoda descompunerii în circuite separate* (Maxwell). Se demonstrează că se poate concepe întreaga reţea ca fiind formată din juxtapunerea unei serii de *circuite separate*, străbătut fiecare de un curent propriu al său, denumit curent de circuit sau de contur. Procedeul este următorul:

Se aleg aceste circuite egale ca număr şi ca traseu cu acelea pentru care se pot scrie ecuaţii distincte din legea a doua a lui Kirchhoff ($n = l - p + 1$).

Se dă fiecărui curent de circuit un sens arbitrar şi se notează aceşti curenţi necunoscuţi cu $i_1, i_2 \ldots i_n$.

Se scrie sistemul de ecuaţii:

$$R_{11} i_1 + R_{12} i_2 + \ldots + R_{1n} i_n = \sum E_1$$
$$R_{21} i_1 + R_{22} i_2 + \ldots + R_{2n} i_n = \sum E_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_{n1} i_1 + R_{n2} i_2 + \ldots + R_{nn} i_n = \sum E_n$$

în care $R_{11}, R_{22} \ldots R_{nn}$ sunt rezistenţele totale ale circuitelor separate 1,2...n şi care figurează pozitiv în ecuaţiile de mai sus;
$R_{nm} = R_{mn}$ — rezistenţa laturii comune circuitelor de ordinul n şi m.

Această rezistenţă figurează în ecuaţie cu semnul +, dacă curenţii i_n şi i_m, prin sensurile care li s'au atribuit, au aceeaşi direcţie în latura R_{nm}.

Altfel rezistenţa figurează cu semnul —.

Este important de notat că întotdeauna $R_{mn} = R_{nm}$.

ΣE_n — suma algebrică a f.e.m. întâlnite pe circuitul de ordinul n, când el este parcurs în sensul atribuit acelui circuit, semnele f.e.m. intervenind în acea sumă după normele stabilite la legile lui Kirchhoff. (La A8).

Rezolvarea sistemului de ecuaţii dă curenţii de circuit $i_1, i_2 \ldots i_n$, care au chiar sensurile adoptate pentru acele rezultate ale calculului care vor fi găsite pozitive şi invers.

Curenţii reali în fiecare latură vor fi suma algebrică a curenţilor circuitelor străbătând acele laturi.

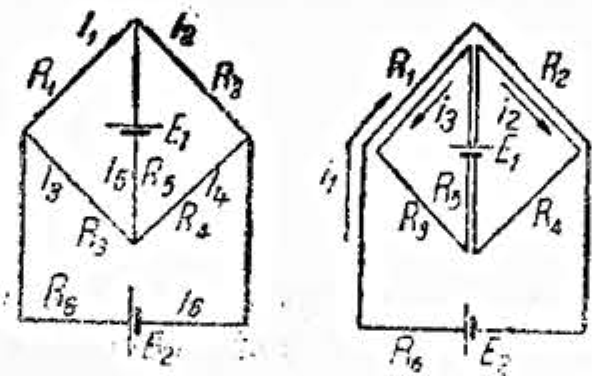


Fig. 3. Descompunerea unei reţele în circuite separate.

Exemplu de aplicaţie. Reţeaua din figura 3 cu rezistenţele $R_1, R_2 \ldots R_6$, cu f.e.m. E_1 şi E_2, are curenţii necunoscuţi $I_1, I_2 \ldots I_6$. Ea poate fi descompusă în trei circuite independente, parcurse de curenţii i_1, i_2, i_3, cu semnele atribuite în figură. Conform regulii de mai sus sistemul se scrie:

$$(R_1 + R_2 + R_6)\, i_1 + R_2\, i_2 - R_1\, i_3 = E_2\,,$$
$$R_2\, i_1 + (R_2 + R_4 + R_5)\, i_2 + R_5\, i_3 = E_1\,,$$
$$- R_1\, i_1 + R_5\, i_2 + (R_1 + R_3 + R_5)\, i_3 = E_1\,.$$

Rezolvând, în raport cu i_1, i_2, i_3 se găseşte

$$I_1 = i_1 - i_3,\ I_2 = i_1 + i_2,\ I_3 = i_3,\ I_4 = i_2,\ I_5 = i_2 + i_3,\ I_6 = i_1.$$

✕ γ) *Teorema suprapunerii efectelor.* Atunci când într'o reţea acţionează simultan mai multe f.e.m., curentul produs într'o latură oarecare a reţelei este egal cu suma curenţilor produşi în acea latură de către fiecare f.e.m. acţionând singură în reţea.

✕ δ) *Teorema compensaţiei.* Orice rezistenţă R străbătută de un curent I poate fi înlocuită cu un generator de rezistenţă nulă şi de f.e.m. egală cu căderea de tensiune ($-RI$) dintre bornele sale, având deci sensul opus curentului respectiv I.

ε) *Teorema lui Thévenin.* Curentul dintr'o latură a unei reţele are expresia:

$$i = \frac{V_{ab}}{r + R_{ab}}$$

în care V_{ab} este tensiunea care ar exista între punctele a şi b ale reţelei (puncte a şi b reprezentând extremităţile laturii considerate), atunci când reţeaua ar fi formată numai din celelalte laturi — latura ab lipsind — cu f.e.m. situate în poziţia lor reală;

r — rezistenţa laturii considerate;

R_{ab} — rezistenţa echivalentă de ansamblu a reţelei, între aceleaşi puncte a şi b, toate f.e.m. din reţea fiind scurt-circuitate, şi latura ab lipsind.

Dacă, de exemplu, se notează cu V_0 tensiunea în gol între cele două puncte a şi b şi cu I_{sc} curentul care ar trece printr'un conductor de rezistenţă $r = 0$ care ar uni cele două puncte, atunci:

$$R_{ab} = \frac{V_0}{I_{sc}} \quad \text{sau} \quad I_{sc} = \frac{V_0}{R_{ab}}\,.$$

Teorema lui Thévenin dă schema echivalentă a unei reţele, schemă în care generatorul de f.e.m. constantă şi egală cu V_0 şi de rezistenţă internă R_{ab} este în serie cu rezistenţa exterioară.

Se poate vedea însă uşor că este posibil să existe şi o schemă echivalentă în derivaţie, în care un generator de curent constant I_{sc} debitează pe rezistenţa R_{ab} în paralel cu rezistenţa exterioară.

ξ) *Reţele echivalente stea-triunghi.* Uneori calcularea unei reţele devine mai uşoară dacă se înlocuiesc anumite ochiuri triunghiulare ale reţelei, prin montaje

în stea; de exemplu în fig. 4 se înlocuieşte ochiul R_{12}, R_{23}, R_{31} prin steaua echivalentă R_{10}, R_{20}, R_{30}. Intre aceste mărimi există relaţiile:

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_{20} = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$
$$R_{30} = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}\,.$$

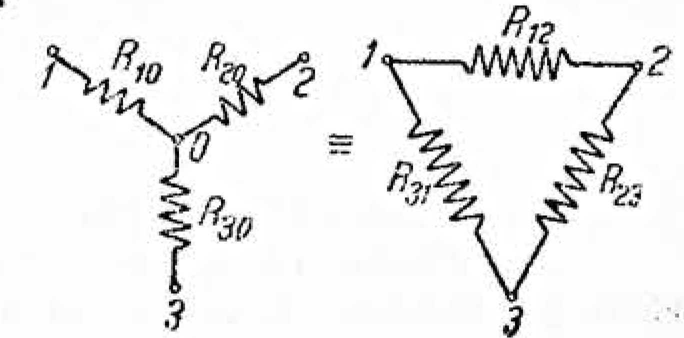


Fig. 4. Transfigurarea stea-triunghi.

Invers, pentru a înlocui o stea printr'un triunghi, se pot folosi relaţiile:

$$R_{12} = \frac{R_{10}R_{20} + R_{20}R_{30} + R_{30}R_{10}}{R_{30}} = \frac{N}{R_{30}}, \quad R_{23} = \frac{N}{R_{10}}, \quad R_{31} = \frac{N}{R_{20}}\,.$$

η) *Teorema reciprocităţii (Maxwell.)* Dacă o f.e.m. E situată în o latură AB, produce un curent i în latura CD, în mod reciproc acea f. e. m, cu aceiaşi valoare şi acelaşi semn, mutată din latura AB, în latura CD, produce în AB un curent i egal cu acel precedent din CD.

θ) *Teorema transferului maxim de putere.* Sarcina optimă R, care absoarbe puterea maximă dela un generator de o rezistenţă internă R_0, are valoarea:

$$R = R_0.$$

Dacă se notează cu E f.e.m. a generatorului, puterea maximă P_M care poate fi absorbită dela generator este:

$$P_M = \frac{E^2}{4R_0}\,.$$

Această teoremă se demonstrează imediat, ţinând seama că puterea absorbită dela generator de o sarcină R este:

$$P = R\,\frac{E^2}{(R + R_0)^2}\,.$$

Pentru a afla maximul lui P, anulăm derivata în raport cu R; se obţine tocmai condiţia $R = R_0$.

Observaţie importantă. Toate teoremele de mai sus subsistă numai în cazul reţelelor liniare, adică al reţelelor formate numai din elemente liniare, la care se aplică legea lui Ohm, adică reţele fără tuburi electronice, redresori uscaţi, elemente deformante, etc.

Elementele reţelei — condensatorii, rezistenţele şi inductanţele — sunt constante în timp, adică nu îşi variază valoarea.

Studiul reţelelor cu parametrii variabili constitue o problemă specială, la care savanţii sovietici L. I. Mandelstam, N. D. Papalexi, A. A. Andronov şi alţii, au o contribuţie importantă, ei desvoltând printre altele teoria rezonanţei parametrice.

14. Exemple de calcul al reţelelor.

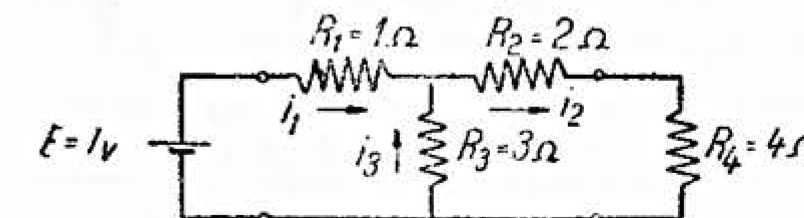


Fig. 5. Reţea la care se cere să se calculeze curenţii din ramuri.

Fie cuadripolul în T din fig. 5; se cere să se determine curentul care va trece printr'o rezistenţă exterioară R_4, atunci când cuadripolului i se aplică o f.e.m. de un volt.

Această problemă se va soluţiona în diferite moduri:

α) *Prin ecuaţiile lui Kirchhoff.* Se fixează arbitrar ca sensuri ale curenţilor, acele sensuri indicate prin săgeţi în fig. 5. Deoarece $p = 2$ şi $l = 3$, se va putea scrie:

$n_1 = 2 - 1 = 1$ o ecuaţie relativă la noduri;

$n_2 = 3 - 2 + 1 = 2$ două ecuaţii relative la conture.

Aceste ecuaţii sunt:

$$\sum i = 0, \qquad i_1 + i_3 - i_2 = 0, \qquad (1)$$

$$\sum RI - \sum E = 0, \qquad 1.i_1 - 3i_3 - 1 = 0, \qquad (2)$$

$$(2 + 4)\, i_2 + 3i_3 = 0. \qquad (3)$$

In ecuaţia (1) i_2 apare cu semnul minus, deoarece iese din nod.

In ecuaţia (2) i_1 apare cu semnul plus, pentrucă este întâlnit în sensul deplasării pe contur; i_3 apare cu semnul minus pentrucă este întâlnit în sens contrar deplasării. La f.e.m. întâlnind mai întâi polul negativ, ea se consideră pozitivă.

Soluţia sistemului (1), (2), (3) este:

$$i_1 = +\frac{1}{3}, \qquad i_2 = +\frac{1}{9}, \qquad i_3 = -\frac{2}{9}.$$

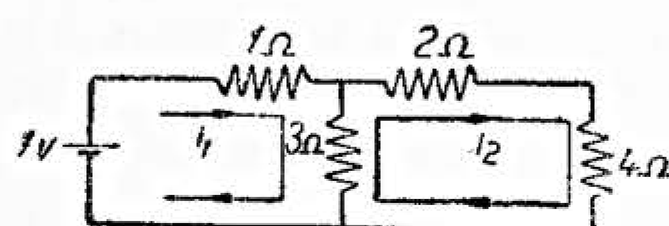


Fig. 6. Rezolvarea reţelei din fig. 5, prin ecuaţiile ochiurilor.

Deoarece i_3 are semnul minus, înseamnă că sensul său adevărat este contrar celui fixat arbitrar de noi. Curentul ce trece prin rezistenţa exterioară R_4 este tocmai $i_2 = \frac{1}{9}$ A.

β) *Prin ecuaţiile ochiurilor* (soluţia lui Maxwell). Se consideră reţeaua ca fiind formată din $N = l - p + 1 = 2$ ochiuri independente, în care circulă curenţii fictivi i_j.

Pentru reţeaua în cauză, se poate scrie sistemul de ecuaţii:

$$1 = (1 + 3)\, i_1 - 3\, i_2,$$

$$0 = -3\, i_1 + (2 + 4 + 3)\, i_2,$$

de unde rezultă imediat:

$$i_1 = \frac{1}{3}, \qquad i_2 = \frac{1}{9},$$

şi apoi:

$$i_3 = i_1 - i_2 = \frac{2}{9}.$$

Se constată că soluţia lui Maxwell duce la un sistem de ecuaţii liniare care se scriu foarte uşor, la care $z_{jk} = z_{kj}$ (în cazul de faţă $z_{12} = z_{21} = -3$) soluţionabile imediat prin determinanţi. Curenţii reali se obţin însumând curenţii fictivi care trec prin braţul respectiv (în cazul de faţă aceasta se aplică la curentul care trece prin R_3). Curentul căutat este egal cu $i_2 = \frac{1}{9}$ A.

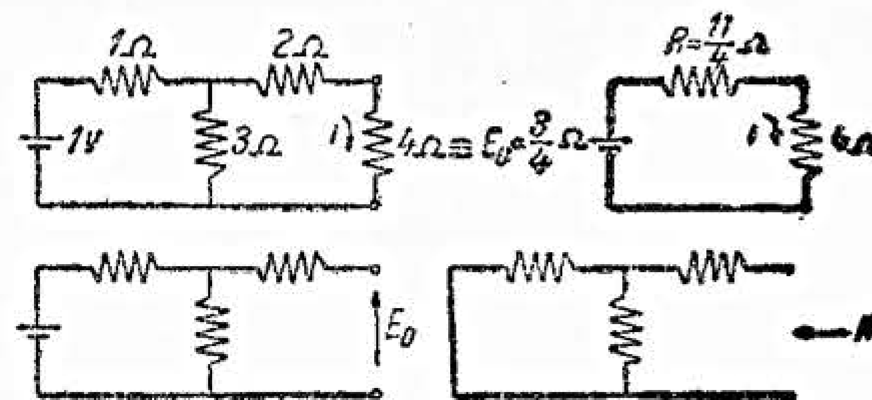


Fig. 7. Rezolvarea reţelei din fig. 5 prin teorema lui Thévenin.

γ) *Prin teorema lui Thévenin,* care se aplică comod în cazul de faţă.

Tensiunea care se simte când bornele de eşire sunt în gol este:

$$E_0 = \frac{3}{4}.$$

Rezistenţa pe care o prezintă reţeaua între aceleaşi borne atunci când f.e.m. este scurt-circuitată este:

$$R = \frac{3 \cdot 1}{3+1} + 2 = \frac{11}{4}.$$

Curentul care va circula prin rezistenţa exterioară va fi deci:

$$i = \frac{E_0}{R + R_4} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{4} + 4} = \frac{1}{9}.$$

Este avantajos să se aplice teorema lui Thévenin mai ales în probleme de adaptare de sarcini.

Precum s'a arătat şi la teoria reţelelor, R se poate determina şi din curentul de scurt-circuit I_{sc}:

$$I_{sc} = \frac{3}{11};$$

$$R = \frac{E_0}{I_{sc}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{11}} = \frac{11}{4}.$$

δ) *Prin schema echivalentă derivaţie.* După această metodă, cu notaţia dela teorema lui Thévenin, schema echivalentă a reţelei este aceea din fig. 8 deci:

$$i = \frac{R}{R + 4} I_{sc} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{11}{4} + 4} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{9}.$$

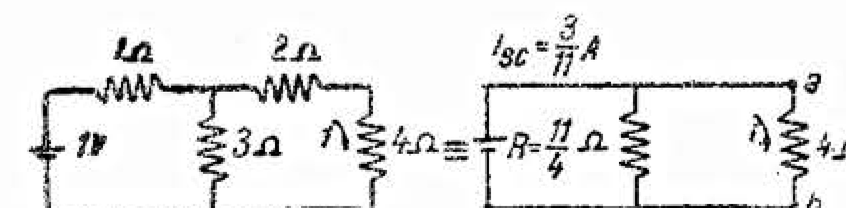


Fig. 8. Rezolvarea reţelei din fig. 5 prin schema echivalentă derivaţie.

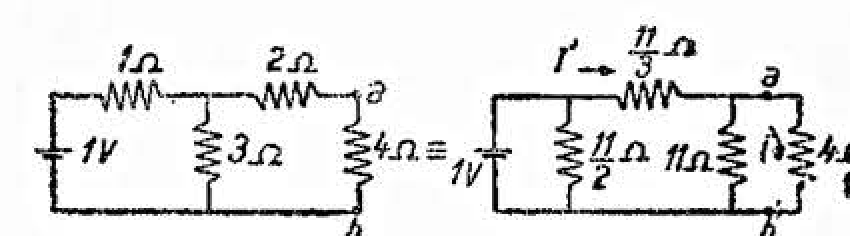


Fig. 9. Rezolvarea reţelei din fig. 5 prin teorema transfigurării.

ε) *Teorema transfigurării.* Transformând cuadripolul în stea într'unul în triunghi, se obţine situaţia din fig. 9, de unde:

$$I' = \frac{1}{\frac{11 \cdot 4}{11+4} + \frac{11}{3}};$$

$$i = \frac{11}{11 + 4} I' = \frac{1}{9}.$$

ζ) *Teorema reciprocităţii* poate fi verificată pe reţeaua considerată. S'a văzut că aplicarea unei f.e.m. de 1 V în serie cu R_1, face ca prin R_4 să circule un curent $i = \frac{1}{9}$ A; în acest caz, prin R_1 circulă un curent $i_1 = \frac{1}{3}$ A. Dacă acum se schimbă

f.e.m. în serie cu R_4, prin R_1 va trece un curent i_1', care se calculează din sistemu de ecuaţii:

$$0 = (1 + 3)\, i_1' - 3\, i_2',$$
$$1 = -3 i_1' + (2 + 4 + 3)\, i_2',$$

adică

$$i_1' = \frac{1}{9},$$

egal cu curentul i_1 care trecea prin R_4 în primul caz.

Se verifică astfel teorema reciprocităţii.

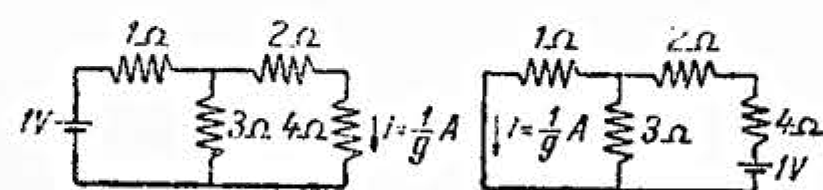


Fig. 10. Aplicarea teoremei reciprocităţii la reţeaua din fig. 5.

η) *Teorema transferului maxim de putere.* Pentru determinarea valorii pe care trebue să o aibă rezistenţa R_4 pentru ca puterea absorbită de ea să fie maximă, nu se poate aplica direct teorema transferului maxim de putere, deoarece între generator şi receptor se găseşte cuadripolul în T. Se poate însă utiliza teorema lui Thévenin (v. mai sus) în care s'a echivalat reţeaua plus generatorul, cu un generator de $\frac{3}{4}$ V f.e.m. şi $\frac{11}{4}$ Ω rezistenţă internă. Rezultă că R_4 trebue să aibă valoarea $\frac{11}{4}$ Ω, pentru a extrage puterea maximă dela sursă. Această putere este de:

$$P = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{4 \times \frac{11}{4}} = \frac{9}{176} \approx \frac{1}{20}\ \text{W}.$$

Dacă R_4 are altă valoare, puterea absorbită de ea este în orice caz mai mică.

B. Electrostatica şi câmpul electric

15. Fenomene generale electrostatice. Se cunoaşte încă din antichitate că anumite corpuri, prin frecare, capătă proprietatea de a atrage corpurile uşoare. Studiile sistematice făcute au arătat că această atragere a corpurilor se datoreşte electrizării corpurilor frecate [1]). Se disting două feluri de electricităţi: una pozitivă şi una negativă.

Legile care guvernează interacţiunea materială a corpurilor electrizate sunt:

α) Corpurile încărcate cu electricitate de acelaşi fel se resping.

β) Corpurile încărcate cu electricitate de fel diferit se atrag.

[1]) Este de menţionat că Prof. D. Negreanu a descoperit o importantă aplicare a acestui fapt, realizând o maşină pentru sortarea minereurilor neferoase, bazată pe electrizarea prin frecare a minereurilor. — Prof. D. Negreanu are şi importante contribuţii la verificarea experimentală a teoriei maxwelliană a electricităţii, anume la verificarea legii indicelui de refracţie.

γ) Legea cantitativă prin care se exprimă forţa F de acţiune între două sarcini electrice, practic punctuale, este *legea lui Coulomb*:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{(în regim clasic)},\\ F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{(în regim raţionalizat)}, \end{aligned}\right\} \qquad (15.1)$$

în care Q_1 şi Q_2 sunt sarcinile electrice ale celor două corpuri în interacţiune; r — distanţa între ele, iar ε (respectiv ε') constanta dielectrică (sau permitivitatea) mediului dintre corpurile electrizate. Forţa are direcţia dreptei care uneşte cele două sarcini punctuale.

16. Câmpul electric

α) *Fenomenele electrostatice* nu trebue interpretate ca o acţiune care se propagă instantaneu la distanţă dela un corp la altul, ci ca o acţiune materială, care se propagă din aproape în aproape prin întreg spaţiul dintre cele două corpuri. Această acţiune provine din interacţiunea cantităţilor de electricitate cu câmpul electric.

Legea lui Coulomb se poate scrie şi sub forma:

$$\overline{F} = \overline{E} Q_1 \quad , \quad E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_2}{r^2} \text{ (clasic)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\frac{Q_2}{r^2} \text{ (raţionalizat)},$$

în care E este intensitatea câmpului electric (sau mai pe scurt câmpul electric) produs de sarcina Q_2 în punctul din spaţiu în care se găseşte situată sarcina Q_1. Mărimea E este o mărime definită în toate punctele spaţiului, însă care se poate manifesta numai în acele puncte din spaţiu în care există sarcini electrice.

Se înlocueşte astfel acţiunea la distanţă formulată de legea lui Coulomb, prin conceptul de acţiune în apropiere — sau din aproape în aproape — acţiune care se propagă datorită câmpului electric E, care este o mărime fizică vectorială.

β) *Câmpul produs de sarcini electrice.* Formula (15.1) dă numai mărimea forţei care se exercită între două mase electrice Q_1 şi Q_2 şi este scrisă în ipoteza că dimensiunile geometrice ale sarcinilor electrice sunt mici în raport cu distanţa dintre ele.

Forţa se exercită pe linia care uneşte cele două sarcini, care se atrag dacă sunt de semne contrarii şi se resping dacă sunt de acelaşi semn.

Când coordonatele unei sarcini Q sunt (x, y, z), atunci câmpul produs de această sarcină în punctul de coordonate (x', y', z') este:

— în regim clasic $\overline{E}(x', y', z') = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\overline{r}_0 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{r^3}\overline{r}$;

— în regim raţionalizat $\overline{E}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\frac{Q}{r^2}\overline{r}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\frac{Q}{r^3}\overline{r}$,

având ca modul:

— în regim clasic $|\overline{E}| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$;

— în regim raţionalizat $|\overline{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\frac{Q}{r^2}$,

în care r este distanţa dintre punctul în care se află sarcina Q care generează câmpul şi punctul în care acesta se evaluează, astfel încât:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

$\bar{r}_0$ este vectorul unitate luat pe direcţia lui r şi îndreptat dela sursa câmpului (x, y, z) spre punctul unde se evaluează câmpul $\bar{E}(x', y', z')$.
In consecinţă se poate scrie

$$\bar{r} = r \cdot \bar{r}_0.$$

Câmpul de sarcini electrice astfel stabilit este un câmp de surse ca şi toate câmpurile newtoniene. El se mai numeşte şi câmp coulombian.
Factorul ε este o mărime fizică. El caracterizează mediul material în care se exercită interacţiunea materială a celor două sarcini electrice (v. Capitolul «*Mărimi* şi *Unităţi*»).
Dacă distanţa dintre corpuri este comparabilă cu dimensiunile geometrice ale corpurilor electrizate, în cazul unei distribuţii spaţiale de sarcini, având o densitate de volum ρ, în funcţie de coordonatele x, y, z, câmpul este dat de:

— în regim clasic $\bar{E}(x', y', z') = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho(x, y, z)\, \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv;$

— în regim raţionalizat $\bar{E}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\int_V \rho(x, y, z)\, \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dv;$ (16.1)

unde operatorul ∇ este vectorul operator nabla:

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

γ) *Câmpul de inducţie*. Pentru a arăta totuşi identitatea fenomenelor electrostatice, independent de natura mediului din spaţiul respectiv, este convenabil a introduce o nouă mărime, $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$, care, ca şi $\bar{E}$, este un vector. $\bar{D}$ se numeşte inducţie electrică. In regim clasic $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$, iar în regim raţionalizat se scrie $\bar{D}' = \varepsilon'\bar{E}$, în care $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4\pi}$.

Maxwell a denumit *deplasare electrică* câmpul care în regim clasic este $\frac{1}{4\pi}\varepsilon\bar{E}$.
In consecinţă, în regim raţionalizat deplasarea electrică este $\varepsilon'\bar{E}$.
Pe când inducţia electrică este diferită ca valoare în regim clasic şi raţionalizat, valoarea deplasării electrice este aceiaşi în ambele regimuri.

17. Teorema lui Gauss. Fluxul ψ al lui $\bar{D}$ care iese printr'o suprafaţă închisă S este proporţional cu cantitatea de electricitate din interiorul lui S:

clasic: $\psi = \int_S \bar{D}\cdot\bar{n}\, da = 4\pi\Sigma Q_i$, raţionalizat: $\psi' = \int_S \bar{D}\cdot\bar{n}\, da = \Sigma Q_i$ sau

în cazul unei distribuţii continue având densitatea de volum ρ:

clasic: $\psi = 4\pi\int_V \rho\, dv$, raţionalizat: $\psi' = \int_V \rho\, dv$. (17.1)

Ca şi câmpul electric, câmpul de inducţie este un câmp liniar şi anume: câmpurile $\bar{D}_i$ produse în acelaşi punct de sarcinile Q_i dau o rezultantă $\bar{D}$, egală cu suma vectorilor D_i, adică se aplică — ca şi în cazul vectorilor $\bar{E}$ — principiul suprapunerii efectelor. Acesta nu se aplică la anumite medii — cum ar fi cele fero-electrice.

18. Legile electrostaticei exprimate sub forma locală (punctuală)

Teorema lui Gauss. Cu aceleaşi notaţii ca mai sus, în cazul unei distribuţii continue de sarcini electrice, teoremele (15.1), (16.1), (17.1) se scriu

clasic $\nabla\cdot\bar{D} = \mathrm{div}\,\bar{D} = 4\pi\rho$, raţionalizat $\nabla\cdot\bar{D}' = \rho$, (18.1)

adică, în coordonate carteziene:

clasic $\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho$, raţionalizat $\frac{\partial D'_x}{\partial x} + \frac{\partial D'_y}{\partial y} + \frac{\partial D'_z}{\partial z} = \rho$,

iar în cazul unei distribuţii superficiale de sarcină de densitate σ, ce există pe suprafaţa de separare a două medii diferite (1) şi (2)

clasic $\mathrm{Div}\,\bar{D} = 4\pi\sigma$, raţionalizat $\mathrm{Div}\,D' = \sigma$, (18.2)

în care operatorul $\mathrm{Div}\,\bar{D}$ se numeşte divergenţa superficială a lui D şi se defineşte prin:

$$\mathrm{Div}\,\bar{D} = \bar{D}\cdot\bar{n}_1 - \bar{D}\cdot\bar{n}_2,$$

în care $\bar{D}\cdot\bar{n}_1$ şi $\bar{D}\cdot\bar{n}_2$ reprezintă componentele câmpului $\bar{D}$, normale la suprafaţa pe care sunt distribuite sarcinile; normala $\bar{n}_1$ este luată înspre mediul (1), iar $\bar{n}_2$ înspre mediul (2).
Câmpul de inducţie este deci conservativ ($\mathrm{div}\,D = 0$, $\mathrm{Div}\,\bar{D} = 0$) în toate punctele în care nu sunt sarcini electrice.

19. Potenţialul electrostatic. Câmpul electric $\bar{E}$ poate fi privit ca provenind dintr'un potenţial electrostatic V, definit prin

$$\bar{E} = -\mathrm{grad}\, V = -\nabla V \doteq -\frac{dV}{dn}, \qquad (19.1)$$

în care dn este deplasarea elementară luată pe normala suprafeţei echipotenţiale ($V = ct$), care trece prin punctul considerat. Se demonstrează că în regiunile de spaţiu în care densitatea electrică este nulă, V satisface ecuaţiei lui Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

adică, în coordonate carteziene: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

In regiunile cu densitate ρ, V satisface ecuaţiei lui Poisson:

— în regim clasic $\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon}\rho;$

— în regim raţionalizat $\nabla^2 V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon'}\rho,$

unde în general ρ este o funcţie de punct: $\rho = \rho(x, y, z)$.
Soluţia acestei ecuaţii este:

— în regim clasic $V(x', y', z') = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho(x, y, z)}{r}\, dv;$

— în regim raţionalizat $V(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\int_V \frac{\rho(x, y, z)}{r}\, dv,$

unde $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Integrala se extinde asupra tuturor punctelor din spaţiu, în care se găsesc sarcini ρ. Dacă integrala de volum se extinde numai asupra unei porţiuni finite a spaţiului, care cuprinde numai o parte a sarcinilor, sau eventual nu cuprinde deloc sarcini, atunci (în regim raţionalizat)

$$V(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\int_V \frac{\rho(x, y, z)}{r}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS,$$

unde S reprezintă suprafaţa regulată ce mărgineşte volumul V.

In regim clasic se înlocueşte $4\pi\varepsilon'$ prin ε.

Integrala de suprafaţă reprezintă contribuţia la potenţialul din (x', y', z') a surselor (sarcinilor) exterioare volumului V.

Rezultă din formula de mai sus, că dacă volumul V nu cuprinde toate sarcinile, pentru calcularea potenţialului din (x', y', z') este necesar a cunoaşte valorile potenţialului V şi ale derivatei sale $\frac{\partial V}{\partial n}$, pe suprafaţa S.

Suprafeţele echipotenţiale, în fiecare punct al spaţiului sunt normale la câmpul electric din acel punct. Din ecuaţia de definire (19.1) — care justifică afirmaţia precedentă — rezultă că valoarea lui V într'un punct oarecare se cunoaşte până la o constantă aditivă arbitrară. In mod convenţional se elimină această imprecizie, considerând că la infinit potenţialul este nul. Rezultă atunci că fiecare punct are un potenţial bine precizat, dar care de fapt reprezintă diferenţa dintre potenţialul punctului şi potenţialul zero de origine. Intre două puncte oarecare se poate defini o tensiune electrostatică, egală cu diferenţa dintre potenţialele celor două puncte. Este evident că tensiunea electrostatică — spre deosebire de potenţialul electrostatic — este bine determinată, indiferent de convenţia făcută asupra potenţialului zero.

Potenţialul şi tensiunea electrostatică sunt de aceeaşi natură cu acelea din electrocinetică.

20. **Potenţialul în conductori.** In conductorii perfecţi, adică în conductorii de rezistivitate nulă, nu pot exista câmpuri electrice, deoarece ele ar da naştere unor curenţi infiniţi, ceeace nu poate exista în natură. Rezultă din (19.1) că în aceste corpuri potenţialul V este constant. Câmpul electric $\overline{E}$ poate exista numai în exteriorul conductorului, unde va fi normal la suprafaţa acestuia. Aplicând teorema lui Gauss (18.2) unei mici suprafeţe închise care taie suprafaţa rezultă:

— în regim clasic $|\overline{D}| = 4\pi\sigma \qquad |\overline{E}| = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\sigma;$

— în regim raţionalizat $|\overline{D}'| = \sigma \qquad |\overline{E}| = \frac{1}{\varepsilon'}\sigma,$

în care σ este densitatea de suprafaţă, iar $\overline{D}$ şi $\overline{E}$ sunt normale la suprafaţa considerată.

In cazul unei suprafeţe infinit mici, izolate în spaţiu, rezultă:

— în regim clasic $|\overline{D}| = 2\pi\sigma \quad , \quad |\overline{E}| = \frac{1}{\varepsilon}2\pi\sigma;$

— în regim raţionalizat $|\overline{D}'| = \frac{1}{2}\sigma \qquad |\overline{E}| = \frac{1}{2\varepsilon'}\sigma.$

21. **Imagini.** Suprafeţele echipotenţiale ale unei perechi de sarcini una pozitivă $+q$ şi una negativă $-q$, situate ambele într'un mediu dielectric omogen şi infinit, sunt nişte sfere ale căror centre se situează pe dreapta ce uneşte cele două sarcini.

Fie S o suprafaţă echipotenţială în jurul sarcinei $-q$. Această suprafaţă împarte întreg spaţiul în două regiuni distincte: una exterioară şi una interioară lui S. Se demonstrează că în regiunea exterioară lui S, câmpul nu se modifică dacă se îndepărtează sarcina $-q$, cu condiţia ca S să devie suprafaţa unui conductor. Sarcina $+q$ va induce pe suprafaţa conductoare o densitate superficială de sarcină astfel încât în regiunea exterioară lui S, câmpul total este acelaşi ca şi cel produs de cuplul $+q, -q$.

Se poate deci înlocui invers, suprafaţa S prin sarcina $-q$ fără ca să se modifice câmpul în regiunea exterioară. Deaceea sarcina $-q$ se numeşte imagina lui $+q$ faţă de S.

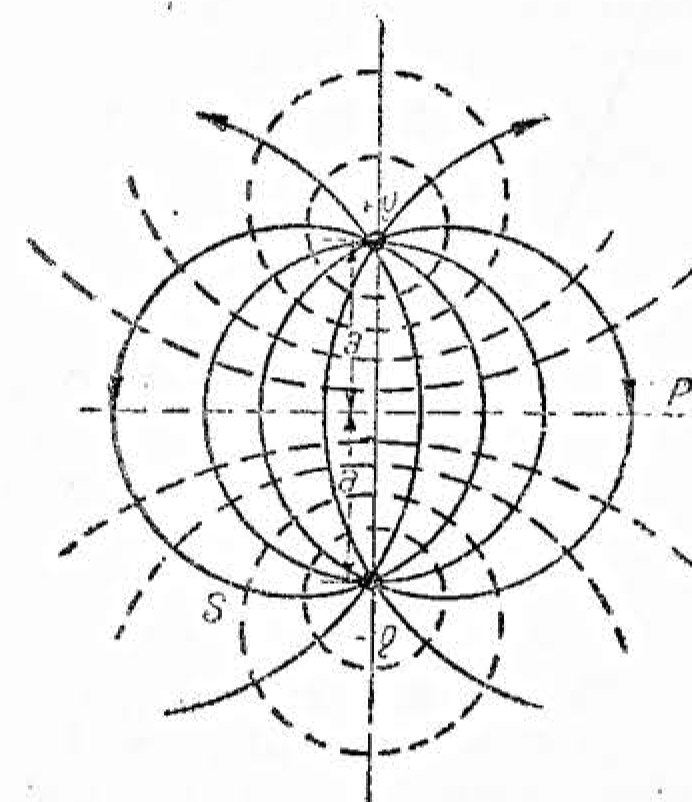


Fig. 10bis. O sarcină şi imagina ei.

Un caz foarte important în practică este acela în care suprafaţa S este chiar planul P situat la mijlocul distanţei dintre cele două sarcini şi perpendicular pe linia $+q$, $-q$. In acest caz, câmpul produs de o sarcină $+q$ situată la distanţa a de planul conductor, poate fi studiat în semispaţiul situat de partea sarcinei $+q$ înlocuind planul conductor prin imagina $-q$ a sarcinei $+q$ faţă de planul conductor. Imagina se va găsi pe linia perpendiculară din $+q$ pe plan, şi la o distanţă $2a$ de $+q$.

Inlocuirea sarcinilor exterioare suprafaţei ehipotenţiale S, printr'o suprafaţă S conductoare de aceiaşi formă şi încărcată sub influenţa sarcinilor interioare constitue *principiul echivalenţei* în electrostatică.

22. **Lucrul câmpului electric.** Intr'un spaţiu în care există un câmp electric produs de surse (de natură coulombiană), lucrul câmpului electric între două puncte a şi b ale spaţiului este:

$$L = \int_a^b \overline{E}\cdot d\overline{l} = \int_a^b E\cdot dl\cos(E\cdot dl) = V_a - V_b = V_{ab}.$$

Lucrul câmpului depinde numai de potenţialele punctelor extreme; el este egal cu tensiunea V_{ab} indiferent de drumul parcurs. In consecinţă, pentru un parcurs închis $L = 0$.

23. **Lucrul mecanic al deplasării unei sarcini pozitive** Q între două puncte a şi b este:

$$W = \int_a^b \overline{F}\cdot d\overline{l} = \int_a^b Q\cdot\overline{E}\cdot d\overline{l} = Q(V_a - V_b) = QV_{ab}.$$

Acest lucru mecanic este egal cu produsul sarcinii Q prin tensiunea V_{ab}, indiferent de drumul parcurs.

24. **Condensatori electrici.** Doi conductori separaţi printr'un dielectric formează un condensator. Atunci când cei doi conductori sunt conectaţi la cele două borne ale unei surse de f.e.m. E, unul din ei se încarcă cu cantitatea de electricitate $+Q$; pe celălalt conductor apare o sarcină negativă şi egală cu $-Q$. O cantitate de electricitate Q a curs prin firele de legătură dintre conductori şi sursă şi din cauza principiului continuităţii trebue să se admită că aceeaşi cantitate de electricitate s'a deplasat prin dielectric, între conductori, în timpul încărcării.

Se constată că pentru doi conductori daţi, Q este totdeauna proporţional cu tensiunea dintre cei doi conductori:

$$Q = CU,$$

în care factorul de proporţionalitate C se numeşte *capacitatea* condensatorului format de cei doi conductori. Atunci când U se măsoară în volţi şi Q în coulombi, C rezultă în farazi. Capacitatea C este o mărime fizică.

Când tensiunea aplicată U este variabilă, iar C constant, ecuaţia precedentă se scrie:

$$i_d = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt},$$

în care i_d se numeşte curentul de deplasare. Şi această ecuaţie poate fi considerată ca o ecuaţie de definire a capacităţii.

Elastanţă. Aceeaşi proprietate $Q = CU$ poate fi scrisă şi sub forma:

$$U = SQ,$$

în care $S = 1/C$ se numeşte elastanţa condensatorului.

25. Calculul capacităţii pentru diverse tipuri de condensatori

α) *Condensatorul plan.* Pentru un condensator format din două plăci conductoare plane şi paralele situate la distanţa e, mică în comparaţie cu dimensiunile plăcilor de suprafaţă S, capacitatea sa proprie este:

— în regim clasic: $C = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{S}{e}$;

— în regim raţionalizat: $C = \varepsilon' \frac{S}{e}$.

Dacă se exprimă S în m² şi e în m (adică dacă se lucrează în sistemul practic), atunci se obţine:

$$C = 8{,}84\ \varepsilon_r \frac{S}{e} 10^{-6}\ \mu F;$$

iar dacă S este în cm² şi e în cm:

$$C = 8{,}84\ \varepsilon_r \frac{S}{e} 10^{-8}\ \mu F,$$

sau:

$$C = 0{,}079\ \varepsilon_r \frac{S}{e}\ \text{unit. CGS e.s. (sau stat farazi).}$$

Formulele de mai sus sunt valabile atât în regim clasic cât şi în regim raţionalizat. ε_r este constanta dielectrică relativă a mediului omogen dintre electrozii condensatorului.

β) *Condensatorul sferic,* format din două sfere concentrice de raze R_1 şi R_2 este:

— în CGS e.s. $C = \varepsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ stat F;

— în sistem practic $C = \frac{\varepsilon_r}{9 \cdot 10^9} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ F.

În prima formulă R_1 şi R_2 sunt exprimaţi în cm, iar în a doua în m.

γ) *Capacitatea unei sfere izolate* este:

În regim clasic $C = \varepsilon R$ şi în regim raţionalizat $C = 4\pi\varepsilon' R$.

δ) *Capacitatea unui condensator cilindric concentric.* Dacă D este diametrul interior al cilindrului exterior, iar d diametrul exterior al cilindrului interior, atunci

$$C = \frac{\varepsilon_r}{18 \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)} \frac{\mu F}{km}.$$

ε) *Capacitatea dintre doi conductori cilindrici paraleli* este:

$$C = \frac{\varepsilon_r}{36 \cdot \ln\left(\frac{d}{2r} + \sqrt{\frac{d^2}{4r^2} - 1}\right)} \frac{\mu F}{km},$$

în care r este raza conductorilor, iar d distanţa dintre axele lor.

În cazul particular când $r \ll d$:

$$C = \frac{\varepsilon_r}{36 \ln \frac{d}{r}} \frac{\mu F}{km}.$$

ζ) *Capacitatea unui conductor cilindric faţă de un plan paralel,* practic infinit este:

$$C = \frac{\varepsilon_r}{18 \ln \frac{2h}{r}} \frac{\mu F}{km};$$

în care r este raza conductorului, iar h distanţa dela el la plan.

Formula presupune $r \ll h$.

η) *Capacitatea pe fază (de serviciu) a unei linii trifazate,* echilibrată şi suficient de depărtată de pământ, astfel încât influenţa acestuia să fie neglijabilă, este:

$$C = \frac{\varepsilon_r}{18 \ln \frac{d}{r}} \frac{\mu F}{km};$$

d şi r au aceleaşi semnificaţii ca la (ε), şi în aceeaşi ipoteză $r \ll d$.

θ) *Capacitatea pe fază a unui cablu trifazat,* simetric, cu manta exterioară pusă la pământ, este:

$$C = \frac{\varepsilon_r}{9 \ln \left[\frac{3\rho^2}{r^2} \times \frac{(R^2 - \rho^2)^3}{R^6 - \rho^6}\right]} \frac{\mu F}{km},$$

în care r este raza conductorilor,

R — raza interioară a mantalei exterioare, iar

ρ — distanţa dintre centrul fiecărui conductor şi centrul cablului.

Observaţie de ordin general. Constanta dielectrică ε_r se referă la mediul dielectric, care intervine în valoarea capacităţii respective. In vid $\varepsilon_r = 1$; în aer constanta dielectrică este cu suficientă aproximaţie, tot $\varepsilon_r = 1$.

In ceeace priveşte operaţia raţionalizării, este de observat că ea nu modifică valoarea capacităţii, care se poate calcula la fel de bine şi cu formula clasică, şi cu cea raţionalizată, obţinându-se acelaşi rezultat numeric. Aceasta deoarece nici unitatea de capacitate, nici cea de lungime nu se modifică prin raţionalizare.

Este de observat de asemenea că toate formulele dela punctul 25 au fost scrise în ipoteza că dielectricul dintre plăcile condensatorului este omogen şi umple întreg spaţiul dintre armături.

Dacă acest dielectric nu este omogen, sau nu umple întreg spaţiul, atunci când se calculează capacitatea condensatorului respectiv trebue să se procedeze ca şi cum condensatorul real ar fi format din mai mulţi condensatori având toţi dielectricul omogen şi umplând fiecare întreg spaţiul respectiv. Aceşti condensatori trebue grupaţi convenabil pentru a echivala condensatorul cu dielectricul neomogen.

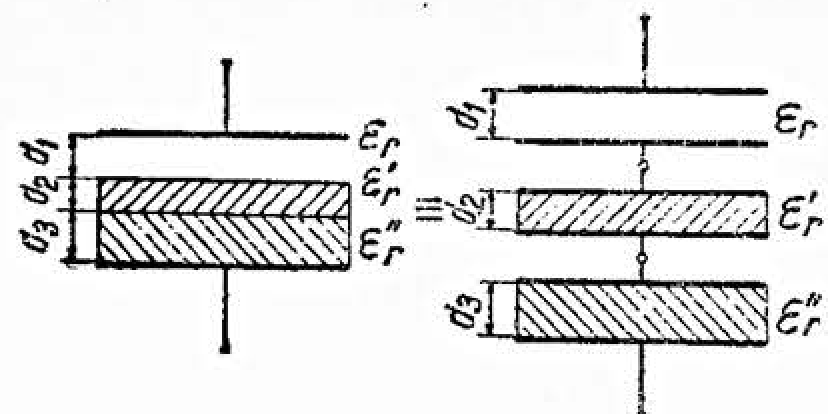


Fig. 11. Schema echivalentă a unui condensator cu dielectric neomogen.

Astfel de exemplu în fig. 11 se arată un condensator plan la care dielectricul nu este omogen şi se arată şi schema lui echivalentă formată numai din condensatori cu dielectrici omogeni.

Expresiile capacităţilor C dela aliniatele δ, ε, ξ, η şi θ reprezintă capacităţi specifice, adică capacităţi pe unitatea de lungime. Valorile de lungimi care intră în expresia fiecăreia din aceste capacităţi pot fi scrise în orice unităţi de lungime, cu condiţia de a se adopta aceiaşi unitate de lungime pentru fiecare expresie în parte.

E x e m p l u n u m e r i c d e c a l c u l a l u n e i c a p a c i t ă ţ i. 1. Fie un condensator plan cu hârtie, la care $A = 10\ \text{m}^2$, $\varepsilon_r = 4$, $d = 0{,}1\ \text{mm} = 10^{-4}\ \text{m}$. Aplicând formula dela punctul α, se obţine:

$$C = \frac{8{,}84 \cdot 10 \cdot 4}{10^{-4}} 10^{-6} = 3{,}536 \mu\text{F}.$$

2. Pentru a verifica dacă în adevăr operaţia raţionalizării nu modifică cu nimic valoarea capacităţilor, se va considera capacitatea unei sfere izolate, de rază R.

In sistemul CGS clasic (neraţionalizat) capacitatea este:

$$C = \varepsilon R = \varepsilon_r \varepsilon_0 R.$$

In sistemul CGS raţionalizat $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4\pi}$, deci capacitatea este

$$C = 4\pi\varepsilon' R = 4\pi \frac{\varepsilon}{4\pi} R = \varepsilon R = \varepsilon_r \varepsilon_0 R,$$

egală cu cea din sistemul neraţionalizat: raţionalizarea nu modifică valoarea capacităţilor.

26. Montarea condensatorilor în serie şi în paralel. Când condensatorii sunt montaţi în paralel, capacitatea echivalentă a sistemului este egală cu suma capacităţilor componente:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \quad \text{sau} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \ldots;$$

atunci când condensatorii sunt montaţi în serie, capacitatea echivalentă este dată de formula:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \quad \text{sau} \quad S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$$

27. Dielectricii. Dielectricii sunt acele materiale care sub acţiunea unei f.e.m. continue nu permit trecerea prin ei a unui curent electric de conducţie continuă. Un astfel de corp permite numai trecerea unui scurt curent având caracterul de curent de deplasare, care are rolul de a încărca electrostatic condensatorul (v. mai sus punctul 24) în care este situat dielectricul. Această deplasare de electricitate produce o tensiune egală şi opusă f.e.m. aplicate şi astfel trecerea curentului încetează. Impărţirea corpurilor în conductori şi dielectrici sau izolanţi nu este o împărţire absolut riguroasă, dar este utilă scopurilor practice. O substanţă poate să nu permită trecerea unui curent puternic atunci când tensiunea aplicată este destul de mică, dar acelaşi corp permite trecerea unui anumit curent dacă tensiunea este mare. Deasemenea unele materiale, care nu conduc la temperatura obişnuită, devin bune conducătoare atunci când sunt încălzite.

Totuşi, se poate menţine noţiunea de dielectric perfect şi în cazul dielectricilor din practică — dielectrici care permit trecerea unui curent de intensitate mică — considerând condensatorul care are între plăci un dielectric imperfect, ca fiind format dintr'un condensator cu dielectric perfect, şuntat de o rezistenţă de valoare mare. Pentru cele care interesează acum, se poate admite că se lucrează numai cu dielectrici perfecţi.

28. Polarizarea dielectricilor. Atât la punctul 24 cât şi la punctul 27 s'a descris fenomenul tranzitoriu, care se produce atunci când se pune un condesator sub tensiune. Interpretarea acestui fenomen de încărcare a condensatorului se explică cu ajutorul electronilor, care sunt particule indivizibile de electricitate negativă.

Precum se ştie, atomii sunt constituiţi dintr'un număr de electroni periferici şi un nucleu central încărcat pozitiv. Un atom în stare naturală este neutru din punct de vedere electric, sarcina negativă a electronilor fiind egală şi de semn contrar cu sarcina pozitivă din nucleu. Un corp este încărcat negativ atunci când în el se găsesc mai mulţi electroni periferici decât este necesar pentru a neutraliza sarcinile pozitive ale nucleului. Invers, un corp este încărcat pozitiv atunci când în el se găsesc mai puţini electroni periferici decât este necesar pentru a neutraliza sarcinile pozitive. Corpurile conducătoare, chiar atunci când sunt în stare neutră, au două feluri de electroni: unii care sunt legaţi de atomi, iar alţii care circulă liberi prin conductor fiind animaţi de o mişcare neregulată. Atunci când se aplică o f.e.m. unui conductor, electronii liberi sunt toţi atraşi de polul pozitiv al f.e.m. provocând astfel o deplasare de electricitate, deci un curent electric.

In cazul condensatorilor, lucrurile se petrec astfel: punând pila în legătură cu plăcile condensatorului, electronii din conductor se deplasează înspre polul pozitiv al pilei şi fug de polul negativ al pilei. Armătura condensatorului legată la polul pozitiv va avea deci electroni în deficit, iar placa dinspre polul negativ, în exces: plăcile vor apărea încărcate electric. Aceste sarcini de pe plăci vor supune unor forţe coulombiene sarcinile electrice din atomii dielectricului dintre plăcile condensatorului. In dielectric sarcinile electrice sunt toate legate de atomi, astfel încât nu se vor putea deplasa până la sarcinile de pe armături şi se vor deplasa numai puţin, cu un caracter elastic, în jurul poziţiei lor de echilibru. Astfel, fiecare atom care la început era neutru din punct de vedere electric, va apărea polarizat, prezentându-se ca un dipol având sarcina pozitivă înspre armătura negativă şi invers. In momentul în care forţele interatomice (forţele coulombiene dintre polii atomului, formaţi sub acţiunea câmpului exterior) sunt egale cu forţele electrice exterioare, mişcarea sarcinilor din dielectric încetează.

Starea dielectricului sub acţiunea câmpului, se numeşte *polarizare dielectrică*.

Starea electrică a dielectricilor s'a descris până acum prin vectorul $\overline{D}$, astfel după cum câmpul în vid este descris prin $\overline{E}$. Uneori este însă convenabil să se înlocuiască $\overline{D}$ printr'un vector numit polarizaţie electrică definit prin:

$$\text{clasic } \overline{P} = \frac{1}{4\pi}\overline{D} - \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\overline{E}; \quad \text{raţionalizat } \overline{P} = \overline{D}' - \varepsilon'_0 \overline{E}.$$

Acest vector este asociat materiei şi se anulează în vid. Introducând acest vector în ecuaţiile câmpului se obţine:

$$\text{clasic div } \overline{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}(\rho - \text{div } \overline{P}); \quad \text{raţionalizat div } \overline{E} = \frac{1}{\varepsilon'_0}(\rho - \text{div } \overline{P}).$$

Vectorii polarizaţie sunt proporţionali şi paraleli cu câmpurile E sub forma:

$$\text{clasic } \overline{P} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi}\overline{E}; \quad \text{raţionalizat } \overline{P} = \varepsilon'_0(\varepsilon_r - 1)\overline{E}.$$

Constantele de proporţionalitate dintre $\overline{P}$ şi $\varepsilon_0 \overline{E}$ au căpătat numele de susceptibilitate electrică având valorile:

$$\text{clasic } \chi = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi}; \quad \text{raţionalizat } \chi = \varepsilon_r - 1.$$

Susceptibilităţile astfel definite sunt mărimi fără dimensiuni, a căror valoare este independentă de sistemul de unităţi utilizat, polarizaţia $\overline{P}$ având aceleaşi dimensiuni ca şi câmpul $\overline{D}$.

In medii anizotrope susceptibilitatea este reprezentată prin un tensor.

Experimental s'a constatat că susceptibilitatea este totdeauna pozitivă. In gaze este foarte mică (în aer este 0,000 6), dar în lichide şi solide atinge valori mari (apa are $\chi_e = 80$). în regim raţionalizat. Gazele ionizate fac excepţie, ele putând prezenta o susceptibilitate negativă.

29. Refracţia liniilor de forţă electrice. Din formula (18.2) rezultă că fluxul vectorului $\overline{D}$ este conservativ în orice punct al spaţiului în care nu sunt sarcini electrice. Această proprietate se menţine şi în punctele de separaţie a două medii dielectrice diferite, ceeace dă:

$$D_{n1} - D_{n2} = 0, \qquad \varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = 0, \tag{29.1}$$

în care ε_1 şi ε_2 sunt constantele dielectrice ale celor două medii, iar E_{n1} şi E_{n2} sunt componentele normale ale câmpului electric pe suprafaţa de separaţie dintre cele două medii. Deoarece $\overline{E}$ provine dintr'un potenţial scalar V, $\overline{E} = -\text{grad } V$, rezultă că:

$$\nabla \times \nabla V = \text{rot grad } V = 0 \;\therefore\; \text{rot } \overline{E} = 0, \; \nabla \times \overline{E} = 0,$$

de unde rezultă că, spre deosebire de $\overline{D}$, componentele tangenţiale ale lui $\overline{E}$ sunt egale în cele două medii:

$$E_{t1} = E_{t2}. \tag{29.2}$$

Comparând între ele ecuaţiile (29.1) şi (29.2), rezultă că la trecerea dintr'un mediu de o anumită constantă dielectrică într'altul de altă constantă dielectrică, câmpul electric suferă o refracţie. Dacă se notează cu α_1 unghiul format de câmpul $\overline{E}$ şi normala la suprafaţa de separaţie în mediul unu şi cu α_2 unghiul dintre câmpul electric în mediul doi şi normala la suprafaţă, din formulele (29.1) şi (29.2) rezultă:

$$\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

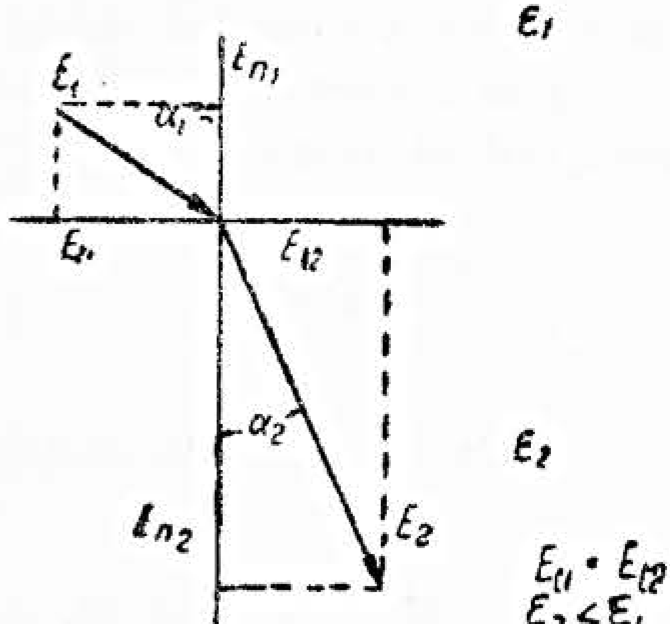


Fig. 12. Refracţia liniilor de forţă electrice.

30. Proprietăţile dielectricilor

α) *Constanta dielectrică* a unui dielectric a fost caracterizată la Capitolul « *Mărimi şi Unităţi* ».

β) *Constanta dielectrică relativă*, sau capacitatea specifică sau permitivitatea relativă este acea proprietate a unui dielectric care determină valoarea energiei electrostatice înmagazinată în unitatea de volum pentru un câmp electric egal cu unitatea. Ea este un număr şi deobicei se exprimă în raport cu constanta dielectrică a vidului, care se ia egală cu unitatea. Pentru scopuri practice, constanta dielectrică a aerului, la presiunea şi la temperatura standard, poate fi luată ca standard de referinţă în locul vidului.

Energia înmagazinată (v. « *Electroenergetica* ») de un condensator este:

$$W = \frac{1}{2} CE^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 E^2,$$

în care ε_r este constanta dielectrică relativă şi

C_0 — capacitatea în vid a condensatorului.

γ) *Rigiditatea dielectrică* a unui material izolant este tensiunea electrică maximă pe unitatea de grosime a materialului pe care poate să o suporte acel material fiind plasat într'un câmp uniform, înainte de a fi străpuns electric. Rigiditatea dielectrică se măsoară în kilovolţi pe centimetru. Această mărime este deci de dimensiunea unui câmp dielectric.

Pentru un material dat, rigiditatea sa dielectrică se determină conform normelor.

δ) *Constanta dielectrică a diferitelor materiale.* In tabela 1 se dau constantele dielectrice relative pentru câteva materiale. Constanta dielectrică relativă a unui material variază cu puritatea sau compoziţia materialului, cu temperatura, cu frecvenţa de lucru, etc.

Tabela 1. Constantele dielectrice relative ale câtorva materiale

Materialul	ε_r	Materialul	ε_r	Materialul	ε_r
Alcool	16−31	Hârtie..........	2,0−2,6	Parafină	2,1− 2,5
Apă	81	Lemn	2,5−7,7	Sticlă	5,4− 9,9
Bachelită	4,5−5,5	Mică	2,5−6,6	Titanaţi	83 − 700
Ebonită	2,8	Porţelan	5,7−6,8	Ulei	2,2− 4,7

ε) *Absorbţia dielectrică* este proprietatea unui dielectric imperfect care face ca atunci când acel dielectric este plasat într'un câmp electric, el să acumuleze electricitate. Atunci când se plasează un astfel de dielectric într'un câmp electric, se constată existenţa unui curent care îl încarcă; intensitatea acestui curent scade cu timpul, până ajunge la o valoare constantă. Invers, atunci când se descarcă un condensator care are un dielectric imperfect, se constată curgerea mai mult timp a curentului de descărcare, cu intensităţi din ce în ce mai mici, până ce dielectricul se descarcă complect. Curentul care se observă în aceste cazuri este diferit de curentul de încărcare sau de descărcare al condensatorului pe care l'ar avea un dielectric perfect.

γ) *Curentul* care trece printr'un dielectric (corect: prin oricare suprafaţă a unui dielectric isotrop) situat într'un câmp electric variabil în timp are mai multe componente şi anume: (1) curentul de deplasare, (2) curentul de absorbţie, (3) curentul de conducţie. Inafara curentului de deplasare, toate celelalte feluri de curent introduc pierderi de energie în dielectric, adică fac ca energia care se poate extrage dintr'un condensator să fie mai mică decât energia introdusă.

η) *Pierderile în dielectric* se măsoară prin cantitatea de energie electrică care se transformă în căldură în unitatea de timp, în dielectricul respectiv. Principalele cauze de pierderi sunt curentul de absorbţie şi curentul de conducţie, ultimul fiind cel mai important la dielectricii obişnuiţi.

Amândouă felurile de curenţi sunt mult influenţate de temperatura şi umiditatea mediului ambiant. Măsura ambelor efecte combinate se face deobicei în curent alternativ astfel după cum se arată la punctul următor.

θ) *Unghiul de pierderi la dielectrici.* După cum se arată la capitolul asupra curenţilor alternativi, tensiunile şi curenţii alternativi sinusoidali pot fi reprezen-

taţi prin vectori în plan, care fac între ei un unghi φ, numit *unghi de defazaj*. Acesta este unghiul care intră în expresiile:

$$u = \sqrt{2}\ U \sin(\omega t - \alpha) \text{ şi } i = \sqrt{2}\ I \sin(\omega t - \alpha + \varphi),$$

în care u şi i sunt valorile instantanee, iar U şi I valorile zise eficace de tensiune şi curent.

In cazul unui condensator, având un dielectric ideal şi deci lipsit de orice pierderi, curentul care se stabileşte este format numai dintr'un *curent de deplasare*, care este reprezentat printr'un vector I, defazat cu un unghi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ înaintea vectorului tensiunii U (fig. 13).

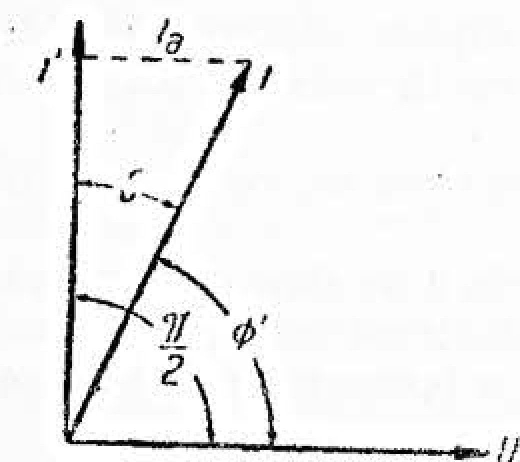


Fig. 13. Diagrama unghiului de pierderi în dielectric.

Dacă însă dielectricul are pierderi, curentul absorbit de condensator este reprezentat printr'un vector I făcând un unghi $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \delta$, faţă de tensiunea U.

Acest unghi δ caracterizează pierderile în dielectric; el se numeşte *unghi de pierdere* al dielectricului.

Totul se petrece, ca şi cum condensatorul C ar fi constituit dintr'un dielectric ideal, montat în paralel cu o rezistenţă R care absoarbe deci numai un curent de conducţiune I_a şi care ar reprezenta o pierdere de putere RI_a^2, astfel încât curentul total I să fie suma vectorială

$$\overline{I} = \overline{I'} + \overline{I_a}.$$

Unghiul de pierdere δ se determină din expresia:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{2\pi f RC} = \frac{P}{Q},$$

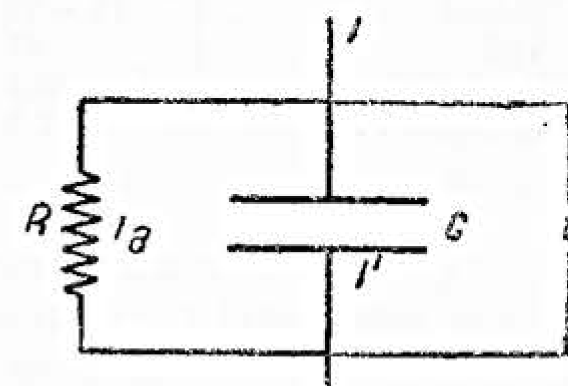


Fig. 14. Schema echivalentă a unui condensator cu dielectric având pierderi.

în care C este valoarea capacităţii în farazi;
R — rezistenţa echivalentă corespunzătoare pierderilor, presupusă montată în paralel şi exprimată în Ω;
f — frecvenţa tensiunii aplicate condensatorului (în Hertzi);
P — puterea reală pierdută în condensator (respectiv în rezistenţa echivalentă R) exprimată în W;
Q — puterea reactivă în condensator exprimată în Var.

Din expresia de mai sus rezultă valoarea totală, exprimată în W, a pierderilor dintr'un condensator

$$P = Q \operatorname{tg} \delta = C\omega U^2 \operatorname{tg} \delta = 2\pi f C U^2 \operatorname{tg} \delta,$$

în care C şi f au aceeaşi semnificaţie ca mai sus, iar U este valoarea eficace a tensiunii aplicate, exprimată în V.

Pierderea specifică de putere în dielectric exprimată în W pe cm³ este dată de:

$$p = 10^{-6} \frac{\varepsilon_r}{1,8} f E^2 \operatorname{tg} \delta,$$

în care f are aceeaşi semnificaţie ca mai sus, ε_r este constanta dielectrică relativă a dielectricului, iar $\overline{E}$ este câmpul electric (sau gradientul tensiunii) exprimat în kV pe cm.

Se dau în tabela 2 valorile unghiului de pierderi pentru câteva materiale dielectrice.

Tabela 2. Tabela unghiurilor de pierderi ale câtorva materiale

Dielectric	10^4 tg δ	Dielectric	10^4 tg δ
Sticlă	30 ~ 180	Hârtie.............	30 ~ 150
Mică	~ 3	Parafină	0,8
Mătase	400	Ulei de parafină	3
Gutapercă	250		

C. Magnetismul *)

31. Fenomenele generale magnetice. Inafara fenomenelor electrice, în care corpuri uşoare sunt atrase de corpuri electrizate, se mai cunosc cazuri în care corpuri grele, feroase, sunt atrase de alte corpuri feroase care au anumite proprietăţi aşa numite *magnetice*. Proprietăţile magnetice se recunosc în primul rând prin atracţia corpurilor de fier, iar corpurile care au aceste proprietăţi se numesc *magneţi*. Se constată experimental, că un magnet are două puncte care exercită în special aceste proprietăţi magnetice, puncte numite *poli*. Aceşti poli situaţi la vârfurile extreme ale magneţilor au proprietăţi contrarii în anumite privinţe. Astfel, un magnet care se poate mişca liber se orientează totdeauna cu un anumit pol înspre nordul geografic, iar cu celălalt pol în spre sudul geografic. Polul care se orientează spre nord se numeşte pol nord, iar cel care se orientează spre sud, pol sud. Deasemenea se constată experimental că polii de acelaşi nume se resping, iar polii de nume contrarii se atrag. Pentru forţa de interacţiune dintre polii magnetici subzistă o lege identică matematic cu legea lui Coulomb din electrostatică, ca şi cum aceste forţe ar fi datorite unor centre newtoniene ipotetice, denumite obişnuit *mase magnetice*. Pe când însă sarcinile electrice în electrostatică sunt o realitate fizică, masele magnetice sunt simple mărimi de calcul lipsite de o existenţă fizică:

$$F = \frac{1}{\mu} \frac{mm'}{r^2} \quad \text{(clasic)} \qquad F = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{mm'}{r^2} \quad \text{(raţionalizat)},$$

unde m, m' sunt masele magnetice ale polilor în interacţiune;
μ — permeabilitatea magnetică a mediului în care are loc interacţiunea. Este o proprietate specifică mediului. (A se vedea Cap. « *Mărimi şi Unităţi* »). In sistemul electromagnetic CGS, pentru vid şi aproximativ pentru aer, $\mu = 1$.

Teoria magnetismului se integrează în teoria electromagnetismului tratându-se astfel fără a se face apel la masa magnetică.

Totuşi întrucât uneori se mai obişnueşte a se pleca dela masa magnetică (a se vedea de exemplu STAS 862-49) subcapitolul de faţă a fost desvoltat şi pe această bază.

32. Câmpul magnetic. Din cauza identităţii matematice dintre legile lui Coulomb în electrostatică şi în magnetism, se poate considera un câmp magnetic

*) In domeniul magnetismului este de notat contribuţia ştiinţifică a profesorului D. Hurmuzescu, care s'a ocupat de « *Efectele magnetice asupra modificărilor mecanice, fizice şi chimice ale unor corpuri* » (1898), de magnetostricţiune (1913) şi de magneţi permanenţi (1916).

Dealtfel, D. Hurmuzescu are studii şi în alte domenii ale electricităţii şi anume asupra transformării razelor X (1899), precum şi o nouă determinare a raportului dintre unităţile electrostatice şi electromagnetice (1896), chestiune care era pe atunci la ordinea zilei, datorită teoriilor maxwelliene.

în aer H, prin intermediul căruia se produce interacţiunea între polii corpurilor magnetice:

$$H = \frac{1}{\mu}\frac{m}{r^2} \quad \text{(clasic)} \quad H = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{m}{r^2} \quad \text{(raţionalizat).}$$

Se poate admite că H derivă dintr'un potenţial, ca oricare câmp newtonian. Deoarece însă magneţii sunt totdeauna bipolari, ca şi cum polii ar avea două mase magnetice egale şi contrarii, — constituind ceeace se numeşte un dipol — are sens să se vorbească numai de potenţialul unui dipol magnetic (fig. 15).

Potenţialul magnetic produs de un dipol magnetic, într'un punct exterior, la o distanţă r de dipol, având o valoare mare faţă de lungimea l între cei doi poli, ($r \gg l$), este:

$$V = \frac{M_m \cos\Theta}{\mu}\frac{1}{r^2} \text{ (clasic) şi } V' = \frac{M'_m \cos\Theta}{4\pi\mu'}\frac{1}{r^2} \text{ (raţionalizat),}$$

în care M_m este momentul magnetic definit ca fiind produsul dintre masa magnetică a unui pol şi lungimea până la polul opus;
μ — permeabilitatea mediului presupus omogen;
Θ — unghiul dintre raza r şi dreapta ce uneşte cei doi poli.

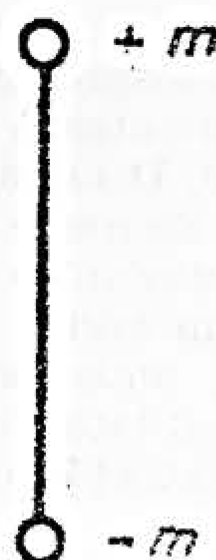


Fig. 15. Dipol magnetic.

In cazul unui magnet având o lungime l între poli, care nu mai este mică faţă de distanţele r_1 şi r_2 dela fiecare pol, până la punctul considerat, potenţialul magnetic în acel punct este:

$$V = \frac{M_m}{l\mu}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \quad \text{(clasic),}$$

$$V' = \frac{M'_m}{4\pi\, l\mu'}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \quad \text{(raţionalizat).}$$

33. **Divizarea magneţilor.** Dacă un magnet în formă de bară se divide în două, se obţin doi magneţi care au polarităţile ca în fig. 16.

Dacă se repetă operaţia, se obţin din nou magneţi bipolari şi aşa mai departe ori de câte ori s'a repetat operaţia. Acest fapt experimental arată că în natură nu există poli magnetici liberi. Deci nu se va putea obţine un curent magnetic provenit din mişcarea sarcinilor magnetice de un singur fel, astfel cum se obţine un curent electric datorit mişcării electronilor.

34. **Inducţia magnetică.** Dacă acţiunea magnetică nu se exercită în vid ci într'un mediu cu o permeabilitate μ, atunci se poate considera că substanţa mediului respectiv a devenit magnetică sub acţiunea câmpului H produs de magnet, adică s'a produs o inducţie magnetică similară inducţiei electrostatice.

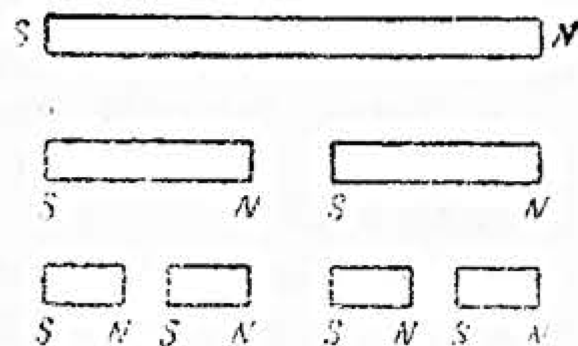


Fig. 16. Divizarea magneţilor.

Exceptând corpurile feromagnetice (v. mai jos), relaţia dintre B şi H este liniară:

$$\overline{B} = \mu\overline{H}.$$

Teorema lui Gauss pentru magnetism, ţinând seama de faptul că nu există poli liberi, devine:

$$\nabla\cdot\overline{B} = \operatorname{div}\overline{B} = 0.$$

35. **Polarizarea magnetică.** Pentru a descrie starea magnetică a materiei, înafară de vectorul $\overline{B}$, se poate folosi vectorul $\overline{J}$ denumit *intensitate de magnetizare* (sau polarizaţie magnetică) şi definit prin:

$$\text{clasic } 4\pi\,\overline{J} = \frac{1}{\mu_0}\overline{B} - \overline{H}; \quad \text{raţionalizat } \overline{J} = \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{H}'.$$

Acest vector, ca şi analogul său electric, se anulează în vid. In mediile izotrope, vectorii polarizaţie sunt paraleli cu câmpurile corespunzătoare şi experimental s'a constatat că au intensităţi proporţionale cu aceste câmpuri (ultima proprietate nu este valabilă în corpurile feromagnetice).

Factorul de proporţionalitate între $\overline{J}$ şi $\overline{H}$ reiese din ecuaţiile de mai sus sub forma:

$$\text{clasic } \overline{J} = \frac{\mu_r - 1}{4\pi}\overline{H}; \quad \text{raţionalizat } \overline{J}' = (\mu_r - 1)\overline{H}.$$

Polarizaţia magnetică astfel definită este disimetrică faţă de aceea electrică, fiind de dimensiunea lui $\overline{H}$ şi nu a lui $\overline{B}$, pe câtă vreme $\overline{P}$ este de dimensiunea lui $\overline{D}$ şi nu a lui $\overline{E}$.

Constantele de proporţionalitate au căpătat numele de susceptibilitate magnetică, având valorile:

$$\text{clasic } \chi_m = \frac{\mu_r - 1}{4\pi} \quad ; \quad \text{raţionalizat } \chi_m = \mu_r - 1.$$

36. **Paramagnetism.** Corpurile la care susceptibilitatea magnetică este pozitivă, adică $\overline{H}$ şi $\overline{J}$ au acelaşi sens, se numesc corpuri *paramagnetice.* In această categorie intră oxigenul [$\chi_m = 0{,}16.10^{-5}$ la 0°C şi 760 torr (mm Hg)], aerul şi majoritatea sărurilor de fier (cristalele de clorură ferică au $\chi_m = 2{,}6.10^{-4}$).

37. **Diamagnetism.** Corpurile la care susceptibilitatea magnetică este negativă, adică la care $\overline{H}$ şi $\overline{J}$ sunt de semne contrarii, se numesc corpuri *diamagnetice.* In general susceptibilităţile negative au valori absolute foarte mici: pentru bismut

$$\chi_m = -14.10^{-6}, \text{ pentru alcool } \chi_m = -0{,}6.10^{-6}.$$

38. **Feromagnetism.** Unele corpuri, cum ar fi fierul, nichelul, cobaltul şi aliajele lor, au susceptibilităţi pozitive foarte mari, de ordinul zecilor şi sutelor de mii. La aceste corpuri însă, relaţia dintre $\overline{J}$ şi $\overline{H}$ este complect neliniară, astfel încât noţiunea de susceptibilitate are aci alt înţeles şi anume trebue interpretată ca panta tangentei la curba $J - H$, într'un punct corespunzând unui H anumit.

39. **Magnetizare permanentă.** In anumite împrejurări însă se poate asocia un câmp magnetic unor corpuri feromagnetice, chiar în absenţa unui câmp extern. Se spune atunci că acel corp prezintă o *magnetizare permanentă.* Se poate include şi acest caz în schema dela început, introducând în acest caz un al treilea vector, anume magnetizarea fixă J_0, care nu se găseşte în nicio relaţie funcţională cu $\overline{J}$. Dimpotrivă, $\overline{J}_0$ se interpretează ca o sursă de câmp magnetic. Dacă acest corp este supus acţiunii unui câmp exterior, intensitatea magnetizării sale sporeşte prin magnetizarea indusă $\overline{J}$. In interiorul acestui corp va rezulta deci:

$$\text{clasic } \overline{B} = \mu_0\left(\overline{H} + 4\pi\,\overline{J} + 4\pi\,\overline{J}_0\right); \quad \text{raţionalizat } \overline{B} = \mu_0'\left(\overline{H}' + \overline{J} + \overline{J}_0\right).$$

40. Observaţie asupra realităţii fizice a unor mărimi magnetice. Deoarece în natură nu există poli magnetici izolaţi *) legea lui Coulomb în magnetism, scrisă ca la punctul 31, apare cu totul convenţională. Ea dă valoarea câmpului magnetic *ca şi cum* ar fi datorit unor mase magnetice ipotetice.

Pentru a găsi adevărata lege care în magnetism este echivalentă cu legea lui Coulomb din electrostatică, trebue să se pornească dela mărimea de moment magnetic.

O bară magnetică situată normal pe un câmp de inducţie B uniform, în un mediu magnetic omogen, fiind supusă la un cuplu mecanic M, are un moment magnetic M_m' definit prin:

$$M = M_m' B. \tag{40.1}$$

Dacă prin moment magnetic se înţelege produsul dintre masa magnetică ipotetică a unui pol al barei şi lungimea barei, atunci momentul magnetic are o altă expresie $M_m = \mu M_m'$, în care μ este permeabilitatea uniformă a mediului.

In acest caz, relaţia (40.1) devine:

$$M = M_m H.$$

D. Electromagnetismul

41. Experienţa lui Oersted a pus în evidenţă interacţiunea dintre curenţii electrici şi magneţi, creând astfel electromagnetismul. Această experienţă a arătat că magneţii din apropierea conductorilor parcurşi de curenţi continui sunt supuşi unei forţe mecanice care îi fac să devieze dela poziţia lor normală nord — sud. Această deviere se face conform regulii lui Ampère: dacă ne considerăm în conductor, înotând în sensul curentului electric şi privind magnetul, atunci vedem polul nord deviind la stânga.

42. Legea Biot şi Savart. Pe cale experimentală, Biot şi Savart au stabilit că un curent practic infinit I produce în jurul său un câmp magnetic H, care în un punct situat la distanţa r de axa curentului are valourea $H = K\frac{I}{r}$, în care K este o constantă de proporţionalitate.

Expresia legii Biot-Savart dă prezentarea cantitativă a experienţei Oersted.

43. Expresia generală a câmpului magnetic produs de curenţi. Câmpul de inducţie produs de un curent infinit de mic, pentru mediile omogene, este dat de formula lui Laplace:

$$\text{clasic } dB = \mu\frac{i\sin\theta}{r^2}\,dl; \quad \text{raţionalizat } dB = \frac{\mu'}{4\pi}\,\frac{i\sin\theta}{r^2}\,dl,$$

în care dB este câmpul de inducţie magnetică produs de un curent de valoarea i, de lungimea dl, într'un punct situat la distanţa r de dl; $d\overline{B}$ este normal pe planul rdl, iar sensul lui se determină după regula burghiului.

θ — unghiul dintre r şi dl;

μ — permeabilitatea presupusă omogenă a mediului.

*) Este de menţionat că inginerul profesor. N. Vasilescu-Karpen a expus fenomenele electromagnetice considerând masa magnetică ca o ficţiune care nu este necesar să intervină în demonstraţii. Toate fenomenele electromagnetice sunt tratate ca o urmare a legii experimentale a inducţiei. Efectele mecanice dintre polii solenoizilor au fost deduse din acţiunea dintre circuitele electrice.

Intre studiile cercetătorilor români asupra magnetismului sunt de notat şi lucrările profesorului St. Procopiu.

Această lege poate fi scrisă în cazul curentului unui circuit şi sub forma:

$$B_a = \mu i\frac{d\Omega}{da},$$

în care B_a este componenta lui B în punctul M, în direcţia a;

i — intensitatea curentului care dă naştere câmpului B;

Ω — unghiul solid sub care se vede circuitul curentului din punctul M. Un ghiul Ω este pozitiv, când sensul curentului i în circuit este acela de rotaţie al burghiului, care ar înainta dela i către M.

44. Legea fundamentală a câmpului magnetic. Lucrul câmpului magnetic, pe oricare contur închis C, este proporţional cu suma curenţilor care taie o suprafaţă arbitrară care se sprijină pe C:

$$\text{clasic } \oint \overline{H}\cdot d\overline{l} = \oint H dl\cos\theta = 4\pi\Sigma i; \quad \text{raţionalizat } \oint \overline{H}\cdot d\overline{l} = \Sigma i.$$

Dacă un curent taie de două ori suprafaţa în sensuri contrarii, efectul lui se anulează, intervenind în sumă odată cu + şi odată cu —.

45. Permeabilitatea magnetică este o mărime fizică care caracterizează din punct de vedere magnetic un anumit mediu. Ea poate fi exprimată (v. cap. « *Mărimi şi Unităţi* ») ca raportul dintre inducţia magnetică $\overline{B}$ şi câmpul magnetic $\overline{H}$. In concepţia actuală (sisteme cu 4 unităţi fundamentale), câmpurile $\overline{B}$ şi $\overline{H}$ apar cu semnificaţii şi deci dimensiuni diferite. In acest caz şi permeabilitatea are dimensiuni fizice.

Permeabilitatea magnetică μ într'un punct al unui mediu se poate exprima prin:

$$\mu = \mu_0\cdot\mu_r.$$

în care μ_0 este permeabilitatea vidului;

μ_r — permeabilitatea relativă a mediului, număr fără dimensiuni.

46. Potenţialul magnetic al câmpului H este:

$$V = +i\Omega,$$

în care V este potenţialul magnetic din care derivă câmpul $\overline{H}$ într'un punct M;

i — curentul electric care provoacă pe $\overline{H}$;

Ω — unghiul solid sub care se ede din M circuitul curentului i, cu semnul indicat mai sus (punct. 43).

47. Câmpul magnetic în interiorul unui conductor parcurs de un curent de densitate uniformă în întreaga secţiune. In acest caz se desvoltă un câmp magnetic $\overline{H}$ având liniile de forţă închise, normale pe direcţia curentului şi supunându-se la relaţia:

$$\text{clasic } \nabla\times\overline{H} = \text{rot}\,\overline{H} = 4\pi\overline{J}; \quad \text{raţionalizat } \nabla\times\overline{H'} = \text{rot}\,\overline{H'} = \overline{J}.$$

în care $\overline{H}$ este câmpul magnetic produs în interiorul conductorului;

$\overline{J}$ — densitatea de curent presupusă uniformă în interiorul conductorului.

In interiorul conductorului, câmpul magnetic având un rotor, numai derivă dintr'un potenţial magnetic. Valoarea potenţialului magnetic (punct. 46) este valabilă numai pentru punctele în afară de conductor, unde deci rot $\overline{H} = 0$.

48. Câmpul magnetic al unui curent rectiliniu infinit:

— în exteriorul conductorului, la distanţa r de curent, confom legii lui Biot şi Savart:

$$\text{clasic } H = \frac{2i}{r}\text{ ; raţionalizat } H' = \frac{i}{2\pi r}\text{ ;}$$

— în interiorul conductorului, la distanţa r de axul conductorului:

$$\text{clasic } H = 2\pi Jr\text{; raţionalizat } H' = \frac{1}{2}Jr$$

J fiind densitatea curentului din conductor.

Liniile de câmp ale lui H sunt cercuri cuprinse într'un plan perpendicular pe conductor şi cu centrul în axul conductorului.

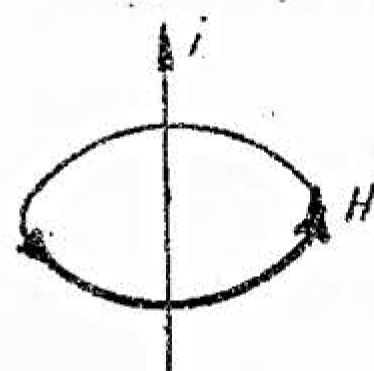


Fig. 17. Relaţia dintre sensurile lui i şi H.

Sensul lui H se determină cu regula burghiului (fig. 17).

49. Câmpul magnetic în centrul unei spire circulare de raza R:

$$\text{clasic } H = \frac{2\pi i}{R}\text{ ; raţionalizat } H' = \frac{i}{2R}.$$

Sensul relativ al lui H şi al lui i rezultă din fig. 18.

50. Câmpul în interiorul unui tor. Dacă secţiunea torului este suficient de mică faţă de lungimea fibrei mediane se poate considera câmpul ca fiind uniform în interiorul acestei suprafeţe şi atunci, dacă se notează cu w numărul de spire bobinate pe tor, cu i curentul care parcurge aceste spire şi cu l lungimea fibrei medii a torului, se poate scrie:

$$\text{clasic } B = \mu\frac{4\pi wi}{l}\text{ ; raţionalizat } B = \mu'\frac{wi}{l}.$$

In exteriorul torului câmpul este nul.

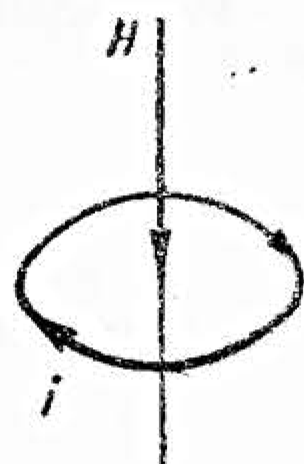


Fig. 18. Câmpul în centrul unei spire circulare.

51. Fluxul magnetic într'un tor de secţiune dreptunghiulară. Cu notaţia din fig. 19

$$\text{clasic } \Phi = 2wib\mu \ln\frac{R_2}{R_1}\text{ ; raţionalizat } \Phi = \mu'\frac{wib}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

52. Câmpul de inducţie şi fluxul într'un solenoid infinit:

— Câmpul de inducţie:

$$\text{clasic } B = 4\pi\mu w_u\, i\text{;}$$
$$\text{raţionalizat } B = \mu' w_u\, i,$$

în care w_u reprezintă numărul de spire pe unitatea de lungime a fibrei mediane.

— Fluxul:

$$\text{clasic } \Phi = 4\pi\mu w_u\, iS\text{;}$$
$$\text{raţionalizat } \Phi = \mu' w_u\, iS,$$

S fiind secţiunea torului.

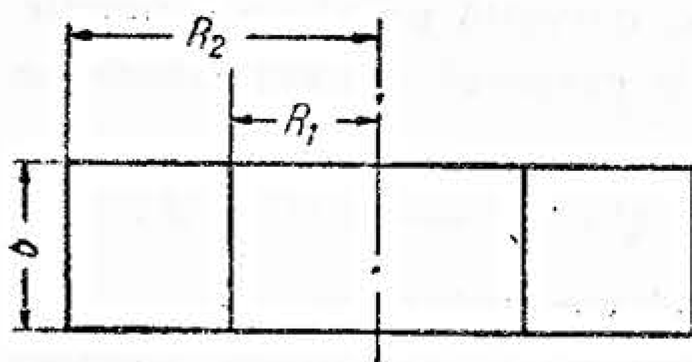


Fig. 19. Tor cu secţiune dreptunghiulară.

Solenoidul infinit, ca şi torul, nu generează câmp magnetic în exterior.

53. Câmpul magnetic produs, de un solenoid finit, într'un punct de pe axa lui. In un punct M de pe axa solenoidului câmpul de inducţie produs este:

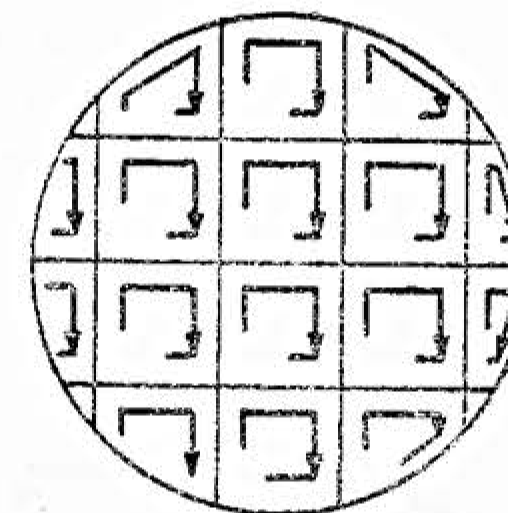
$$\text{clasic: } B = 2\pi w_u\, i\,(\cos\alpha + \cos\beta)\text{;}$$
$$\text{raţionalizat: } B = \frac{w_u i}{2}(\cos\alpha + \cos\beta),$$

în care w_u — numărul de spire pe unitatea de lungime;
i — intensitatea curentului;
α şi β — unghiurile plane sub care din M se vede raza solenoidului pe cele două secţiuni extreme văzute pe feţele interioare.

54. Echivalenţa dintre curenţi şi magneţi. Curenţii electrici au şi ei un moment magnetic, ca şi magneţii. Astfel un curent i, care parcurge o spiră limitând o suprafaţă foarte mică S, poate fi echivalat cu un dipol magnetic, situat în acelaşi loc cu circuitul electric real şi având axa perpendiculară pe planul lui S; momentul dipolului este dat de relaţia:

$$\text{clasic } M = Si\mu\text{; raţionalizat } M' = Si\mu'.$$

In cazul unui circuit finit, se procedează ca în fig. 20, unde această suprafaţă finită se descompune într'un număr mare de suprafeţe elementare; se va admite că fiecare suprafaţă este limitată de un circuit fictiv, parcurs de acelaşi curent i. Cu cât divizarea este făcută mai fin, cu atât se poate aproxima mai bine fiecare circuit cu câte un dipol magnetic, a cărui axă coincide cu normala pozitivă $\bar{n}$ a suprafeţei arbitrare S care se sprijină pe conturul dat. Se poate deci înlocui circuitul dat printr'o distribuţie de dipoli, adică printr'un strat dublu de mase magnetice ipotetice. Evident că densitatea, adică distribuţia superficială echivalentă, este constantă şi egală cu


Fig. 20. Descompunerea unui circuit finit în circuite elementare.

$$\sigma = \pm\frac{i\mu}{a},$$

în care a este distanţa dintre straturi.

55. Dipolul magnetic echivalent al unui solenoid finit de secţiune foarte mică are un moment magnetic:

$$M_m = wis\mu,$$

în care w este numărul total de spire ale solenoidului;
i — curentul care parcurge aceste spire, iar
s — suprafaţa, foarte mică faţă de celelalte dimensiuni ale solenoidului.

Acest pol magnetic face ca solenoidul finit să producă un câmp şi în exterior.

56. Dipolul magnetic echivalent al unui solenoid finit şi de secţiune finită are un moment magnetic care se calculează cu formula:

$$M_m = wi\mu\, S,$$

în care w şi i au aceleaşi semnificaţii ca mai sus, iar S este suprafaţa secţiunii solenoidului. Densitatea superficială ipotetică a sarcinilor magnetice, dispuse pe suprafeţele terminale ale solenoidului şi producând momentul M_m, este:

$$\sigma = \frac{M_m}{V},$$

V fiind volumul solenoidului.

57. Potenţialul vectorial. S'a văzut că totdeauna div $\bar{B} = 0$; aceasta permite să se scrie că $\bar{B}$ este totdeauna rotorul unui alt vector $\bar{A}$:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \text{rot}\,\bar{A}.$$

Acest vector $\bar{A}$ se numeşte *potenţialul vectorial* al lui $\bar{B}$. Dacă se cunoaşte distribuţia de curenţi care produc pe $\bar{B}$, potenţialul vectorial din M se poate calcula cu formulele

$$\text{clasic } \bar{A} = \int_V \mu \frac{\bar{J}\,dv}{r}\,; \qquad \text{raţionalizat } \bar{A} = \frac{1}{4\pi}\int_V \mu' \frac{\bar{J}\,dv}{r},$$

r fiind distanţa dela P la dv.

Pentru un circuit filamentar, la care curentul este constant dealungul conturului, potenţialul devine:

$$\text{clasic } \bar{A} = I \int \frac{\mu\, d\bar{l}}{r}\,; \qquad \text{raţionalizat } \bar{A} = \frac{I}{4\pi}\int \frac{\mu'\, d\bar{l}}{r}\,;$$

în care integrala de contur se extinde dealungul întregului circuit, $d\bar{l}$ este luat pe elementul de contur, iar r este distanţa dintre $d\bar{l}$ şi punctul M în care se calculează potenţialul vectorial $\bar{A}$.

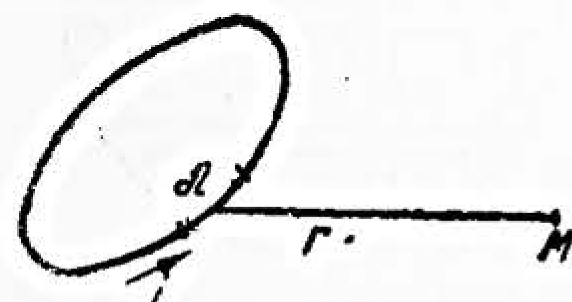


Fig. 21. Notaţia utilizată în formula potenţialului vectorial.

58. Fluxul produs de mai multe circuite în prezenţă. Având în vedere liniaritatea potenţialului vectorial faţă de curent, rezultă că un curent de intensitate I, care parcurge un circuit închis C, produce un câmp magnetic:

$$\bar{H} = I \oint_C \frac{1}{r^2}\left[d\bar{r} \times \frac{\bar{r}}{r}\right], \quad \text{(clasic)}$$

în care elementul dr este luat dealungul lui C: H este o funcţie liniară de curentul I care îl produce şi pentru un circuit oarecare, expresia lui H se descompune deci în două părţi: una care depinde numai de I şi alta care depinde numai de geometria conturului C. Dacă deci vor fi în prezenţă mai multe circuite C_j, parcurse de curenţii I_j, fluxul care va străbate o suprafaţă arbitrară S, care se sprijină pe un contur arbitrar dat C, este o funcţie liniară de I_j:

$$\Phi = \Sigma\, N_j I_j,$$

în care coeficienţii N_j depind numai de situaţia geometrică respectivă dintre C şi C_j. Un caz foarte important, care se studiază mai jos, este acela când C coincide cu unul din C_j; în acest caz mărimile N se numesc *inductanţe*.

59. Inductanţa proprie L se poate defini în două moduri diferite şi anume în funcţie de fluxul magnetic, sau în funcţie de energie. In primul mod se defineşte autoinductanţa unui circuit închis prin raportul dintre fluxul care străbate o suprafaţă arbitrară care se sprijină pe circuit şi curentul care parcurge circuitul şi generează fluxul:

$$L = \frac{\text{fluxul din circuit}}{\text{curentul din circuit, care produce fluxul}}.$$

In termeni energetici, inductanţa se defineşte prin relaţia:

$$L = 2\,\frac{W}{I^2},$$

în care W este energia înmagazinată în câmpul magnetic produs de curentul I care parcurge circuitul.

Ambele definiţii sunt echivalente în cazul circuitelor închise, în curent continuu, sau de frecvenţe nu prea înalte. In regim nestaţionar, adică atunci când câmpul variază rapid, iar dimensiunile circuitului devin comparabile cu lungimea de undă, este greu să se mai definească L (de exemplu în cazul cavităţilor rezonante), utilizând formula în care intervine fluxul. Deaceea se preferă definiţia energetică.

Calcularea inductanţei proprii se poate face utilizând formulele:

$$L = \frac{1}{I^2}\int_V \frac{\mu}{4\pi} H^2\, dv \qquad \text{(în regim clasic)},$$

$$L = \frac{1}{I^2}\int_V \mu' H'^2\, dv \qquad \text{(în sistem raţionalizat)}.$$

In formulă integrala de volum se extinde asupra întregului spaţiu în care există câmpul magnetic H.

60. Inductanţa internă a unui conductor se defineşte considerând numai energia din câmpul situat în interiorul conductorului.

61. Fluxul produs de un sistem de circuite electrice şi străbătând o suprafaţă închisă S **ce se sprijină pe un contur** C. Prin folosirea noţiunii de potenţial vectorial şi prin aplicarea teoremei lui Stokes, se poate exprima acest flux sub forma generală:

$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot\bar{n}\,dS = \iint B\,dS\cos\alpha = \oint \bar{A}\cdot d\bar{l}$$

în care B este câmpul de inducţie străbătând suprafaţa închisă S, limitată de conturul C;
dS — un element din suprafaţa S, care se reazemă pe conturul C;
α — unghiul dintre câmpul B străbătând elementul $d\bar{l}$ şi normala n la $d\bar{l}$;
$\oint$ — integrala dealungul conturului C;
$\bar{A}$ — potenţialul vector într'un punct al conturului C;
$d\bar{l}$ — elementul de contur corespunzător punctului în care se consideră potenţialul vector A.

62 Diverse noţiuni de inductanţă. Se disting diferite noţiuni de inductanţă, în corelaţie cu diverse noţiuni de flux.

α) In cazul unui singur circuit: $L = \dfrac{w\Phi}{i}$ în care w este numărul spirelor; i curentul ce parcurge spirele, iar Φ fluxul produs de curentul i.

β) In cazul a două circuite cu numerele de spire w_1 şi w_2 şi străbătute de curenţii i_1 şi i_2:

fluxul produs de circuitul *1*: $\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_{12}$;

fluxul produs de circuitul *2*: $\varphi_2 = \varphi_2' + \varphi_{21}$

în care φ_1 şi φ_2 sunt fluxurile produse de circ *1* (şi respectiv *2*);
φ_1' şi φ_2' — fluxurile de dispersiune ale circuitelor *1* şi *2*;
φ_{12} — fluxul produs de *1* străbătând *2* şi invers, φ_{21} fluxul produs de *2* şi străbătând *1*.

Apar astfel noţiunile următoare:

γ) *Inductanţe de dispersiune:*

$$\lambda_1 = \frac{w_1 \varphi_1'}{i_1} \quad \text{şi} \quad \lambda_2 = \frac{w_2 \varphi_2'}{i_2}.$$

δ) *Inductanţe proprii utile:*

$$l_{u1} = \frac{w_1 \varphi_{12}}{i_1} \quad \text{şi} \quad l_{u2} = \frac{w_2 \varphi_{21}}{i_2}.$$

ε) *Inductanţă mutuală:*

$$M = \frac{w_2 \varphi_{12}}{i_1} = \frac{w_1 \varphi_{21}}{i_2}.$$

ζ) *Inductanţe proprii pe circuit* (ca şi cum ar fi singure):

$$L_1 = \frac{w_1 \varphi_1}{i_1} = \frac{w_1 (\varphi_1' + \varphi_{12})}{i_1} = \lambda_1 + l_{u1}.$$

Însă din (δ) şi (ε)

$$l_{u1} = \frac{w_1}{w_2} M,$$

deci

$$L_1 = \lambda_1 + \frac{w_1}{w_2} M.$$

Analog

$$L_2 = \lambda_2 + \frac{w_2}{w_1} M.$$

η) *Fluxurile totale străbătând fiecare circuit:*

$$\Psi_1 = w_1 \Phi_{t1} = w_1 (\varphi_1' + \varphi_{12} + \varphi_{21}).$$

Însă din (ζ)

$$w_1 (\varphi_1' + \varphi_{12}) = L_1 i_1,$$

iar din (ε)

$$w_1 \varphi_{21} = M i_2,$$

deci

$$\Psi_1 = w_1 \Phi_{t1} = L_1 i_1 + M i_2.$$

Analog

$$\Psi_2 = w_2 \Phi_{t2} = L_2 i_2 + M i_1$$

θ) *Inductanţele totale* (sau aparente) *ale fiecărui circuit:*

$$L_{t1} = \frac{\Psi_1}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{t1}}{i_1} = L_1 + M \frac{i_2}{i_1}\,; \quad L_{t2} = L_2 + M \frac{i_1}{i_2}.$$

ι) *Inductanţa totală* (sau aparentă) *a unui circuit în prezenţa mai multor circuite:*

$$L_{t1} = L_1 + M_{12} \frac{i_2}{i_1} + M_{13} \frac{i_3}{i_1} + \dots M_{1n} \frac{i_n}{i_1}.$$

χ) *Inductanţa totală* (sau aparentă) *a două circuite în serie* ($i_1 = i_2$):

$$L = L_{t1} + L_{t2} = L_1 + M \frac{i_1}{i_2} + L_2 + M \frac{i_2}{i_1} = L_1 + L_2 + 2M.$$

In cazul când circuitele sunt identice şi nu există dispersiune:

$$L_1 = L_2 = L_t \quad \text{şi} \quad M = \sqrt{L_1 L_2} = L_t.$$

Deci

$$L_t = 2L + 2M = 4L$$

când M este pozitiv, sau

$$L_t = 2L - 2M = 0$$

când M este negativ.

63. Formula lui Neumann. Inductanţa mutuală a două circuite oarecare se poate pune sub forma generală indicată de Neumann:

clasic $$M = \iint \mu \frac{d\bar{l}_1\, d\bar{l}_2}{r} = \iint \mu \frac{dl_1\, dl_2}{r} \cos\varepsilon,$$

raţionalizat $$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\mu' d\bar{l}_1\, d\bar{l}_2}{r}$$

în care $d\bar{l}_1$ şi $d\bar{l}_2$ sunt elemente ale celor două circuite;
r — distanţa între cele două elemente;
ε — unghiul dintre dl_1 şi dl_2;
$\iint$ — o dublă integrală referitoare la parcurgerea succesivă a celor două circuite cu elementele $d\bar{l}_1$ şi $d\bar{l}_2$.

Observaţie. Având în vedere proprietatea comutativă a produsului $d\bar{l}_1\, d\bar{l}_2$, rezultă $M_{12} = M_{21}$

64. Inductanţa unui tor.

$$L = \frac{4\pi w^2}{l} \mu S \qquad \text{în regim clasic;}$$

$$L = \frac{w^2}{l} \mu' S \qquad \text{în regim raţionalizat;}$$

în care w este numărul de spire bobinate pe tor;
l — lungimea fibrei mediane a torului;
S — secţiunea torului, presupusă mică faţă de l;
μ, μ' — permeabilitatea presupusă omogenă în interiorul torului, exprimată în regim clasic, respectiv raţionalizat.

65. Inductanţa mutuală a două circuite situate pe acelaşi tor

$$M = \frac{4\pi w_1 w_2}{l} \mu S \quad \text{în regim clasic;}$$

$$M = \frac{w_1 w_2}{l} \mu' S \quad \text{în regim raţionalizat;}$$

în care w_1 şi w_2 sunt numerele de spire ale celor două bobinaje; μ, μ', S — aceleaşi semnificaţii ca mai sus.

66. Diverse inductanţe privind o linie de transport, scrise în orice sistem coerent de unităţi

α) *Inductanţa totală a unei linii bifilare:*

$$L = 2\,l\,\mu_0\left(\frac{1}{2}\,\mu_r + 2\ln\frac{d}{R}\right) \text{ în regim clasic;}$$

$$L = \frac{l\,\mu_0'}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\,\mu_r + 2\ln\frac{d}{R}\right) \text{ în regim raţionalizat;}$$

în care L este inductanţa proprie totală a întregului sistem;
l — lungimea liniei;
μ_0, μ_0' — permeabilitatea vidului în regim clasic, respectiv raţionalizat;
μ_r — permeabilitatea relativă a materialului din care sunt construiţi conductorii;
d — distanţa dintre axele conductorilor;
R — raza conductorilor.

Formula este valabilă cu condiţia:

$$l \gg d \gg R.$$

β) *Inductanţa mutuală a două fire paralele:*

$$M = 2\,l\mu_0\left(\ln\frac{2l}{d} - 1\right) \text{ în regim clasic;}$$

$$M = \frac{l\mu_0'}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{d} - 1\right) \text{ în regim raţionalizat;}$$

cu aceeaşi precizare asupra notaţiilor şi valabilităţii.

γ) *Inductanţa proprie a unui singur fir:*

$$L_1 = 2\,l\mu_0\left(\frac{1}{4}\,\mu_r + \ln\frac{2l}{R} - 1\right) \text{ în regim clasic;}$$

$$L_1 = \frac{l\mu_0'}{2\pi}\left(\frac{1}{4}\,\mu_r + \ln\frac{2l}{R} - 1\right) \text{ în regim raţionalizat;}$$

în care L_1 este inductanţa proprie a firului ca şi cum ar fi singur; celelalte notaţii, ca mai sus.

δ) *Inductanţa totală a unui fir făcând parte dintr'un sistem de linii paralele:*

$$L = L_1' + \frac{i_2}{i_1}\,M_{12} + \ldots \frac{i_n}{i_1}\,M_{1n} + ,$$

în care L este inductanţa totală a firului *1*;
L_1 — inductanţa proprie a firului *1*;
$M_{12}, M_{13} \ldots M_{1n}$ — inductanţele mutuale între firul *1* şi firele *2, 3, . . n*;
$i_1, i_2, i_3 \ldots$ — curenţii în firele *1, 2, 3*.

Observaţie. Relaţia este valabilă într'un sistem complect, îndeplinind deci condiţia $\sum i_n = 0$

ε) *Inductanţa de serviciu totală a unui fir făcând parte dintr'un sistem de trei fire simetrice* (trifazat):

$$L = 2\,l\mu_0\left(\frac{1}{4}\,\mu_r + \ln\frac{d}{R}\right) \text{ în regim clasic;}$$

$$L = \frac{l\mu_0'}{2\pi}\left(\frac{1}{4}\,\mu_r + \ln\frac{d}{R}\right) \text{ în regim raţionalizat.}$$

cu aceleaşi precizări asupra notaţiilor ca mai sus.

67. Inductanţe privind o linie de transport, dar scrise în cazul particular al sistemului practic, valorile fiind exprimate în henry pe km. In acest caz expresiile sunt identice, atât în regim clasic cât şi în regim raţionalizat.

α) *Inductanţa totală a unei linii bifilare* exprimată pe km de linie:

$$L = 2\left(\frac{1}{2}\,\mu_r + 2\ln\frac{d}{R}\right)10^{-4} \text{ H/km.}$$

β) *Inductanţa mutuală a două fire paralele:*

$$M = 2\left(\ln\frac{2l}{d} - 1\right)10^{-4} \text{ H/km.}$$

γ) *Inductanţa proprie a unui singur fir,* considerat izolat:

$$L_1 = 2\left(\frac{1}{4}\,\mu_r + \ln\frac{2l}{R} - 1\right)10^{-4} \text{ H/km.}$$

δ) *Inductanţa de serviciu totală a unui singur fir, făcând parte dintr'un sistem bifilar,* exprimată pe km de fir:

$$L = \left(\frac{1}{2}\,\mu_r + 2\ln\frac{d}{R}\right)10^{-4} \text{ H/km.}$$

ε) *Inductanţa de serviciu totală a unui singur fir, făcând parte dintr'un sistem de trei fire simetrice* (trifazat), exprimată pe km de fir *):

$$L = \left(\frac{1}{2}\,\mu_r + 2\ln\frac{d}{R}\right)10^{-4} \text{ H/km.}$$

Observaţie. Toate precizările asupra notaţiilor şi valabilităţii rămân aceleaşi.

68. Coeficient de cuplaj. Valoarea maximă pe care o poate avea inductanţa mutuală dintre două bobine este $\sqrt{L_1 L_2}$, în care L_1 şi L_2 sunt inductanţele proprii ale celor două bobine. Această valoare maximă se obţine dacă tot fluxul primei bobine trece prin a doua bobină, adică dacă nu există o dispersiune a liniilor de forţă. In caz contrar, inductanţa mutuală va fi mai mică decât această valoare. Raportul dintre valoarea reală şi valoarea maximă posibilă a inductanţei mutuale se numeşte coeficient de cuplaj şi se notează cu k:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

*) Deasemenea este de menţionat, ca o contribuţie ştiinţifică românească, aceea a Prof. C. Budeanu care a indicat metoda pentru determinarea inductanţei unui element de circuit prin folosirea proprietăţilor potenţialului vector.

Valoarea maximă a lui k este 1. Pentru k mai mare decât 0,5, cuplajul dintre bobine se numeşte strâns; pentru k mai mic de 0,01 cuplajul se numeşte larg.

69. **Curba de magnetizare.** In cazul unui miez magnetic real, relaţia dintre inducţia magnetică B şi câmpul H nu mai este liniară. Curba reprezentativă a relaţiei $B = f(H)$ se numeşte curba de magnetizare sau de saturaţie a materialului respectiv.

Ea se ridică experimental, după ce în prealabil materialul s'a demagnetizat. Atunci când forţa de magnetizare pleacă dela valoarea zero, B variază în mod continuu la valoarea maximă B_{max}, apoi, tot în mod continuu trece prin zero, la valoarea minimă — B_{max} şi din nou prin zero la B_{max}. Punctul figurativ din planul B, H, descrie astfel un ciclu, numit ciclu histerezis.

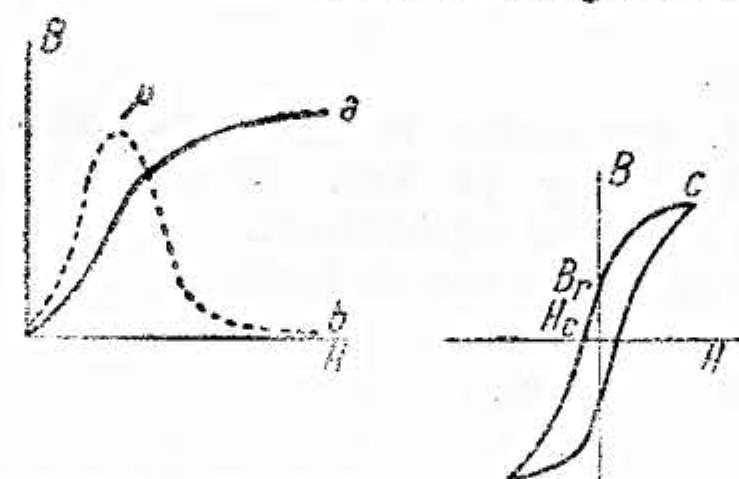


Fig. 22. — Curbă tipică de magnetizare (a), curba de permeabilitate (b) şi ciclul histerezis al unui material magnetic.

Magnetismul rezidual al unui material se numeşte câmpul B_r care rămâne după ce câmpul magnetizant pozitiv s'a anulat (fig. 22).

Forţa coercitivă (sau câmpul coercitiv) a unui material este câmpul de magnetizare H_c, necesar pentru a anula fluxul remanent (fig. 22).

70. **Permeabilitatea unui material magnetic** se defineşte prin raportul B/H în care B şi H sunt exprimate în acelaşi sistem de unităţi; rezultă că permeabilitatea are măsuri diferite după sistemul utilizat. Permeabilitatea nu este o funcţie liniară de H, ci depinde de densitatea fluxului. In general ea are valori mici pentru H mic şi pentru regiunea în care materialul este saturat.

Permeabilitatea corespunzând la valori foarte mici ale câmpului de magnetizare se numeşte *permeabilitate iniţială*. Ea este importantă în tehnica telecomunicaţiilor. La materialele magnetice obişnuite, permeabilitatea iniţială este foartemică.

Permeabilitatea incrementală este permeabilitatea care se prezintă unui câmp de magnetizare alternativ, suprapus unui câmp de magnetizare constant, produs de un curent continuu; ea se mai numeşte şi permeabilitate *aparentă*. In situaţia descrisă mai sus, ciclul de magnetizare se produce ca în fig. 23. Permeabilitatea prezentată unui câmp de magnetizare alternativ este dată de panta dreptei care uneşte vârfurile unui ciclu de histerezis secundar (1, 2 sau 3 din fig. 23). Permeabilitatea incrementală creşte cu creşterea densităţii de flux alternativ (până la punctul în care miezul se saturează) şi descreşte cu creşterea forţei de magnetizare continue. Curba lui μ incremental se vede în fig. 22 a.

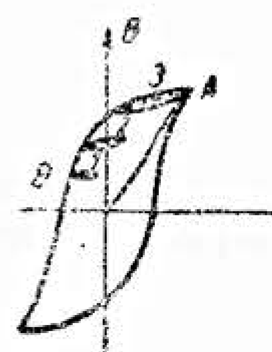


Fig. 23. — Ciclul histerzis principal, având trei cicluri histerezis minore, datorite unor câmpuri de magnetizare continue.

71. **Circuitul magnetic.** Conceptu de circuit magnetic se bazează pe ideea că un flux magnetic constant, sau care variază lent în timp, tinde să se mărginească la traiectorii situate în materiale magnetice de mare permeabilitate, după cum un curent electric constant sau care variază lent, tinde cu timpul să se mărginească într'un circuit electric cuprinzând numai drumurile de mare conductibilitate. Acest concept conduce la stabilirea anumitor similitudini între comportarea unui circuit rezistiv neliniar cu curenţi constanţi sau variind lent şi comportarea unui circuit feromagnetic, care în mod inerent este neliniar şi care are un flux constant sau variind lent.

Totuşi circuitul magnetic diferă în mod sensibil de analogul său electric. Atunci când este utilizat la transportarea curentului, un conductor electric este în mod normal separat de ceilalţi conductori prin materiale izolante. Aceşti izolanţi au o conductibilitate de circa 10^{-20} ori aceea a cuprului, astfel încât cea mai

mare parte din curent trece prin conductor, curentul din dielectric fiind cu totul neglijabil. In contrast cu aceasta, nu există izolatori magnetici cu proprietăţi similare. Cea mai diamagnetică substanţă cunoscută, bismutul, are o permeabilitate de circa 0,9998 ori aceea a aerului, pe câtă vreme izolantul obişnuit al fluxului, adică aerul, are o permeabilitate relativă de numai 10^{-4} şi adesea de numai 10^{-2} din permeabilitatea relativă a materialelor feromagnetice. O complicaţie suplimentară rezultă din faptul că circuitele magnetice prezintă adesea între fieruri care sunt în paralel cu alte drumuri magnetice prin aer. Acestea fac ca o parte considerabilă din fluxul magnetic să iasă din circuitul magnetic util şi astfel să nu mai poată fi folosit. Acesta este fluxul de scăpări şi acest flux de scăpări sau dispersiune trebue totdeauna luat în considerare la calculele magnetice.

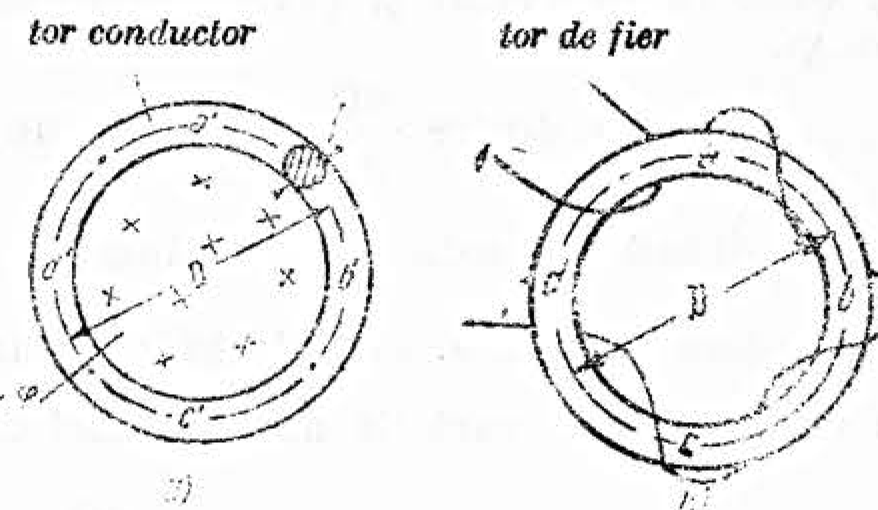


Fig. 24. — Circuite similare electrice şi magnetice.

In scopul înţelegerii analogiei magneto-electrice, se vor considera două configuraţii similare (fig. 24).

Fig. 24, *a* reprezintă un tor omogen şi conductor cu un flux magnetic care intră perpendicular pe planul torului — deci pe planul hârtiei.

Pe oricare suprafaţă S care se sprijină pe conturul a' b' c' a', fluxul φ care străbate această suprafaţă este:

$$\varphi = \int_S \overline{B}\,\overline{n}\,dS. \tag{71.1}$$

Dacă fluxul φ variază cu timpul, legea inducţiei lui Faraday dă, pentru acelaşi contur a' b' c' a', forţa electromotoare E care se desvoltă în conductor.

E este proporţională numai cu derivata fluxului care străbate torul.

$$E = \int \overline{K}\,d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int \overline{B}\,\overline{n}\,dS \quad (71.2) \qquad \text{sau} \qquad E = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (71.3)$$

unde $\overline{K}$ este câmpul electric.

In fig. 24, *b* se dă analogul magnetic. Torul este făcut dintr'un material feromagnetic omogen, pe el fiind bobinate w spire, distribuite uniform şi parcurse de curentul I. Pe oricare drum închis, în materialul torului, integrala de contur a componentei câmpului magnetic H, în direcţia deplasării dl, pentru un curent continuu sau variând încet, este:

$$F = \int H \cos\theta \, dl \tag{71.4}$$

sau cu o notaţie vectorială:

$$F = \int \overline{H}\,d\overline{l} \tag{71.5}$$

Pe baza celor dela punctul 4, subcap. « *Electromagnetismul* » se scrie:

$$\text{clasic} \quad F = 4\pi\int \overline{J}\,\overline{n}\,dS = 4\pi\frac{dQ}{dt}\ ; \quad \text{raţionalizat} \quad F = \int \overline{J}\,\overline{n}\,dS = \frac{dQ}{dt}. \tag{71.6}$$

In ecuaţia (71.5) integrarea se face pe conturul închis *abcd*. In ecuaţia (71,6), $\frac{dQ}{dt}$ reprezintă derivata în raport cu timpul a sarcinii totale care trece prin planul torului.

In mod analog cu ecuaţiile (71.2) şi (71.3), care determinau pe E, mărimea F, definită de (71.5) şi (71.6), se numeşte *forţă magnetomotoare*, sau prescurtat f.m.m.

Analogia dintre $\frac{dQ}{dt}$ şi $\frac{d\varphi}{dt}$ are un sens fizic mai greu de sezizat, deoarece reprezentând sarcinile ca mişcându-se prin planul torului, derivatei $\frac{dQ}{dt}$ se asociază ideea de viteză. Pe câtă vreme fluxul φ descriind starea mediului şi derivata sa reprezentând variaţia acestei stări cu timpul, nu se poate ataşa lui $\frac{d\varphi}{dt}$ ideea de viteză. Această analogie între $\frac{dQ}{dt}$ şi $\frac{d\varphi}{dt}$ apare ca fiind mai mult de esenţă matematică.

In cei doi conductori consideraţi ca formând circuitul electric şi cel magnetic, analogia poate fi întinsă mai departe, comparând efectele lui E şi F în cele două circuite.

Dacă intensitatea câmpului electric este uniformă dealungul conturului $a'\ b'\ c'\ a'$ şi dacă acest contur este situat la mijlocul torului, intensitatea câmpului electric este:

$$K = \frac{E}{l} = \frac{E}{\pi D},$$

în care l reprezintă lungimea circuitului şi D reprezintă diametrul mediu.

Câmpul electric dă naştere unui curent de densitatea J, care este o funcţie de intensitatea câmpului electric K şi de rezistivitatea ρ a materialului din care este făcut torul. Dacă grosimea T a torului este mult mai mică decât diametrul D, astfel încât l să fie practic acelaşi pentru toate circuitele,

$$J = \frac{E}{l\rho}.$$

Curentul total din tor este:

$$I = SJ = S\frac{E}{l\rho} = \frac{E}{R}, \tag{71.7}$$

în care:

$$R \equiv \frac{\rho l}{S}, \tag{71.8}$$

S fiind secţiunea transversală a torului, iar R, rezistenţa sa electrică. Deci, atât timp cât se consideră numai curentul din conductor, torul străbătut de un flux care are o derivată în raport cu timpul este echivalent cu o pilă de o f.e.m. E, conectată în serie cu un conductor de rezistenţa R. Tensiunea la bornele pilei este $\frac{d\varphi}{dt}$ şi în circuitul exterior pilei, între două puncte a' şi b', are loc o cădere

de potenţial:

$$V_{a'b'} = \int_{a'}^{b'} \overline{K} d\overline{l}$$

sau

$$V_{a'b'} = IR_{a'b'}, \tag{71.9}$$

în care $R_{a'b'}$ este rezistenţa dintre punctele a' şi b'. Aceasta se reprezintă în fig. 25, *a* şi 25, *b*. Atunci când rezistivitatea nu este constantă, rezistenţa este o funcţie de curent,

$$R = f(I).$$

Pentru configuraţia magnetică din fig. 24, *b*, se pot scrie relaţii matematice analoage la (71.7) şi (71.8). Dacă *abca* este un drum mediu, atunci intensitatea câmpului magnetic în orice punct al acestui drum este

$$\text{clasic} \quad H = \frac{F}{\pi D} = \frac{F}{l} = \frac{4\pi wI}{l} \quad ; \quad \text{raţionalizat} \quad H = \frac{wI}{l},$$

în care I este curentul în fiecare din cele w spire ale torului.

Acest câmp magnetic stabileşte un câmp de inducţie B, legat de H şi de permeabilitatea materialului magnetic al torului prin relaţia:

$$B = \mu H.$$

Pentru materiale feromagnetice, această funcţie poate fi rareori considerată ca liniară; deobicei ea se exprimă grafic printr'o curbă ridicată experimental (fig. 22).

Dacă raportul dintre T şi D (fig. 24) este atât de mic încât B este acelaşi pe toate circuitele, atunci:

$$B = \mu\frac{F}{l}$$

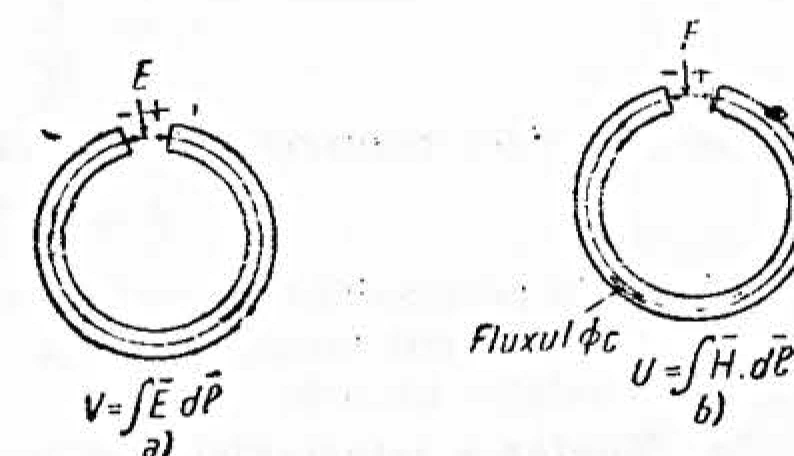


Fig. 25. — Reprezentarea forţelor concentrale electro — şi magnetomotoare în circuite analoage

şi fluxul total din tor este:

$$\Phi = SB = S\mu\frac{F}{l} = \frac{F}{\mathfrak{R}}, \tag{71.10}$$

în care:

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{l}{\mu S}. \tag{71.11}$$

72. **Reluctanţa** unui circuit magnetic omogen şi continuu se defineşte prin relaţia:

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{l}{\mu S}.$$

Reluctanţa unui tor de fier este analoagă cu rezistenţa unui tor bun conducător de electricitate. Ecuaţiile (71.10) şi (71.11) arată că atâta vreme cât se consideră fluxul în fier, torul de fier având o înfăşurare uniform distribuită prin care trece un curent I este echivalent cu o sursă de forţă magnetomotoare F,

conectată în serie cu un circuit magnetic de reluctanţa $\mathfrak{R}$. Intensitatea f.m.m. a sursei este (clasic) $4\pi\left(\frac{dQ}{dt}\right)$. In circuitul exterior sursei, căderea de potenţial magnetic U_{ab} între două puncte a şi b este:

$$U_{ab} = \int_b^a \bar{H}\,d\bar{l} \tag{72.1}$$

sau

$$U_{ab} = \Phi\mathfrak{R}_{ab}, \tag{72.2}$$

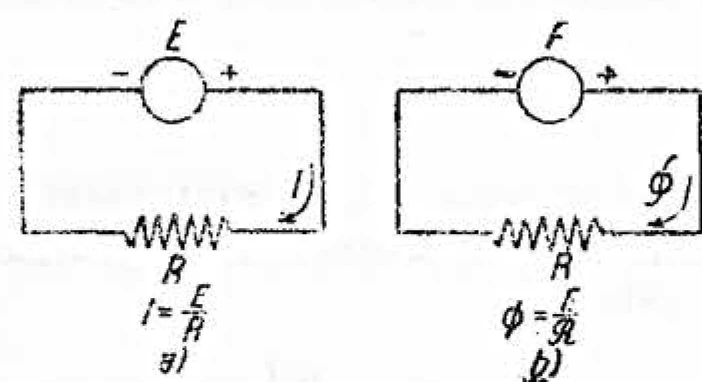


Fig. 26. — Circuite concentrate reprezentând circuitele analoage electrice şi magnetice.

în care $\mathfrak{R}_{ab}$ este reluctanţa dintre a şi b. Aceasta se reprezintă în fig. 25, b şi 26, b. Atunci când permeabilitatea materialului feromagnetic nu este constantă, reluctanţa este o funcţie neliniară de flux,

$$\mathfrak{R} = f(\Phi).$$

73. **Permeanţa** unui circuit magnetic se defineşte ca fiind inversul reluctanţei $\mathfrak{R}$ a acelui circuit, la fel după cum conductanţa unui circuit electric este inversul rezistenţei R a acelui circuit electric:

$$G \equiv \frac{1}{R} \qquad \Lambda \equiv \frac{1}{\mathfrak{R}} \tag{73.1}$$

Se pot deci transcrie legile (71.9) şi (72.2) astfel:

$$I = GV; \quad \Phi = \Lambda U.$$

Ideile de permeabilitate, reluctanţă şi permeanţă sunt utile în raţionamente, însă servesc la calcul numai când μ este constant, adică atunci când între B şi H există o relaţie liniară.

74. **Montarea reluctanţelor în serie** se face după aceleaşi reguli ca şi în cazul rezistenţelor electrice. In cazul unui circuit la care reluctanţa variază în mod continuu dealungul circuitului, reluctanţa totală a acestui circuit se calculează cu ajutorul unei integrale:

$$\mathfrak{R}_{ab} = \int_a^b \frac{dl}{\mu S}.$$

75. **Direcţia forţei magnetomotoare** se determină după regula burghiului: dacă burghiul se roteşte în direcţia curentului din bobină, el înaintează în direcţia potenţialului magnetic crescător. In afara sursei, descreşterea potenţialului magnetic are loc în direcţia fluxului.

76. **Legea lui Kirchhoff** pentru circuitele magnetice: într'un circuit magnetic închis, suma forţelor magnetomotoare ale surselor este egală cu suma căderilor de potenţial în reluctanţe.

77. **Diferenţe dintre circuitele electrice şi cele magnetice.** In cele de mai sus s'a arătat analogia care există între E şi F. Pentru a produce pe E, este necesar să existe cauza lui, adică variaţia fluxului, E fiind cauzat de $\frac{d\varphi}{dt}$. La fel F este cauzat de $\frac{dQ}{dt}$.

Deşi circuitele magnetice şi electrice se prezintă analog din punct de vedere matematic în multe privinţe, totuşi ele au şi importante diferenţe fizice. Astfel, de exemplu, exceptând temperaturile din jurul lui 0° K, într'un circuit electric se disipă o putere egală cu I^2R, atunci când în circuit trece un curent constant I. Dar nicio putere nu este disipată sau absorbită direct de către câmpul magnetic care există într'un tor, atâta vreme cât densitatea de flux rămâne constantă precum tutindeni în circuit. In acest sens, se observă că magneţii permanenţi, dacă sunt bine păstraţi, îşi conservă magnetizarea în perioade foarte mari de timp. Totodată, atunci când se stabileşte un câmp magnetic cu ajutorul unei bobine de excitaţie, în bobină se disipă o putere egală cu I^2R, în care R este rezistenţa bobinei, iar I curentul care o parcurge. De data aceasta puterea electrică I^2R disipată în conductor se transformă în căldură prin efectul Joule-Lenz. Această putere nu are nimic deaface cu producerea efectelor magnetice ale acestui curent.

78. **Teoriile magnetismului.**

α) *Teoria lui Ampère* este una din cele mai vechi teorii care încearcă să explice magnetismul. Această teorie pleacă dela constatarea faptului că curenţii electrici au proprietăţi magnetice. Se explică atunci proprietatea corpurilor magnetice prin existenţa unor curenţi moleculari. Fiecare curent molecular produce un câmp magnetic. La un corp nemagnetizat, aceşti curenţi sunt îndreptaţi în toate sensurile posibile, astfel încât câmpul magnetic rezultant este nul.

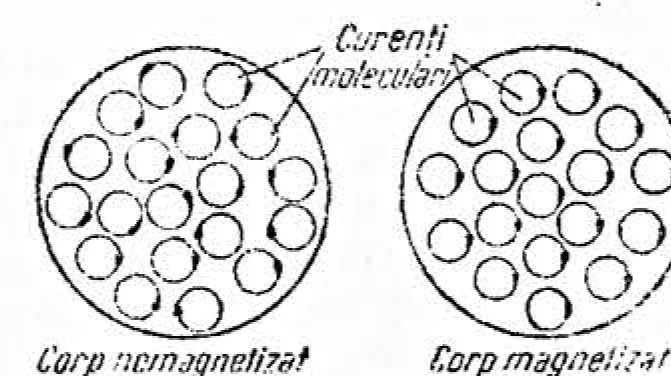


Fig. 27. — Teoria lui Ampère.

Atunci când se introduce acest corp într'un câmp magnetic, moleculele se orientează astfel încât câmpurile proprii iau toate direcţia câmpului magnetizant, dând o rezultantă apreciabilă.

β) *Teoria actuală a magnetismului.* Deoarece ideile lui Ampère erau vagi, la început ele au apărut mai degrabă ca un concept filosofic. In ultima vreme însă, plecând dela aceste idei, s'a creat o teorie care explică unele efecte calitative, iar în anumite cazuri permite şi verificări cantitative. In ciuda acestor progrese, teoria a rămas totuşi cu mult în urma cunoştinţelor empirice care se deţin în această direcţie.

Teoriile actuale recurg la fizica atomică şi la teoria cuantică. In cele care urmează se va prezenta pe scurt o expunere a teoriei actuale a magnetismului. Această teorie consideră diferite subdiviziuni ale materiei. Cele mai mici părţi care intervin în teorie sunt componentele atomilor, anume *nucleii* şi *electronii asociaţi*. Urmează apoi *atomii*. Mai mari decât atomul sunt *domeniile*, având un volum de circa 10^{-9} cm³ şi conţinând circa 10^{15} atomi. In cele din urmă există *cristalele*.

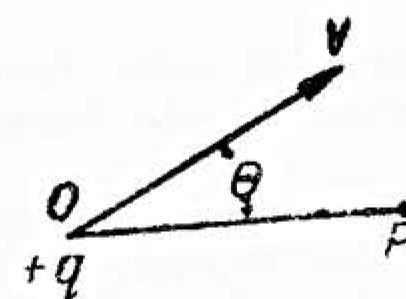


Fig. 28. — Notaţia utilizată în formula care dă intensitatea câmpului magnetic produs de o sarcină electrică în mişcare.

Electronii şi nucleul. Magnetismul este considerat ca fiind produs de sarcini electrice în mişcare. Atunci când o sarcină electrică q se mişcă cu viteza v, ia naştere un câmp magnetic. Cu notaţia din fig. 28, câmpul, normal pe planul POV, are intensitatea:

$$H = \frac{qv}{r^2}\sin\theta.$$

Aceste proprietăţi magnetice ale sarcinilor electrice în mişcare au fost verificate experimental (vezi pct. 144).

In aceste condiţii se admite că electronii (particule elementare de sarcină electrică negativă) prin mişcarea lor în jurul nucleului produc câmpuri magnetice proprii ca şi cum acele sarcini electrice în mişcare ar fi echivalente cu un curent

electric, de direcţie inversă vitezei electronilor, dat fiind că sarcina electronului este negativă. Aceştia sunt curenţii interni care ar produce câmpurile magnetice atomice şi ar fi echivalenţi cu acei presupuşi de Ampère.

Această teorie dă explicaţia principalelor fenomene magnetice cunoscute azi.

Diferenţa dintre corpurile feromagnetice şi acelea nemagnetice (cuprul, de exemplu) constă în valoarea acelor câmpuri magnetice interioare şi mai ales în posibilitatea de orientare (sau de polarizare) a orbitelor pe care se deplasează electronii atomilor, în prezenţa unui câmp exterior magnetizant.

In atomi, electronii se mişcă pe orbite în jurul nucleului şi în acelaşi timp fiecare electron se roteşte în jurul unei axe proprii (spinul electronului). Un *electron cu spin* sau un *nucleu cu spin* are un moment magnetic de spin bine definit şi în acelaşi timp are şi un moment cinetic propriu unghiular. Pentru electron aceste momente sunt în direcţii opuse, iar pentru nucleu în aceeaşi direcţie. In atom electronul având înafara momentului său de spin şi un moment unghiular cinetic orbital, va avea deci şi un moment magnetic datorit mişcării sale pe orbită. Momentul total magnetic al unui atom este suma vectorială a tuturor momentelor magnetice componente.

Atomul. Cel mai simplu atom este cel de hidrogen, având un proton ca nucleu şi un singur electron pe orbită. Considerat ca un întreg, atomul are un moment magnetic compus din trei părţi: momentul sarcinii pozitive care se roteşte în jurul axei sale, momentul sarcinii negative care se roteşte în jurul axei proprii şi momentul produs de mişcarea sarcinii negative pe orbită. Momentul magnetic asociat cu spinul şi cu mişcarea orbitală a electronului este de sute de ori mai mare decât momentul nucleului. Pentru a studia magnetismul nucleului, trebue să se neutralizeze magnetismul electronului. Aceasta se produce în molecula de hidrogen, în care cei doi electroni ai celor doi atomi care compun molecula—se neutralizează, spinii având sensuri opuse. In unele molecule (la parahidrogen) şi cei doi spini ai protonului se anulează, dar în alte cazuri (la ortohidrogen) spinii protonilor au aceeaşi direcţie.

Ar urma ca hidrogenul să nu aibă niciun moment magnetic, totuşi experienţa arată prezenţa unui moment magnetic de acelaşi ordin de mărime cu acela al ortohidrogenului, sau ceva mai mic. Se pune în evidenţă acest moment, aplicând un câmp magnetic exterior. Fenomenul se explică printr'o rotaţie a sarcinilor în jurul direcţiei câmpului magnetic aplicat. Analiza acestui fenomen de precesie a arătat că, indiferent de direcţia mişcării orbitale a spinului, mişcarea precesională a tuturor sarcinilor se face astfel încât să dea naştere unui câmp de direcţie opusă celui aplicat. Există deci şi în acest fenomen molecular un fenomen care intră în legea lui Lenz, sau în general în legea acţiunii şi reacţiunii.

In molecula de parahidrogen, singurul efect magnetic rezultat este deci această slăbire a câmpului, datorită momentului magnetic precesional. Acest efect se cunoaşte sub numele de diamagnetism.

Atunci când unei molecule de hidrogen i s'a extras un electron, rezultă un ion de hidrogen. Deoarece nu se mai produce anularea spinului orbital, ionii tind să-şi alinieze momentele lor orbitale şi de spin în direcţia câmpului aplicat, ceeace face să rezulte un câmp total mai intens decât cel aplicat. Acest fenomen este cunoscut sub numele de paramagnetism. Atât substanţele diamagnetice cât şi cele paramagnetice îşi pierd proprietăţile lor magnetice atunci când câmpul extern se anulează: la corpurile diamagnetice, pentrucă mişcarea precesională încetează atunci când câmpul se anulează; la corpurile paramagnetice, pentrucă în absenţa unui câmp extern, momentele magnetice se orientează astfel încât — aşa cum arată teoria cuantelor — suma lor să fi zero.

Atomii gazelor nobile sunt diamagnetici; la fel, unii ioni ca Cl^{-}, Na^{+}, Mg^{++}. Majoritatea atomilor şi ionilor sunt paramagnetici.

Proprietăţile substanţelor feromagnetice nu sunt determinate în întregime de atomii lor, dar cele de mai sus arată că atomul de crom, având un exces de

şase electroni cu spini pozitivi, atomul de fier un exces de patru şi atomul de cobalt un exces de trei, trebue să dea naştere unor corpuri cu proprietăţi magnetice importante. Experienţa arată că în structurile cristaline, spinii sunt astfel orientaţi încât cromul nu este feromagnetic, în timp ce fierul, cobaltul, nichelul şi anumite aliaje au proprietăţi feromagnetice pronunţate. Factorul determinant este orientarea momentelor magnetice ale atomilor în cristal. Dacă această orientare este astfel făcută încât să dea un moment magnetic rezultant, materialul este feromagnetic. Dacă suma vectorială a momentelor magnetice este nulă, materialul nu este feromagnetic.

La rândul ei, orientarea depinde de energia potenţială a cristalului care rezultă din orientarea respectivă, magnetică sau nemagnetică. Orientarea se face astfel încât energia potenţială a cristalului să fie minimă. In fig. 29 se arată diferenţa dintre energia W_n, care corespunde orientării nemagnetice şi energia W_m, care corespunde orientării magnetice a reţelei. In abscisă s'a luat raportul dintre distanţa de separaţie atomică r_a către raza r_d a orbitei conţinând electronii de spin pozitiv care sunt în exces. Atunci când această diferenţă ΔW este pozitivă, starea stabilă a cristalului este cea magnetică, deoarece corespunde la o stare la care energia potenţială este mai mică. Invers, atunci când ΔW este negativă, starea stabilă este acea nemagnetică. Astfel, fierul, cobaltul şi nichelul sunt feromagnetice, în timp ce manganul nu este.

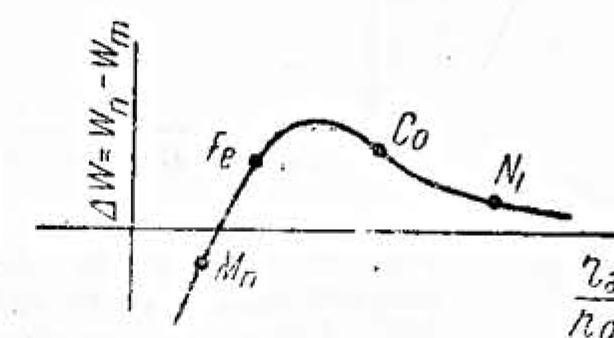


Fig. 29. — Energia unei reţele cristaline cu exces de electroni de spin pozitiv.

Domeniul. Orientarea paralelă a momentelor atomice magnetice într'o reţea cristalină este limitată adeseori la o regiune din cristalul feromagnetic. Raţiunea acestei limitări nu este încă complect elucidată, însă faptele experimentale arată că într'un cristal de fier care, privit ca un întreg, apare nemagnetizat, există regiuni numite domenii, care sunt complect magnetizate. Aceste domenii au momentul lor magnetic orientat în direcţii diferite, astfel încât suma lor vectorială este nulă.

Orice substanţă formată din aceste domenii magnetizate în mod spontan şi saturate se numeşte substanţă feromagnetică.

In strucura cristalină a unui domeniu, atomii sunt aranjaţi într'o ordine bine precizată. In cristalul de fier, de exemplu, atomii sunt situaţi în colţurile unui cub, care are încă un atom în centru. In cristalul de nichel, atomii se găsesc tot în vârfurile unui cub, însă care nu mai are un atom în centru; în schimb, în centrul fiecărei feţe se găseşte câte un atom. In absenţa unui câmp magnetizant extern, un domeniu al unui cristal de fier are toate momentele magnetice orientate într'o singură direcţie, şi anume în direcţia unei muchii a cubului. Această direcţie se numeşte direcţia *100*. Diagonala unei feţe se numeşte direcţia *110*, iar diagonala cubului se numeşte *111*. Momentele magnetice ale domeniilor de nichel au direcţia *111*.

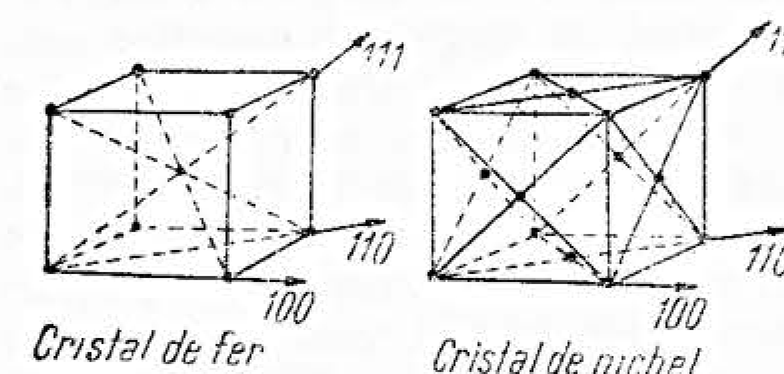


Fig. 30. — Cristale de fier şi nichel.

Cristalul. Pentru a studia comportarea unui monocristal s'au preparat în laboratoare cristale suficient de mari pentru a li se putea studia proprietăţile magnetice. Dacă se aplică unui cristal de fier, dealungul axei *100*, un câmp extern, continuu crescător, densitatea de flux B creşte şi ea continuu pentru valorile mici ale câmpului extern H, după cum se vede în fig. 31.

Aceasta se expică admiţând că în stadiul nemagnetizat, domeniile au aceeaşi orientare medie în cele şase direcţii privelegiate ale cristalului, astfel cum se indică

în fig. 32, *a*. Atunci când se aplică forţa de magnetizare dealungul uneia dintre aceste direcţii, domeniile care au momentele lor de magnetizare în celelalte cinci direcţii, îşi rotesc momentele în direcţia forţei aplicate, precum se vede în fig. 32, *b*.

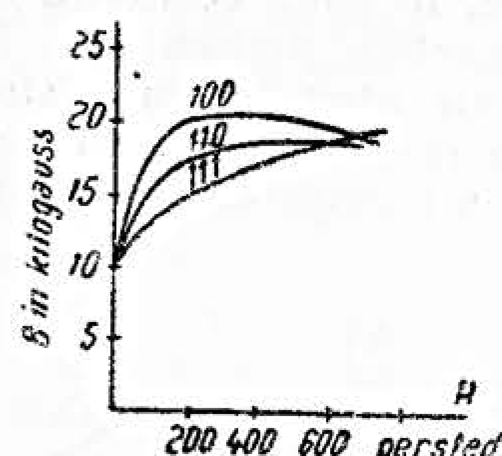


Fig. 31. — Curbele de magnetizare în direcţiile *100*, *110* şi *111* pentru un cristal de fier.

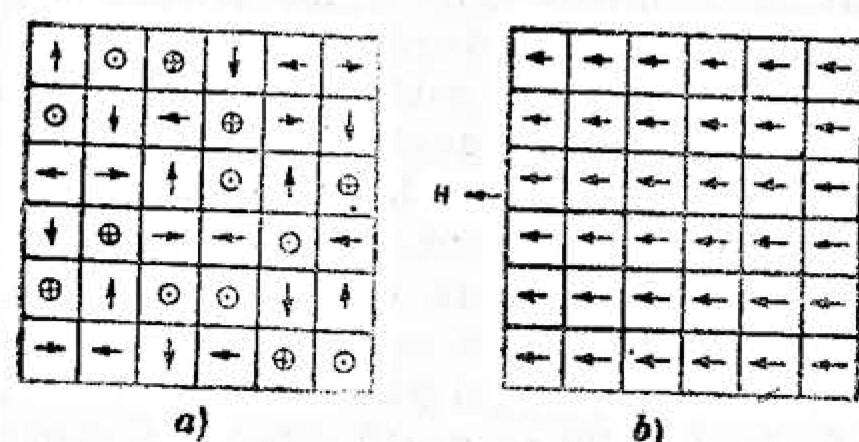


Fig. 32. — *(a)* Domenii având momentele magnetice în toate cele şase direcţii 100, într'un cristal de fier nemagnetizat; *(b)* toate momentele iau aceeaşi direcţie *100*, atunci când cristalul este complect magnetizat într'o direcţie *100*.

După cum rezultă din fig. 31, direcţia *100* se numeşte direcţia de magnetizare uşoară. Când câmpul se aplică dealungul diagonalei *110* a unei feţe, patru dintre cele şase momente magnetice se rotesc întâi pe cele două direcţii care au componente pe *110*, apoi, când câmpul creşte, momentele tuturor domeniilor sunt treptat aduse în direcţia câmpului. Direcţia *110* este — pentru cristalele de fier — direcţia de cristalizare medie, iar direcţia *111* direcţia de magnetizare dificilă.

Existenţa domeniilor se poate constata prin studii metalografice.

Substanţe policristaline. Aliajele magnetice sunt formate din numeroase cristale strâns unite unul de celălalt, dar care au o direcţie definită de aliniere a axelor lor. Atunci când nu se aplică un câmp extern, fiecare domeniu este magnetizat spontan şi complect într'una din cele şase direcţii *100* ale sale. Momentele magnetice ale domeniilor sunt distribuite în mod egal cu cele şase direcţii de magnetizare uşoară, astfel încât fiecare cristal, privit ca un tot, se prezintă nemagnetizat.

Aplicând un câmp magnetic extern, se produce întâi o dilatare a domeniilor care au momentul magnetic în direcţia câmpului aplicat.

Aceasta atrage după sine comprimarea domeniilor vecine care au momentul magnetic în direcţii mai puţin favorabile. Acest efect al lărgirii domeniilor este foarte slab şi predomină mai ales la câmpurile externe slabe. Dacă intensitatea câmpului extern creşte, devine mai important un alt efect, în care momentele magnetice ale domeniilor individuale se aliniază în direcţia axei cristaline privilegiate, care se găseşte cel mai aproape de direcţia câmpului aplicat. Acest efect se produce nu prin realinierea domeniilor care s'ar comporta ca şi când ar fi corpuri solide, ci prin realinierea axei spinilor electronilor din domeniu, care trec dintr'o direcţie stabilă în altă direcţie stabilă. In toate domeniile această realiniere se produce simultan. Dacă fluxul continuă să crească, se constată experimental că densitatea de flux B creşte prin salturi finite, fiecare creştere corepunzând realinierii spinului dintr'un domeniu. Acest efect, cunoscut sub numele de efectul Barkhausen, se poate urmări în fig. 33, în porţiunea mărită a curbei. Salturile se pot constata acustic cu montajul din fig. 34.

Din cauza marelui număr de cristale care nu au muchiile paralele cu direcţia câmpului aplicat, un al treilea efect se produce la forţe de magnetizare cu mult mai mari decât aceea necesară alinierii momentelor. Acest ultim fel de magnetizare constă într'o lentă orientare a momentelor tuturor domeniilor, nu în direcţia muchiilor cristalului, ci în direcţia câmpului aplicat. Fierul devine saturat magnetic şi

atunci când toate momentele domeniilor sunt aliniate în direcţia câmpului aplicat, materialul este deplin magnetizat.

Tot astfel cum cristalele de crom sunt nemagnetice, deşi au atomi cu şase electroni necompensaţi cu spini pozitivi, se poate întâmpla ca anumite aliaje de fier să nu aibă proprietăţi feromagnetice.

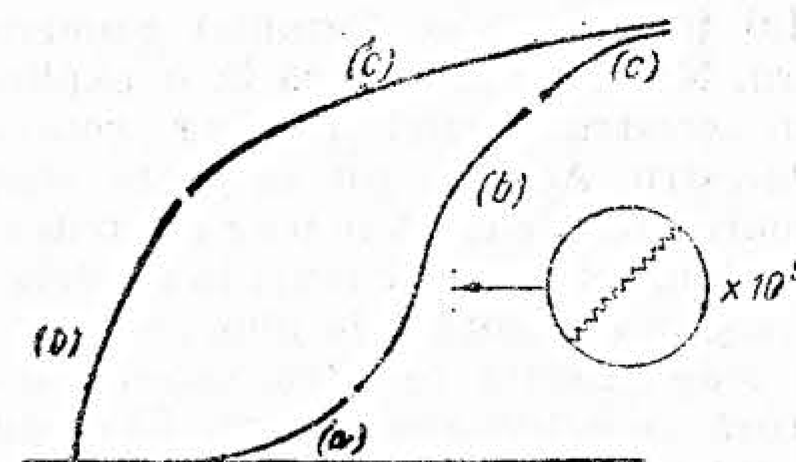


Fig. 33. — Cele trei regiuni de magnetizare: *(a)* variaţia dimensiunilor domeniilor; *(b)* schimbările bruşte de orientare; *(c)* schimbările lente de orientare.

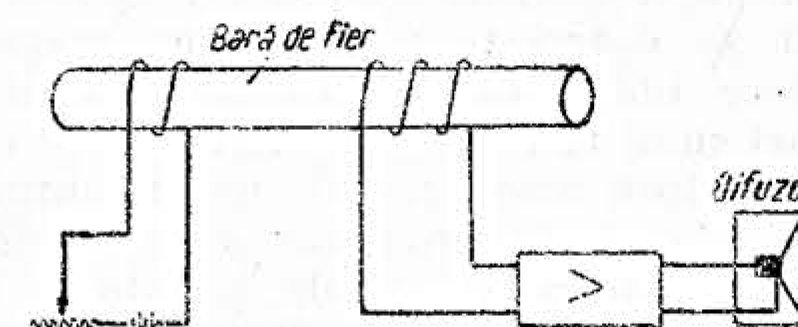


Fig. 34. — Montaj pentru demonstrarea efectului Barkhausen.

Astfel, un aliaj de 0,3 % C, 10 % Mn, 6,5 % Ni şi restul fier, este neferomagnetic la temperatura camerei.

Există aliaje puternic magnetice, formate din materiale nemagnetice. Astfel este aliajul având 65 % Cu, 20 % Mn, 15 % Al.

79. Magnetostricţiunea. Forţele magnetice dintr'un cristal, astfel cum rezultă din spinii electronilor, produc tensiuni mecanice în material, fiind echilibrate ca efect de forţele electrice ale sarcinilor electronilor. Atunci când se produce o redistribuţie a vectorilor magnetici, echilibrul dintre forţele magnetice şi electrice este perturbat. Ca o urmare a acestei fapt, dimensiunile fizice ale materialului variază. Acest fenomen se numeşte *magnetostricţiune*. Proprietăţile magnetostrictive ale fierului sunt opuse celor ale nichelului. Efectul tensiunilor mecanice asupra fierului este mărirea magnetizării pentru o forţă de magnetizare dată. Dimpotrivă compresiunile mecanice i-o micşorează. La nichel se întâmplă invers. La fier lungimea materialului creşte atunci când magnetizarea creşte (magnetostricţiune pozitivă) în timp ce la nichel lungimea scade (magnetostricţiune negativă).

Tensiunile interne în materiale se pot produce prin diferite căi, cum ar fi prelucrarea la rece, distorsionarea reţelei cristaline prin prezenţa impurităţilor şi prin magnetostricţiune. Atunci când se doreşte o magnetizare permanentă, tensiunile interne sunt utile deoarece cu cât sunt mai puternice, cu atât direcţia de magnetizare a domeniilor este mai stabilă. Acesta este cazul magneţilor permanenţi.

Când dimpotrivă se cere o magnetizare uşoară — adică o permeabilitate mare a materialului — tensiunile interne trebue să fie mici.

Cea mai mare permeabilitate relativă obţinută este de 600000 şi se produce printr'un aliaj de 65% nichel şi 35% fier supus unui tratament termic special.

In teoria feromagnetismului, contribuţii importante au adus şi savanţii A c u l o v şi A r c a d i e v.

80. Noţiuni de magnetism terestru. Din vechime, Chinezii au observat că acele magnetizate caută să se îndrepte spre anumite direcţii fixe, orientate spre ceeace mai târziu s'a numit polii magnetici. Această observaţie corespunde faptului că în fiecare punct de pe suprafaţa pământului există un câmp magnetic. Problema principală care se pune este de a măsura direcţia, intensitatea şi declinaţia acestui câmp magnetic.

Direcţia câmpului magnetic terestru are un mic unghi de deviaţie, faţă de planul meridian terestru. Acest unghi se numeşte *declinaţia D* a câmpului magnetic.

Intensitatea sau valoarea câmpului H variază după poziţia punctului respectiv la suprafaţa pământului. Ea este minimă la ecuator şi maximă la poli.

Inclinaţia I este unghiul pe care-l face direcţia câmpului cu planul orizontal. In general înclinaţia este vecină cu 0° la ecuator şi cu 90° la poli.

81. **Ipoteze asupra cauzei magnetismului terestru.** S'au formulat numeroase ipoteze pentru a explica magnetismul terestru. Nu s'a ajuns încă la o explicaţie definitivă şi unanim admisă a magnetismului terestru. Astfel Euler considera că el se datoreşte unui singur magnet terestru. Aceasta nu se poate susţine deoarece liniile de câmp egal nu sunt cercuri paralele. Ampère credea că magnetismul terestru s'ar datora unor curenţi telurici care ar circula în sol dela Est la Vest. Insă aceşti curenţi nu au putut fi puşi în evidenţă şi în plus cauza lor ar fi misterioasă. In orice caz se constată că magnetismul terestru suferă variaţii periodice, diurne şi anuale şi este în legătură cu activitatea solară. El ar putea fi produs de două cauze, dintre care una ar fi legată de activitatea solară — deci o cauză periodică — iar alta ar fi permanentă: mişcarea de rotaţie a pământului.

Intensitatea câmpului magnetic la Bucureşti. In 1900: $D = 4°\,19'$ V; $I = 58°47'$; $H = 0{,}231\,9$ CGSe.m.; în 1950: $D = 1°36',6$ E; $I = 61°\,03$; $H = 0{,}225$ CGSe.m.

82. **Legea fundamentală a inducţiei.** (formulare globală: legea lui Faraday). Intr'o spiră străbătută de un flux variabil Φ ia naştere o f.e.m. E:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt};$$

aceasta în oricare sistem coerent de unităţi în care unitatea de f.e.m. indusă într'o spiră este aceea indusă de un flux care variază continuu şi uniform cu unitatea de flux în unitatea de timp. Dacă E se măsoară în volţi, iar fluxul în maxwelli, atunci

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8}.$$

Tot globală este şi formularea lui Maxwell:

$$\oint \overline{E}\, d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B}\, \overline{n}\, dS,$$

în care conturul C limitează suprafaţa arbitrată S. In această formulare $\overline{E}$ este câmpul electric şi nu f.e.m. ca în formularea lui Faraday.

Formularea locală se deduce din expresia globală a lui Maxwell care, atât în regim clasic cât şi în regim raţionalizat, se scrie:

$$\text{rot}\, \overline{E} = \nabla \times \overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt}.$$

Sunt multe feluri în care se poate obţine o f.e.m. prin inducţie. Toate fenomenele de inducţie ascultă însă de:

83. **Principiul lui Lenz.** Sensul curentului indus este astfel încât fluxul pe care îl produce prin circuitul pe care îl parcurge tinde să se opună variaţiei de flux care i-a dat naştere.

Acest principiu al lui Lenz are însă o valabilitate mult mai generală şi se extinde la orice fenomene a căror succesiune implică şi un fenomen de inducţie şi care se enunţa sub forma:

Orice efect al unui fenomen de inducţie se opune cauzei care l-a produs. Astfel de efecte pot fi: f.e.m., forţe mecanice, viteze, curenţi, etc.

84. **Forţa electromotoare indusă în conductori în mişcare.** Intr'un element de conductor, de lungimea dl, care se deplasează cu viteza v, într'un câmp B, ia naştere o f.e.m. de o inducţie dE a cărei valoare se calculează din

$$dE = Bv\, dl \sin\theta \cos\alpha,$$

în care θ este unghiul $\widehat{Bdl}$ iar α unghiul dintre v şi normala la planul (B, dl). Sensul f.e.m. E este acela al înaintării unui burghiu, care s'ar învârti dela v spre B (fig. 35).

85. **Forţa electromotoare de autoinducţie** se manifestă în cazul curenţilor variabili, atunci când fluxul produs de ei străbate circuitele care l-au produs. Intrucât aceasta se întâmplă întotdeauna, rezultă că toate circuitele vor avea o f.e.m. de autoinducţie, în cazul curenţilor variabili, ceeace revine de fapt la mărirea aparentă a impedanţei circuitelor. Acest fenomen nu este supărător la frecvenţele industriale, dar poate deveni de nedorit în înalta frecvenţă.

Dacă se găsesc în prezenţă mai multe circuite, atunci, după cum s'a văzut mai sus, fluxul care parcurge un circuit este o funcţie liniară de toţi curenţii din sistem de forma:

$$\Phi = L_j i_j + \sum_k M_{jk} i_k.$$

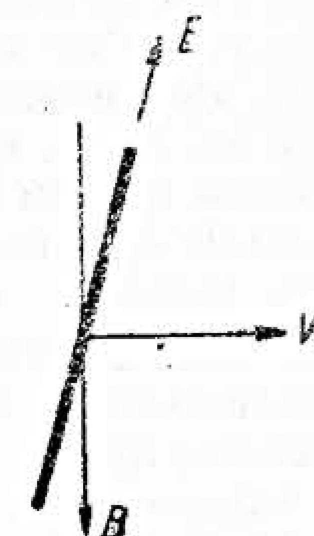


Fig. 35. — F.e.m. indusă într'un element de conductor.

F.e.m. de autoinducţie în circuitul j este:

$$E_j = -\frac{d(L_j i_j)}{dt} - \frac{d(\sum M_{jk} i_k)}{dt}.$$

Precum se vede în această formulă, în cazul circuitelor rigide, adică atunci când L şi M sunt constante, se poate scrie mai simplu:

$$E_j = -L_j \frac{di_j}{dt} - \sum_k M_{jk} \frac{di_k}{dt}.$$

Conform legii lui Lenz, f.e.m. E_j se opune variaţiei curentului care o produce.

86. **Regimul tranzitoriu al unui circuit** RL **supus în mod brusc la acţiunea unei f.e.m. constante** se obţine ţinând seama de prezenţa f.e.m. de autoinducţie. Dacă un circuit serie este supus brusc acţiunii unei surse de f.e.m. E, atunci în momentul iniţial curentul are valoarea zero, iar în cel final are valoarea de regim $I = E/R$. In circuit se produce deci o variaţie a curentului, deci o f.e.m. de autoinducţie.

Ecuaţia care descrie fenomenul este:

$$Ri = E - L\frac{di}{dt}$$

iar în timpul perioadei tranzitorii curentul este de forma:

$$i = \frac{R}{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

în care $\tau = \frac{L}{R}$ este de dimensiunea unui timp şi se numeşte *constanta de timp* a circuitului.

87. **Curenţii turbionari (Foucau't)** sunt pânze de curenţi care iau naştere în masa conducătorilor când aceştia sunt străbătuţi de un flux variabil, sau când ei se mişcă într'un câmp magnetic. Primul caz se întâlneşte de exemplu la transformatori, unde miezul este străbătut de fluxul care există în el. In interiorul tolelor iau atunci naştere astfel de curenţi închişi, răspândiţi în toată masa tolelor, care se numesc *curenţi turbionari*. Pentru a limita amplitudinea acestor curenţi, se măreşte rezistenţa electrică a materialului care constitue circuitele magnetice, divizându-l. Astfel, în joasă frecvenţă mediul magnetic, în loc să fie construit masiv, este format din tole izolate între ele, iar în înaltă frecvenţă din pulbere magnetică inclusă într'o masă inertă rău conducătoare. Curenţii turbionari (Foucault), împreună cu fenomenul histerezis, produc pierderi de putere şi energie în circuitele magnetice.

Un exemplu de curenţi turbionari produşi prin mişcarea unui conductor masiv într'un câmp magnetic se poate avea la mişcarea unui disc de cupru între polii unui magnet permanent. In disc iau naştere curenţi de inducţie, care conform legii lui Lenz, se opun cauzei care i-au produs, adică viteza de mişcare şi prin aceasta tind să frâneze mişcarea. Această proprietate se utilizează adesea la instrumentele de măsurat. De exemplu cuplul antagonist la contorii electrici se realizează prin astfel de curenţi.

88. **Efectul pelicular** este un alt exemplu de acţiune inductoare în masa conductorilor. Se va considera fenomenul stabilirii curentului într'un circuit de secţiune finită. In momentul iniţial curentul este zero în circuit şi apoi, spre a ajunge la valoarea de regim, el tinde să crească mai repede, sau mai încet, după valoarea lui L. Se poate considera circuitul real de secţiune finită ca fiind format din multe circuite elementare de secţiune foarte mică. Pentru a calcula inductanţa fiecărui circuit, trebue să se facă raportul dintre fluxul exterior şi curentul respectiv. Liniile de forţă ale câmpului respectiv sunt cercuri concentrice cu conductorul, atât în exterior cât şi în interior. Numărul de linii de forţă ale câmpului magnetic este maxim pentru liniile de curent din centrul secţiunii conductorului, şi minim pentru cele dela dela periferia conductorului. Se poate spune că inductanţa liniilor de curent dela centru este mai mare decât aceea a liniilor de la periferie. Intrucât L este mai mare pentru circuitele din vecinătatea axului conductorului, acolo curentul se va stabili foarte încet. In înalta frecvenţă, unde efectul inducţiei este foarte puternic, curentul atinge valori importante numai la periferia conductorului, de unde numele de *efect pelicular* (cunoscut şi cu numele de *efect Skin*).

Acest efect implică o micşorare a secţiunii utile a conductorului deoarece curentul circulă numai printr'o mică porţiune periferică. Deci rezistenţa aparentă a conductorului va creşte, iar inductanţa proprie va scade.

89. **Efectul Wilson.** Nu numai mişcarea conductorilor într'un câmp magnetic dă naştere unei f.e.m., deci unui câmp electric, ci şi mişcarea dielectricilor. Astfel, dacă un disc dintr'un material dielectric se roteşte între plăcile unui condensator, într'un câmp magnetic paralel cu plăcile condensatorului şi perpendicular pe axul discului, discul se polarizează şi plăcile condensatorului se încarcă electric. Fenomenul se poate explica prin teoria relativităţii speciale.

E. Electroenergetica

90. **Aspectul general energetic al fenomenelor electrice şi magnetice.** Indiferent de teoria considerată, pentru verificarea acestei teorii trebue făcute o serie de verificări experimentale, care în mod necesar implică calculul şi măsurarea forţelor care se exercită de către mărimile electrice, asupra corpurilor electrizate sau nu, asupra curenţilor, etc. Fenomenele electromagnetice nu formează un tot

exclusivist, ci sunt permanent influenţate de alte categorii de fenomene şi această interacţiune înseamnă: forţe mecanice, impulsuri, lucru mecanic şi energie. Fiind date legile electromagnetismului, se pot calcula efectele energetice produse de câmp, sarcini şi curenţi. Invers, dacă aspectul energetic este admis ca un aspect primar, se poate deduce legile eletromagnetismului din anumite considerente energetice. Metoda aceasta se poate aplica fie într'o concepţie locală diferenţială (calea desvoltată de Max Planck), fie într'o formă globală integrală; aceasta din urmă este calea prin care şi cercetătorii sovietici Sokolov şi Rummer au încercat să explice aspectele profunde ale electromagnetismului.

91. **Principiul conservării energiei** este principiul călăuzitor în toate cercetările ştiinţifice, deci şi în cele electromagnetice. Dealtfel Lomonosov a conceput de mult conservarea mişcării ca fiind un caz al unei legi fizice generale şi universale.

92. **Transformarea energiei electrice în energie calorică.** Se ştie că una dintre principalele manifestări ale unui curent electric este desvoltarea de căldură în conductorul respectiv. Acesta este un fenomen de transformare a energiei electrice în energie calorică, fenomen care se supune principiului conservării.

93. **Legea lui Joule-Lenz** dă expresia cantitativă a transformărilor electrocalorice. Ea se poate enunţa astfel: energia calorică desvoltată în timpul t, de trecerea unui curent i, printr'un corp de rezistenţă R este:

$$W = \int_0^t Ri^2dt = \int_0^t \frac{U^2}{R}\, dt = \int_0^t Uidt = \int_0^t UdQ$$

în care dQ este cantitatea de electricitate idt, ce trece prin diferenţa de potenţial U în intervalul de timp dt.

Când curentul rămâne tot timpul constant, iar rezistenţa corpului nu-şi schimbă valoarea prin energia calorică desvoltată, sau din altă cauză, atunci legea se scrie astfel:

$$W = RI^2t = \frac{U^2}{R}\, t = UQ.$$

Ultima formă arată că energia calorică provine din lucrul mecanic pe care îl fac sarcinile electrice pentru a străbate diferenţa de potenţial U ce există între bornele conductorului.

94. **Energia debitată de o sursă** se evaluează tot prin lucrul mecanic pe care îl efectuează sarcinile electrice trecând prin diferenţa de potenţial U care există între bornele sursei; deci:

$$W = \int_0^t Ui\, dt$$

Un caz important este acela al energiei pe care poate să o debiteze un acumulator. Dacă se notează cu U tensiunea — admisă constantă în timpul funcţionării — şi cu Ah capacitatea acumulatorului exprimată în amperiore, atunci energia totală pe care o poate debita acumulatorul este:

$$W = 3\,600\; U\,\text{Ah}$$

în care W este exprimat în Jouli.

95. **Surse electrice generatoare şi receptoare.** In cazul când curentul electric iese din sursă prin polul pozitiv şi intră prin polul negativ, expresia energiei electrice produse $W = \int_0^t Ui\, dt$ este pozitivă. Sursa, în acest caz, este *generatoare* de energie

electrică. In sursă se produce o transformare din energie chimică sau mecanică (după natura ei) în energie electrică.

In cazul însă când curentul electric iese din sursă prin polul negativ şi intră prin polul pozitiv, expresia energiei electrice produse $W = \int_0^t Ui\,dt$ este negativă. Sursa în acest caz este *receptoare* de energie electrică. In ea se produce o transformare inversă: din energie electrică în energie chimică sau mecanică (după natura ei).

O rezistenţă electrică este de fapt tot un dispozitiv receptor, care transformă energia electrică în energie calorică.

Toate aceste transformări energetice, indiferent de sensul lor, se supun principiului conservării.

96. **Bilanţul energetic al unei reţele conţinând rezistenţe.** Dacă o reţea închisă este formată numai din surse de curent continuu şi din rezistenţe pure, neinductive şi necapacitative, suma tuturor energiilor debitate de cele M surse se transformă în energie calorică:

$$\sum_{k=1}^{M} \int_0^T v_k\, i_k\, dt = \sum_{j=1}^{N} R_j\, I_j^2\, T,$$

în care R_j reprezintă rezistenţele celor N conductori, iar I_j curentul din conductori.

Dacă reţeaua conţine şi condensatori şi inductanţe, atunci în primul moment când se conectează sursele, înafară de energia calorică, mai apare o energie electrică de încărcare a condensatorilor şi una magnetică de creare a câmpului magnetic. După o perioadă de timp T_0 suficient de lungă, aceste regimuri tranzitorii dispar şi se poate din nou scrie

$$\sum_k \int_{T_0}^{T} v_k\, i_k\, dt = \sum_j R_j\, I_j^2\, (T - T_0)$$

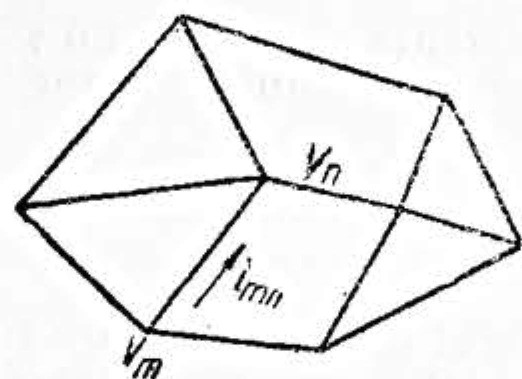


Fig. 36. — Bilanţul energetic într'o reţea.

97. **Bilanţul energetic sau principiul conservării într'o reţea electrică.** Prin aplicarea legilor lui Kirchhoff şi Joule-Lenz la o reţea oarecare, formată dintr'un număr de l laturi, se ajunge la concluzia că pentru întreaga reţea: (fig. 36);

$$\Sigma\,(v_m - v_n)\,(i_{mn}) = \Sigma p_{mn} = 0,$$

în care v_m şi v_n sunt potenţialele a două noduri adiacente;
i_{mn} — curentul între acele noduri;
p_{mn} — puterea desvoltată în latura de ordin mn.

Această expresie este o relaţie de conservare în interiorul unei reţele complecte. Termenii de puteri elementare p desvoltate în fiecare latură a reţelei sunt astfel unii pozitivi, alţii negativi. Unele din laturi sunt sediul unor *puteri generatoare* iar altele sediul unor *puteri receptoare*.

Aceeaşi relaţie se poate scrie pe aparate sau elemente de reţea sub forma:

$$\Sigma P_e = \Sigma P_a$$

n care P_e este puterea electrică emisă (generată) de anumite surse, pile, maşini generatoare, etc;
P_a — puterea electrică absorbită (receptată) de alte aparate, motoare, instalaţii electrochimice, conductori, etc.; sau sub forma generală

$$\Sigma P = 0,$$

în care P desemnează noţiunea de putere desvoltată, care poate fi *emisă* (P_e) de unele aparate sau elemente, şi se notează cu semnul (+) sau *absorbită* (P_a) de alte elemente şi se notează cu semnul (—). Suma se extinde asupra întregii reţele.

98. **Bilanţ energetic aplicat unei părţi închise a unei reţele.** Dintr'o reţea oarecare se desprinde o parte din ea printr'o secţiune Σ. (fig. 37)

In interiorul părţii considerate de reţea se produc sau se emit o serie de puteri ΣP_e şi se absorb sau se consumă alte puteri electrice ΣP_a. De asemenea acea parte considerată de reţea primeşte dela restul reţelei o putere:

$$P_i = v_1\, i_1 + v_2\, i_2 + \cdots = \Sigma\, v_n\, i_n\,.$$

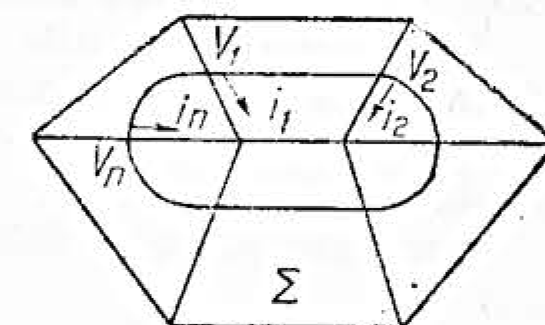


Fig. 37. — Bilanţul energetic aplicat la o parte închisă a unei reţele.

In consecinţă, bilanţul energetic la partea de reţea considerată se scrie în acest caz cu semnele lor algebrice astfel:

$$\Sigma v_n\, i_n + \Sigma P_e = \Sigma P_a\,.$$

99. **Energia câmpurilor magnetice produse de circuitele electrice**

α) *Energia primită de un circuit dela sursă.* Un circuit de rezistenţă R este aplicat unei f.e.m. având o valoare instantanee (momentană) e. In circuit se stabileşte un curent i, care la rândul său produce în spaţiul înconjurător un flux magnetic φ. Pentru generalitate, se consideră că e, i şi φ sunt variabile în perioada tranzitorie în care bilanţul energetic are forma:

$$\underset{(1)}{\int_0^t ei\,dt} = \underset{(2)}{\int_0^t Ri^2\, dt} + \underset{(3)}{\int_0^t i\, d\varphi},$$

în care (1) este energia primită dela sursă;
(2) — energia transformată în căldură prin efectul Joule-Lenz;
(3) — energia totală transmisă mediului magnetic înconjurător.

β) *Descompunerea energiei transmise mediului magnetic.* Se presupune că un conductor are o inductanţă variabilă l; energia totală transmisă mediului se descompune precum urmează:

$$\underset{(3)}{W = \int_0^t i\,d\varphi} = \underset{(3)'}{\left[\frac{1}{2}\, li^2\right]_0^t} + \underset{(3)''}{\int_0^t \frac{1}{2}\, i^2\, dl}.$$

în care (3)' este energia intrinsecă sau latentă, care rămâne înmagazinată în mediul magnetic (W_i);
(3)'' — energia transmisă tot mediului magnetic, dar care se poate transforma în lucru mecanic atunci când variaţia lui l este datorită deformării mecanice a circuitului sau variaţiei de permeabilitate produsă tot printr'o deplasare mecanică în mediul magnetic (W_m).

γ) *Caz particular: inductanţa conductorului este constantă având valoarea L.* In acest caz termenul (3)'' se anulează:

$$W_m = \int_0^t \frac{1}{2}\, i^2\, dl = 0.$$

Nu există transformări în lucru mecanic, iar toată energia transmisă mediului magnetic rămâne înmagazinată numai sub formă de energie intrinsecă:

$$W = \int_0^t i d\varphi = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\varphi = W_i,$$

în care I este valoarea finală de regim a curentului.

δ) *Cazul a n circuite în prezenţă.* Cele n circuite sunt alimentate de n surse cu f.e.m. $e_1, e_2 \ldots e_n$, rezistenţele şi inductanţele circuitelor fiind $R_1, R_2 \ldots R_n$ şi $l_1, l_2 \ldots l_n$. In plus, circuitele sunt legate două câte două prin câte o inductanţă mutuală notată prin m_{pq}.

Energiile primite dela cele n surse se scriu sub forma:

$$\underset{(1)}{\int_0^t \sum (e_n i_n dt)} = \underset{(2)}{\int_0^t \sum (R_n i_n^2 dt)} + \underset{(3)}{\int_0^t \sum (i_n d\varphi_n)}.$$

Energia transmisă mediului magnetic se descompune precum urmează:

$$W = \underset{(3)}{\int_0^t \sum (i_n d\varphi_n)} = \underset{(3)'}{\sum \left[\frac{1}{2} l_n i_n^2 + \sum m_{pq} i_p i_q\right]_0^t} +$$

$$+ \underset{(3)''}{\int_0^t \sum \frac{1}{2} i_n^2 dl_n + \int_0^t \sum (i_p i_q dm_{pq})}$$

în care termenii (1), (2), (3), (3)′, (3)″ au aceleaşi semnificaţii ca în cazul precedent.

η) *Cazuri particulare*

— Situaţia a două circuite în prezenţă:

(1) Energia dată de sursă:

$$\int_0^t (e_1 i_1 + e_2 i_2) dt;$$

(2) Energia transformată în căldură prin efectul Joule-Lenz;

$$\int_0^t (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt;$$

(3) Energia cedată mediului magnetic:

$$W = \int_0^t (i_1 d\varphi_1 + i_2 d\varphi_2);$$

(3)′ Energia intrinsecă a mediului magnetic:

$$W_i = \left[\frac{1}{2} l_1 i_1^2 + \frac{1}{2} l_2 i_2^2 + i_1 i_2 m\right]_0^t;$$

(3)″ Energia care se poate transforma în lucru mecanic, când l_1 şi l_2 variază prin deformarea mecanică a circuitelor, iar m prin variaţia poziţiei relative a celor două ciruite:

$$W_m = \int_0^t \left(\frac{1}{2} i_1^2 dl_1 + \frac{1}{2} i_2^2 dl_2 + i_1 i_2 dm\right).$$

— Cazul când inductanţele proprii sunt constante $l_1 = L_1$ şi $l_2 = L_2$ şi numai inductanţa mutuală m este variabilă:

(3)′ Energia intrinsecă a mediului:

$$W_i = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + m i_1 i_2.$$

(3)″ Energia care se poate transforma în lucru mecanic:

$$W_m = \int_0^t i_1 i_2 dm.$$

— Cazul când atât inductanţele proprii cât şi inductanţa mutuală M sunt constante.

Termenul (3)″ $W_m = 0$. Nu există transformări în lucru mecanic şi toată energia transmisă mediului rămâne localizată sub formă de energie intrinsecă în mediul magnetic:

$$W = \int_0^t (i_1 d\varphi_1 + i_2 d\varphi_2) = \frac{1}{2} I_1^2 L_1 + \frac{1}{2} I_2^2 L_2 + M I_1 I_2 = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Phi_2 = W_i$$

100. Sarcina electrică a unui condensator. Fie un condensator legat la o sursă de f.e.m. e, prin intermediul unui fir de o rezistenţă R. Tensiunea la bornele capacităţii este $u = e - Ri$, în care i este curentul de încărcare în perioada iniţială de stabilire a regimului (fig. 38).

Pentru generalitate, se va presupune că în perioada variabilă, e, i, u, sunt variabile. Deasemenea se va considera şi capacitatea C variabilă.

$dQ = d(Cu)$ este variaţia sarcinei electrice cu care se încarcă condensatorul.

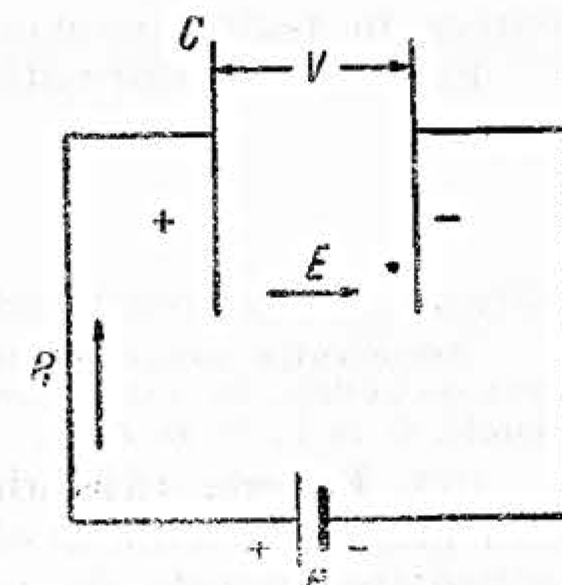


Fig. 38. — Energia câmpului electric *E*.

101. Bilanţul energiei produse de sursă

$$\underset{(1)}{\int_0^t ei\, dt} = \underset{(2)}{\int_0^t Ri^2 dt} + \underset{(3)}{\int_0^t u dQ}.$$

în care

(1) este energia primită dela sursă;

(2) — energia transformată în căldură în fir, prin efectul Joule-Lenz;

(3) — energia totală transmisă mediului format de câmpul electric.

102. Descompunerea energiei transmise mediului electric

$$W = \underset{(3)}{\int_0^t u dQ} = \underset{(3)'}{\left[\frac{1}{2} Cu^2\right]} + \underset{(3)''}{\int_0^t \frac{1}{2} u^2 dC}.$$

(3)′ — energia intrinsecă sau latentă care rămâne înmagazinată în mediul electric (W_i);

(3)″ — energia transmisă tot mediului electric, dar care se poate transforma în lucru mecanic, atunci când variaţia lui C este datorită deformării mecanice a condensatorului sau variaţiei de constantă dielectrică produsă tot printr'o deplasare mecanică în mediul dielectric (W_m).

Cazuri particulare: Capacitatea condensatorului este constantă având valoarea C:

Termenul (3)'' se anulează

$$W_m = \int_0^t \frac{1}{2} u^2 \, \mathrm{d}C = 0.$$

Nu se produc transformări în lucru mecanic şi toată energia transmisă mediului electric rămâne înmagazinată numai sub formă de energie intrinsecă:

$$W = \int_0^t u \mathrm{d}Q = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} QU = W_i$$

în care U este valoarea finală de regim a tensiunii dintre armăturile condensatorului.

— Capacitatea condensatorului C constantă şi f.e.m. e a sursei tot constantă şi egală cu E;

energia produsă de sursă:

$$\int_0^t Ei \, \mathrm{d}t = EQ;$$

energia intrinsecă a câmpului electric:

$$W_i = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} UQ = \frac{1}{2} EQ,$$

deoarece în regim permanent $E = U$.

Energia transformată în căldură în firul de legătură:

$$\int_0^t Ri^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} EQ,$$

oricare ar fi valoarea rezistenţei.

Observaţie asupra unităţilor. Toate relaţiile de mai sus sunt valabile în orice sistem coerent de unităţi. In sistem practic: e în V, i în A, R în Ω, φ în Weberi, L şi M în H, Q în Coulombi, C în F, W în Jouli.

103. **Energia câmpului de inducţie magnetică pe unitatea de volum.** Un mediu magnetic, sediu al câmpurilor H şi B, localizează o energie a cărei valoare specifică (pe unitate de volum) se exprimă prin:

în regim clasic $\quad W_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^B \overline{H} \mathrm{d}\overline{B} = \int_0^B \frac{\mathrm{d}B^2}{8\pi\mu}$;

în regim raţionalizat $\quad W_s = \int_0^B \overline{H}' \mathrm{d}\overline{B} = \int_0^B \frac{\mathrm{d}B^2}{2\mu'}$;

Caz particular: permeabilitatea μ independentă de B şi t.

în regim clasic $\quad W_s = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{HB}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$;

în regim raţionalizat $\quad W_s = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{H'B}{2} = \frac{\mu' H'^2}{2}$;

în sistem practic $\quad W_s = \frac{B^2}{8\pi \cdot 10^{-7} \mu_r}$.

(indiferent de regim)

în care W_s este energia pe unitate de volum (în sistem practic exprimată în Jouli/m³);

B, H, μ — câmpul de inducţie magnetică, câmpul magnetic şi permeabilitatea în punctul de energie specifică W_s;

μ_r — permeabilitatea relativă în acelaşi punct.

104. **Energia câmpului electric pe unitatea de volum** într'un anume punct al câmpului electric:

în regim clasic $\quad W_s = \varepsilon \frac{E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}$;

în regim raţionalizat $\quad W_s = \varepsilon' \frac{E^2}{2} = \frac{ED'}{2} = \frac{D'^2}{2\varepsilon'}$

în sistem practic $\quad W_s = \frac{\varepsilon_r}{9 \cdot 10^9} \frac{E^2}{8\pi}$

(indiferent de regim)

în care W_s este energia pe unitatea de volum (în sistem practic exprimată în Jouli/m³);

E — câmpul electric;

D — câmpul de inducţie electrică;

ε — constanta dielectrică;

ε_r — constanta dielectrică relativă.

105. **Lucrul mecanic efectuat prin deformarea unui circuit electric**, când inductanţa sa proprie variază cu $\mathrm{d}l$:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}W_m = \frac{1}{2} i^2 \, \mathrm{d}l.$$

106. **Lucrul mecanic efectuat, în cazul a două circuite în prezenţă**, prin deformarea şi deplasarea lor relativă:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}W_m = \frac{1}{2} i_1^2 \, \mathrm{d}l_1 + \frac{1}{2} i_2^2 \, \mathrm{d}l_2 + i_1 i_2 \, \mathrm{d}m;$$

în care $\mathrm{d}l_1$, $\mathrm{d}l_2$, $\mathrm{d}m$ sunt variaţiile inductanţelor proprii şi ale inductanţei mutuale prin aceste deformaţii elementare.

Când cele două circuite nu se deformează ci numai se deplasează relativ între ele, astfel încât să se producă o variaţie a inductanţei mutuale, lucrul mecanic efectuat este:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}W_m = i_1 i_2 \, \mathrm{d}m.$$

107. **Lucrul mecanic efectuat prin deplasarea infinit mică a unui circuit străbătut de un curent constant I**

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}W_m = I \left(\frac{1}{2} \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\Phi \right).$$

în care $\mathrm{d}\varphi$ este variaţia fluxului propriu al circuitului;

$\mathrm{d}\Phi$ — variaţia fluxului străbătând circuitul, dar provenind dinafară.

108. **Forţa de acţiune între două circuite paralele nedeformabile, coaxiale** (fig. 39)

$$F = I_1 I_2 \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}a},$$

în care I şi I_2 sunt intensităţile curenţilor — presupuşi constanţi — din cele două circuite;

$\frac{dm}{da}$ este derivata inducției mutuale a celor două circuite, în funcție de distanța dintre ele:
F — forța în direcția axei comune (fiind de atracție când I_1 și I_2 sunt de acelaşi sens și invers).



Fig. 39. — Forța dintre două circuite coaxiale.

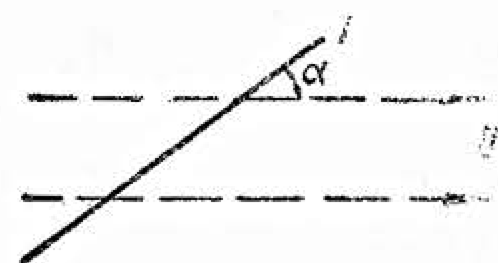


Fig. 40. — Cuplul la care este supus un circuit situat într'un câmp uniform.

109. **Cuplul la care este supusă o spiră plană situată într'un câmp uniform** (fig. 40)

$$M = IBS\cos\alpha,$$

în care B este câmpul de inducție magnetică, uniform;
I — curentul presupus constant ce parcurge spira;
S — suprafața constantă a circuitului;
α — unghiul dintre A și B.

Sensul lui M este astfel dirijat încât sub acțiunea sa circuitul se aşează normal pe B, astfel încât sensul lui I față de B să corespundă regulei burghiului.

Observație. Când în loc de o spiră este vorba de o bobină de w spire:

$$M = wIBS\cos\alpha.$$

110. **Forța de acțiune a unui circuit asupra unui corp feromagnetic situat pe axa circuitului** (fig. 41)

$$F = \frac{1}{2} I \frac{d\varphi}{da},$$

în care I este curentul constant din circuit;
$\frac{d\varphi}{da}$ — derivata fluxului străbătând circuitul în funcție de distanța a;
F — forță care se aplică asupra corpului feromagnetic, în sensul de a apropia corpul de circuit.

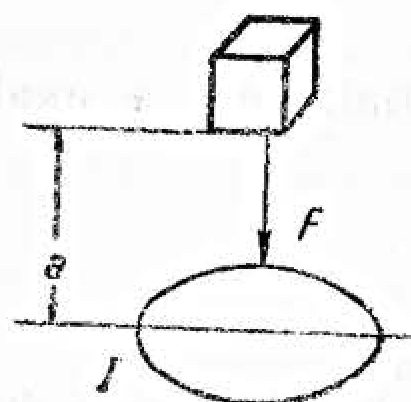


Fig. 41. — Forța pe care o exercită un circuit asupra unui corp feromagnetic.

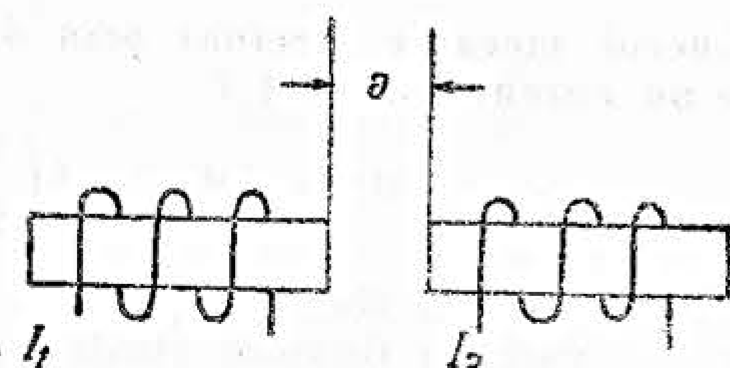


Fig. 42. — Forța dintre doi electromagneți coaxiali.

111. **Forța dintre doi electromagneți coaxiali** (fig. 42)

$$F = \frac{dW}{da} = \frac{1}{2} I_1^2 \frac{dl_1}{da} + \frac{1}{2} I_2^2 \frac{dl_2}{da} + I_1 I_2 \frac{dm}{da},$$

în care F este forța mecanică de acțiune între cei doi electromagneți;
l_1 și l_2 — inductanțele proprii ale celor două înfășurări;
I_1 și I_2 — curenții din cei doi electromagneți;
$\frac{dl_1}{da}$ și $\frac{dl_2}{da}$ — derivatele celor două inductanțe proprii în funcție de distanța a;
m — inductanța mutuală între cele două înfășurări;
$\frac{dm}{da}$ — derivata inductanței mutuale în funcție de distanța a.

112. **Forța la care este supus un element de conductor situat într'un câmp** B (fig. 43).

$$d\overline{F} = i\, d\overline{l} \times \overline{B} \text{ sau } dF = Bi\, dl \sin\theta,$$

în care dF este valoarea forței la care este supus elementul de conductor străbătut de curentul i;
B — câmpul de inducție magnetică în care se găsește elementul dl;
θ — unghiul $(\widehat{\overline{B}\, dl})$.

Direcția forței este normală pe planul $(\overline{B}, d\overline{l})$ cu sensul din figură, față de sensurile $\overline{B}$ și $d\overline{l}$; $\overline{i}$ și $\overline{dl}$ au acelaşi sens.

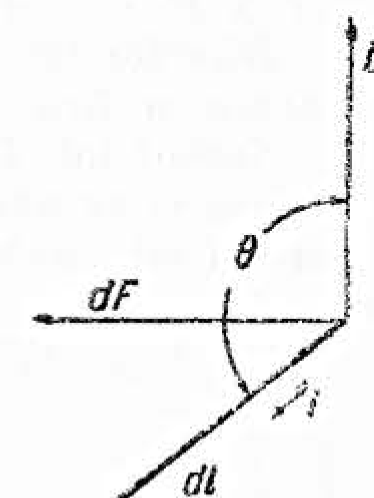


Fig. 43. — Forța care se exercită asupra unui element de conductor

113. **Forța asupra unui conductor liniar finit, străbătut de un curent** i;

$$\overline{F} = i\,\overline{l} \times \overline{B} \text{ sau } F = Bil\sin\theta,$$

cu aceleaşi semnificații, direcție și sens, ca în cazul precedent.

114. **Forța dintre doi curenți paraleli** (fig. 44)

$$F = 2\mu \frac{I_1 I_2}{a} l \quad \text{în regim clasic;}$$

$$F = \frac{\mu'}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} l \quad \text{în regim raționalizat;}$$

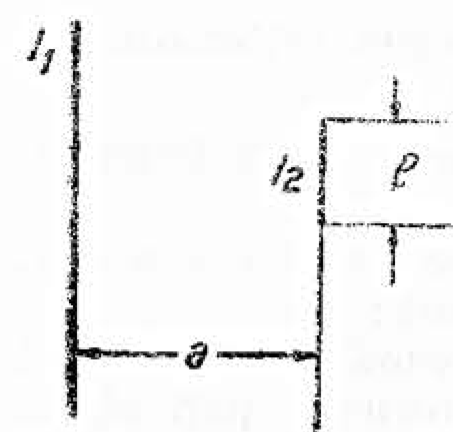


Fig. 44. — Forța dintre doi conductori paraleli.

în care F este forța având direcția normală pe cei doi curenți; sensul ei este de atracție dacă I_1 și I_2 sunt de acelaşi sens și invers;
I_1 — intensitatea unui curent liniar practic infinit;
I_2 — Intensitatea unui curent finit de o lungime l;
a — distanța dintre cei doi curenți;
μ (sau μ' în raționalizat) — permeabilitatea mediului presupus omogen:

Observație. In sistem practic formulele de mai sus devin independente de raționalizare, sub forma:

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \frac{I_1 I_2}{a} l$$

în care I_1 și I_2 în A; a și l în m,
μ_r — permeabilitatea relativă a mediului (în aer $\mu_r = 1$), iar F în newtoni.

115. **Principiul tensiunii și repulsiei liniilor de forță.** O deformare virtuală infinit de mică a unui sistem electromagnetic oarecare produce o variație a energiei câmpurilor magnetice, ca și cum ar fi datorită atât unor tensiuni T ale liniilor de

forţă, cât şi unor repulsii P ale aceloraşi linii de forţă, având valoarea

$$|T| = |P| = \int_0^B \frac{\mathrm{d}B^2}{8\pi\mu}, \quad \text{în regim clasic;}$$

$$|T| = |P| = \int_0^B \frac{\mathrm{d}B^2}{2\mu'}, \quad \text{în regim raţionalizat,}$$

în care B este câmpul de inducţie în punctul considerat de permeabilitate μ (respectiv μ' în raţionalizat);
T şi P — densităţi de forţă pe unitatea de suprafaţă.

Direcţia lui T este aceea a liniilor de forţă, iar direcţia lui P este normală pe aceea a liniilor de forţă.

Sensul lui T este astfel îndreptat, încât sub influenţa lui liniile de forţă ar fi întinse şi ar avea tendinţa naturală de a se scurta, iar pentru P ca şi cum sub influenţa lui liniile de forţă ar fi comprimate şi ar avea tendinţa naturală de a se respinge.

Dacă μ este independent de B (cum este de exemplu în aer) atunci:

$$|T| = |P| = \frac{B^2}{8\pi\mu}, \quad \text{în regim clasic;}$$

$$|T| = |P| = \frac{B^2}{2\mu'} \quad \text{în regim raţionalizat.}$$

116. **Forţa de atracţie dintre două jumătăţi ale unui tor, separate printr'un plan Σ conţinând axa sa, dar lipite între ele.** Torul este presupus de secţiune dreptunghiulară: (fig. 45):

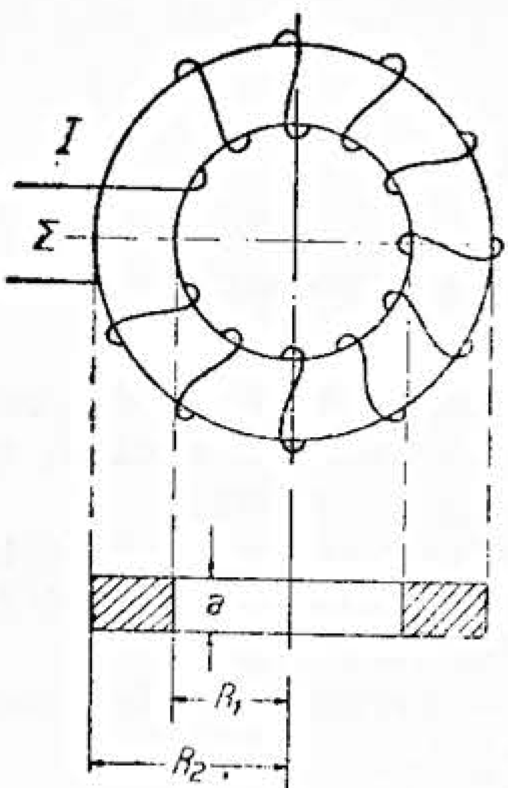


Fig. 45. — Forţa dintre două jumătăţi ale unui tor, separate printr'un plan Σ, conţinând axa sa.

$$F = \frac{w^2 I^2 a}{\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\mu_0 \mu_r^2 \quad \text{în regim clasic;}$$

$$F = \frac{w^2 I^2 a}{4\pi^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\mu_0' \mu_r^2 \quad \text{în regim raţionalizat.}$$

în care F este forţa totală dintre cele două jumătăţi de tor;
a — grosimea torului (paralelă cu axa sa);
w — numărul total de spire;
R_1 şi R_2 — raza minimă şi maximă a celor două laturi ale secţiunii torului, paralele la axă;
I — intensitatea curentului;
μ_r — permeabilitatea relativă, presupusă omogenă;
μ_0 — (respectiv μ_0' în raţionalizat) permeabilitatea aerului.

117. **Forţa de atracţie dintre două jumătăţi ale unui tor, separate printr'un plan Σ, conţinând axa sa, dar lipite între ele. Secţiunea este de o formă oarecare însă mică faţă de raza fibrei mediane**

$$F = \frac{w^2 I^2}{\pi R^2} S\mu_0 \mu_r^2, \quad \text{în regim clasic;} \qquad F = \frac{w^2 I^2}{4\pi^2 R^2} S\mu_0' \mu_r^2, \quad \text{în regim raţionalizat,}$$

în care S este secţiunea torului;
R — raza fibrei mediane;
F, w, I, μ_0, μ_r — aceleaşi semnificaţii ca mai sus.

118. **Forţa de atracţie a unui electromagnet cu cursă scurtă** (fig. 46)

$$F = 2\frac{B^2}{8\pi\mu_0} S = \frac{4\pi (wI)^2}{\left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{2e}{\mu_0 S}\right)^2 \mu_0} \times \frac{1}{S} \quad \text{în regim clasic;}$$

$$F = \frac{B^2}{\mu_0'} S = \frac{(wI)^2}{\left(\frac{l_1}{\mu_1' S_1} + \frac{l_2}{\mu_2' S_2} + \frac{2e}{\mu_0' S}\right)^2 \mu_0'} \times \frac{1}{S} \quad \text{în regim raţionalizat,}$$

în care F este forţa de atracţie totală a ambelor piese polare;
B — câmpul de inducţie în întrefier, presupus uniform;
w — numărul total de spire;
I — intensitatea curentului;
l_1, l_2, e — lungimile mediane ale circuitului magnetic în piesa polară, armătură, întrefier;
S_1, S_2, S — secţiunile străbătute de flux în piesa polară, armătură, întrefier;
μ_1, μ_2, μ_0 — permeabilităţile prespuse omogene în piesa polară, armătură, întrefier; aceasta în regim clasic; respectiv μ_1', μ_2', μ_0' în regim raţionalizat.

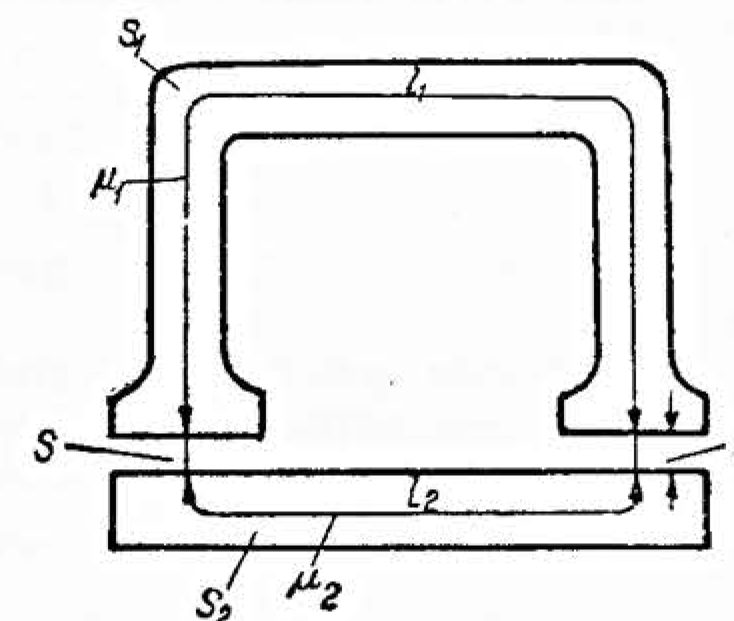


Fig. 46. — Forţa de atracţie a unui electromagnet cu cursă scurtă.

119. **Forţa de atracţie a unui electromagnet cu cursa lungă**

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}a}$$

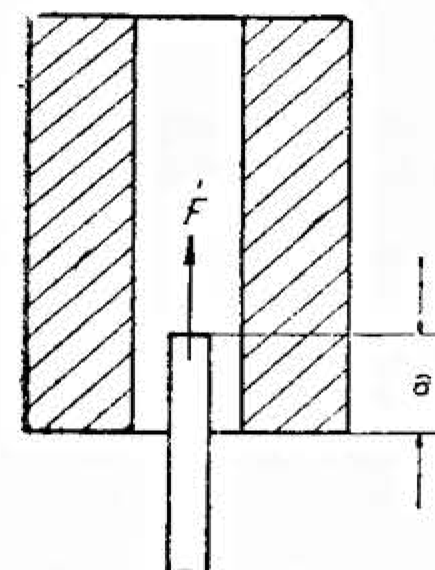


Fig. 47. — Forţa de atracţie a unui electromagnet cu cursă lungă.

în care F este forţa de atracţie pentru o anumită poziţie a piesei polare;
I — intensitatea curentului;
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}a}$ — derivata inductanţei proprii în raport cu distanţa a în acea poziţie (fig. 47).

120. **Bilanţ energetic electrodinamic.** Fie un circuit, care prin efectul depiasării sau deformării sale devine sediul unei desvoltări de energie electrică $\mathrm{d}W$ şi de energie mecanică $\mathrm{d}T$. Principiul conservării energiei aplicat acestui circuit conduce la identitatea

$$\mathrm{d}W + \mathrm{d}T = 0,$$

în care $\mathrm{d}W = e\,i\,\mathrm{d}t$, iar $\mathrm{d}T$ poate fi după cazuri:

$$\mathrm{d}T = \sum F v\,\mathrm{d}t,$$

când una sau mai multe elemente ale circuitului sunt supuse la câte o forţă F

şi se deplasează cu o viteză v; sau

$$dT = M\,\omega\,dt$$

când circuitul fiind supus unui cuplu M se roteşte cu viteza unghilară ω.

Dacă $dW > 0$ şi $dT < 0$, sistemul transformă energ.a mecanică în una electrică, el este deci *generator electric*.

Dacă $dW < 0$ şi $dT > 0$, sistemul transformă energia electrică în una mecanică, el este deci *receptor electric*.

121. Lucrul mecanic efectuat de un sistem condensator prin variaţia capacităţii

$$d\tau = dW = \frac{1}{2}\,U^2\,dC,$$

în care U este tensiunea condensatorului;
dC — variaţia capacităţii.

122. Forţa dintre armăturile unui condensator

$$F = \varepsilon\,\frac{U^2}{8\,\pi e^2}\,S \quad \text{în regim clasic;}$$

$$F = \varepsilon'\,\frac{U^2}{2\,e^2}\,S \quad \text{în regim raţionalizat}$$

în care:

e este grosimea dielectricului;
S — suprafaţa armăturilor;
ε — constanta dielectrică în regim clasic (ε' în regim raţionalizat).

Observaţie. In sistem practic, indiferent de raţionalizare:

$$F = \frac{\varepsilon_r}{9\cdot 10^9}\,\frac{U^2}{8\pi\,e^2}\,S$$

în care U în volţi, e în metri, S în m², F în newtoni.

123. Forţa de acţiune asupra unui corp străin într'un mediu dielectric (fig. 48).

$$F = \frac{1}{2}\,U^2\,\frac{dC}{da}$$

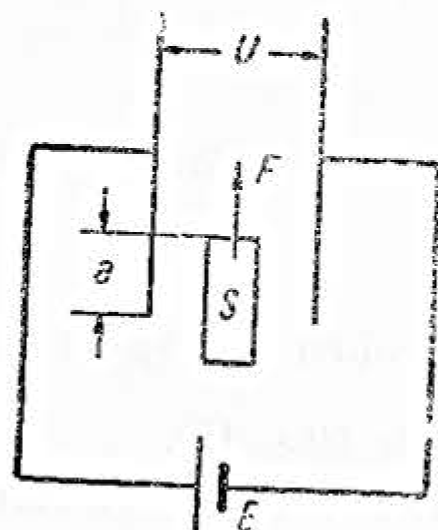


Fig. 48.— Forţa care acţionează asupra unui corp străin situat într'un mediu dielectric.

în care F este forţa pentru o anumită poziţie a corpului S;
U — tensiunea la bornele condensatorului;
$\frac{dC}{da}$ — derivata capacităţii în funcţie de distanţa a.

Observaţie. Când corpul S este un conductor sau un izolant de o constantă dielectrică proprie, superioară aceleia a mediului dielectric dintre plăci, $\frac{dC}{da} > 0$ şi F este o forţă de atracţie. Altfel F este de semn contrar, deci o forţă de repulsie.

Teoreme electroenergetice. α) Într'un sistem de conductori ficşi, cufundaţi într'o masă dielectrică, sarcinile electrice se distribue astfel pe suprafaţa conductorilor încât energia rezultantă a câmpului elctrostatic va fi minimă.

β) Un corp electrizat, introdus într'un mediu dielectric, nu poate rămâne în echilibru stabil numai sub acţiunea forţelor electrice.

γ) Introducerea unui corp conductor neîncărcat, în câmpul electrostatic al unor sarcini fixe, are drept rezultat micşorarea energiei totale intrinsece a câmpului, prin transformarea ei în lucru mecanic.

124. Aspectul energetic al fenomenelor histerezis şi Foucault. O inductanţă reală prezintă, în afara reactanţei sale şi pierderi, care se produc, o parte, în conductorul din care este făcută bobina, iar altă parte în miezul magnetic al bobinei. Acestea din urmă sunt pierderile prin efect histerzis şi Foucault. Ele se pot evalua echivalând inductanţa reală — cu pierderile — printr'o inductanţă ideală — fără pierderi — în serie cu trei rezistenţe: R_c, R_f şi R_h, reprezentând respectiv pierderile în cuprul înfăşurării, pierderile prin efect Foucault şi pierderile histerezis (fig. 49).

Pierderile prin histerezis sunt proporţionale cu suprafaţa unui ciclu histerezis, deoarece energia care corespunde acestor pierderi este, pentru un ciclu şi între corpul de volum V, egală cu:

$$W = \int_V dv \int \frac{\overline{H}\,d\overline{B}}{4\pi}.$$

Această energie este pierdută din energia câmpului magnetic, fiind disipată în căldură în fierul bobinei. La densităţi de flux destul de mici, piederile sunt proporţionale cu $B^{\cdot\cdot}$, iar la frecvenţe audio cu B_{κ}^{3}, B_{κ} reprezentând intensitatea maximă a lui B.

Pierderile prin histerezis depind de prezenţa unui curent continuu de presaturare, ca şi de prezenţa altor frecvenţe. Acest fapt devine important în telecomunicaţii.

Rezistenţa echivelantă serie a pierderilor prin efectul curenţilor turbionari (Foucault) se poate calcula cu formula:

$$R_f = 0{,}00658\,\frac{\delta^2}{\rho_1}\,\mu_r\,f X_L,$$

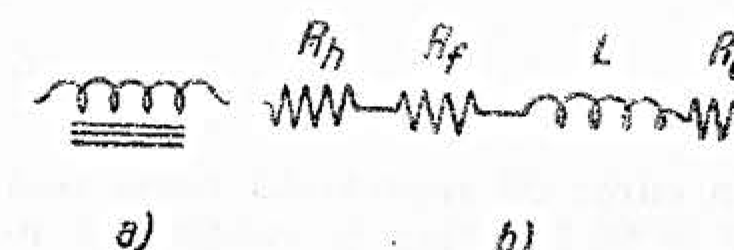


Fig. 49. — Pierderile în bobine: a — bobina reală cu pierderi; b — schema echivalentă.

în care δ este grosimea tolelor, în cm;
ρ_1 — rezistivitatea miezului, în micro-ohm-cm;
μ_r — permeabilitatea relativă a miezului corespunzând la densitatea de flux maximă produsă de magnetizare;
X_L — inductanţa bobinei cu miezul magnetic pus;
f — frecvenţa de lucru.

Pierderile prin fenomenul histerezis se calculează cu formula practică:

$$p_h = \sigma_h \left(\frac{f}{100}\right)\left(\frac{B}{1\,000}\right)^{\alpha}$$

în care

p_h este pierderea de putere în watt pe unitatea de masă;
σ_h — un coeficient depinzând de calitatea şi grosimea tolelor magnetice;
f — frecvenţa în Hz;
B — inductia magnetică în gauss;
α — un exponent empiric care se ia deobicei 1,6. După ultimile date, după L. M. Piotrovschi, se poate lua $\alpha = 0{,}9 + 0{,}95\,B$ unde B se exprimă în Wb/m².

Pierderile prin curenţi turbionari (Foucault) se calculează cu formula practică:

$$p_f = \sigma_f \left(\frac{f}{100}\right)\left(\frac{B}{1\,000}\right)^2$$

în care

p_f este pierderea de putere în watt pe unitatea de masă;
σ_f — un coeficient depinzând de grosimea şi calitatea tolei;
f şi B — aceleaşi semnificaţii ca mai sus.

F. Noțiuni de electrochimie teoretică

125. **Electrochimia** studiază schimburile dintre energia chimică și aceea electrică. Fenomenul de transformare a energiei chimice în energie electrică se produce în mod curent la pile; femonenul invers, de transformare a energiei electrice în energie chimică, se produce în diferiți electroliți.

126. **Electrolit** este corpul care suferă o acțiune chimică atunci când este parcurs de curentul electric. Exemplu; corp solid: iodura de argint; corp în stare lichidă: soluție de Na Cl sau NaCl topit.

127. **Electroliza** este fenomenul trecerii curentului electric printr'un electrolit (deobicei lichid). In această acțiune nu intră efectele chimice datorite energiei termice desvoltate de trecerea curentului prin soluție (efect Joule-Lenz).

128. **Conducția electrolitică**, adică trecerea curentului electric prin soluții, este însoțită de o deplasare a materiei prin soluție și de producerea unor reacții chimice la electrozi. Legea acestor fenomene a fost stabilită de Faraday.

129. **Legea lui Faraday.** Schimbările chimice produse de trecerea unui curent electric printr'o soluție sunt proporționale cu cantitatea de electricitate corespunzătoare trecerii curentului. Astfel, trecerea curentului I (măsurat în A) în timpul t (s), printr'o soluție metalică, face să se depună la catod o cantitate de G (g) din acel metal,

$$G = \frac{M\int_0^t idt}{Fz} = \frac{M}{zF}Q$$

în care: M reprezintă masa moleculară, z valența metalului, F este o constantă $F = 96\,500$, iar Q cantitatea de electricitate producând această descompunere și exprimată în Coulombi.

130. **Ipoteza ionică.** Scrisă sub forma:

$$Q = \int_0^t idt = \frac{Gz}{M} \times 96\,500 \text{ Coulombi},$$

legea lui Faraday poate fi interpretată în sensul că fiecare atom-gram dintr'o substanță monovalentă corespunde trecerii prin soluție a aceleiași cantități de electricitate, anume la 96500 C. Cum fiecare atom-gram dintr'o substanță oarecare conține același număr N de atomi (N este numărul lui Avogadro $N = 6{,}022 \times 10^{23}$) se poate considera că fiecare atom din cantitatea de substanță ajuns la catod contribue la cantitatea de electricitate totală care trece prin soluție, cu aceeași valoare, anume cu sarcina elementară:

$$e = \frac{96\,500}{N} = 1{,}602\cdot 10^{-20} \text{ unități CGSe.m. (sau ab C)} =$$

$$= 4{,}80\cdot 10^{-10} \text{ stat C} = \mathbf{1{,}602\cdot 10^{-19}}\text{C}.$$

Se poate spune că în fenomenul electrolitic, conducția se produce prin transportul de către materie a acestor sarcini electrice elementare. In acest gen de conducție, materia nu se mai prezintă în stare neutră, moleculele fiind disociate în atomi electrizați.

131. **Ionii** sunt atomii care au sarcini electrice și care produc conducția electrolitică. După felul sarcinii, se disting ioni pozitivi și ioni negativi. Un ion încărcat negativ se numește *anion*, deoarece se duce la electrodul pozitiv *(anod)*; un ion încărcat pozitiv se numește *cation*, deoarece se duce în soluție la *catod* (electrodul negativ) care îl atrage conform legii de atracție dintre electricitățile de semne contrarii.

Legea lui Faraday aplicată corpurilor polivalente arată că totdeauna ionii au sarcini care sunt multipli întregi ai sarcinii elementare e. Ionii se notează prin simbolul chimic al elementului sau radicalului din care provin, la care se adaugă ca exponent un număr de plusuri sau de minusuri corespunzând naturii sarcinii lor și numărului de sarcini elementare pe care le transportă.

Exemple. Na^+ reprezintă un cation de natriu având o sarcină elementară pozitivă, iar NO_3^- reprezintă un anion de amoniu cu o sarcină negativă $-e$; la fel se scrie Cu^{++} pentru cationul de cupru cu două sarcini $+e$.

132. **Punctul neutru al unei soluții** este punctul în care concentrația anionilor este egală cu a cationilor. Pentru apa la temperatura camerei (+ 18°C), această concentrație este de

$$[H^+] = 1.10^{-7} \text{ (gramioni pe litru).}$$

133. ***p*H-ul unei soluții** este logaritmul zecimal al concentrației de ioni de hidrogen din acea soluție. Logaritmul se ia cu semnul minus în față:

$$pH = -\log [H^+].$$

Această mărime este foarte importantă în biochimie și industrie, deoarece măsoară aciditatea sau bazicitatea soluțiilor. Dacă $pH < 7$ soluția este acidă, iar dacă $pH > 7$ soluția respectivă este bazică.

Exemplu. Sucul gastric al omului are o concentrație de ioni de hidrogen de $[H^+] = 1{,}7\cdot 10^{-2}$, ceeace corespunde la un $pH = -\log 1{,}7\cdot 10^{-2} = 1{,}77$ care este mai mic de 7, deci sucul gastric uman este acid.

134. **Teoria disociației.** In stare de soluție, substanțele sunt parțial disociate (ionizate). Aceasta rezultă din faptul că există conducție electrolitică dela diferențe de potențial foarte mici, spre deosebire de gaze, care în stare normală nu sunt ionizate și nu permit trecerea curentului la diferențe mici de potențial (v. subcap. H).

135. **Presiunea osmotică.** Introducând într'un vas cu apă un alt vas semipermeabil sau poros, închis ermetic și plin cu o soluție de ex. de zahăr de o concentrație cunoscută, se constată cu ajutorul unui manometru că presiunea din interiorul vasului poros crește, datorită moleculelor de apă care pătrund prin pori. Această presiune se numește presiune osmotică. Experimental se constată că între concentrația c a soluției, inversul acestei concentrații v, și presiunea osmotică p există relația:

$$\frac{p}{c} = pv = \text{const.}$$

Această lege seamănă foarte mult cu legea lui Boyle-Mariotte referitoare la gaze și, ca și această lege, se poate generaliza într'o formă corespunzând celei a lui Gay-Lyssac

$$PV = RT$$

în care R este o constantă, iar T temperatura absolută, anume:

$$p = cRT.$$

136. **Potențial electrolitic** La introducerea în apă a unei bucăți de zahăr, se constată că această bucată se disolvă. Aceasta se explică prin faptul că asupra bucății de zahăr se exercită o forță disolvantă P (fig. 50). Disolvarea unei noi bucăți se face mai greu și la un moment dat soluția se saturează; nu se mai poate disolva

zahăr în ea. Inseamnă că soluţia exercită o presiune osmotică p asupra corpului de disolvat, presiune îndreptată împotriva lui P. In soluţiile saturate $P = p$. Introducând în apă distilată un baston de zinc, se constată un fenomen deosebit: zincul nu se disolvă, dar emite în apă ioni pozitivi, care sunt supuşi acum unei forţe P_1. Plecarea ionilor din zinc este însoţită de o negativare a metalului. Ionii pleacă până în momentul în care presiunea osmotică p_1, plus forţa electrostatică e_1 dintre sarcina negativă a zincului şi aceea pozitivă a ionilor, echilibrează pe P_1. Acelaşi lucru se întâmplă dacă în loc să se introducă zincul în apă pură, se introduce într'o soluţie în care existau în prealabil ioni de Zn^{++}, cum ar fi de exemplu o soluţie de $ZnSO_4$. Aci însă forţa osmotică este mai mare, datorită ionilor existenţi în soluţie, deci la echilibru, forţa electrostatică e_1' va fi mai mică decât e_1.

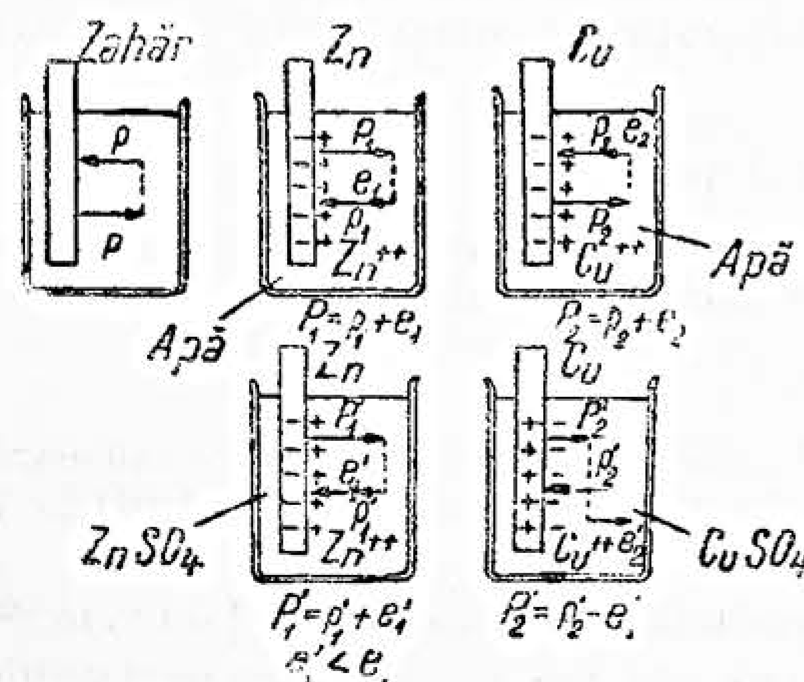


Fig. 50. — Potenţial electrolitic.

Introducând în apă un baston de Cu, şi el va emite ioni Cu^{++}. Aici însă echilibrul se va stabili la o valoare mică a lui p_2, deoarece cuprul aparţine metalelor cu presiune disolvantă mică.

Introducând cuprul într'o soluţie în care existau în prealabil ioni de cupru, de exemplu într'o soluţie de $CuSO_4$, lucrurile însă se inversează: presiunea osmotică p_2' a ionilor fiind mai mare decât forţa disolvantă P_2 a cuprului, în cupru vor intra ioni pozitivi şi metalul se va pozitiva, pe câtă vreme soluţia se va negativa (fig. 50).

Se vede deci că şi în cazul Zn şi în cazul Cu, forţele din soluţie sunt echilibrate de o forţă electrică e, care este diferenţa de potenţial dintre metal şi soluţie. Ea corespunde unei pături duble electrice şi provoacă apariţia curentului electric în circuitele conţinând sisteme chimice (pile).

Realizând un sistem chimic ca în fig. 51, la care în circuit există două pături duble electrice al căror efect se adună, se obţine o pilă electrică *).

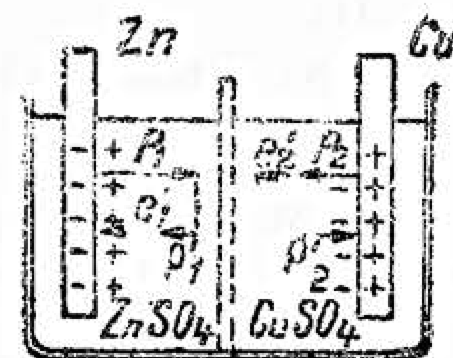


Fig. 51. — Pila Daniell.

137. **Valoarea potenţialului electrolitic** se calculează printr'o formulă analoagă celei care dă travaliul efectuat de o evoluţie a unui gaz perfect; astfel, travaliul efectuat de un gaz perfect se calculează cu formula:

$$A = RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

iar diferenţa de potenţial electrolitică se calculează cu formula:

$$e = \frac{8{,}31\,T}{zF} \ln \frac{P}{p},$$

în care p este presiunea osmotică a ionilor, iar P — presiunea disolvantă.

138. **Pilele de concentraţie** se obţin cufundând doi electrozi din acelaşi metal, în două soluţii din săruri ale aceluiaşi metal, soluţiile având concentraţiile diferite c_1 şi c_2. Se obţine o f.e.m. e dată de formula:

$$e = \frac{RT}{zF} \ln \frac{c_1}{c_2}.$$

*) De notat ca o contribuţie ştiinţifică românească teoria originală asupra pilelor, desvoltată de inginerul Prof. N. Vasilescu-Karpen.

139. **Pila cu gaz.** O astfel de pilă are aspectul din fig. 52. Intr'o soluţie de H_2SO_4 se cufundă doi electrozi de platină, care sunt înconjuraţi de câte un clopot de sticlă cuprinzând unul hidrogen gazos, iar celălalt oxigen gazos. Gazul acţionează şi el ca un electrod, în sensul că hidrogenul trimite în soluţie ioni pozitivi de hidrogen, iar oxigenul trimite ioni negativi de oxigen. In felul acesta electrozii se electrizează şi se obţin cele două pături duble necesare. In soluţie ionii de H şi cei de O se combină, dând o moleculă de apă.

In circuitul exterior al pilei circulă un curent de la electrodul de oxigen la electrodul de hidrogen, până când tot hidrogenul gazos este oxidat. F.e.m. a unei astfel de pile este de 1,08 V.

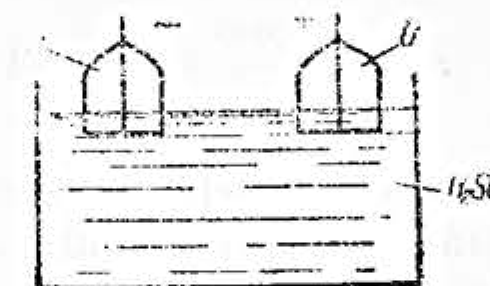


Fig. 52. — Pilă cu gaz.

140. **Polarizarea electrozilor.** La pile, înafara procesului de formare a păturilor duble, se mai produce un fenomen de electroliză a apei din soluţie. Apar astfel la catod atomi de hidrogen şi la anod atomi de oxigen gazos. Aceste gaze au o presiune prea mică, astfel încât nu pot ieşi în atmosferă, ci rămân în jurul electrozilor primei pile, formând o pilă gazoasă în interiorul ei. Această pilă gazoasă are polaritatea inversă celei a primei pile, astfel încât tensiunea la bornele pilei, ca şi forţa ei electromotoare, scade.

Acest efect de polarizare se combate introducând în pilă, în jurul electrozilor, substanţe speciale care absorb gazele desvoltate. Aceste substanţe se numesc depolarizanţi.

141. **Aspectul energetic al fenomenelor electrochimice.** Energia electrică desvoltată de pilele chimice nu este o energie care să apară din nimic, ci este transformarea în energie electrică a energiei chimice a substanţelor din pilă. Energia chimică pe care o posedă sistemul chimic pe care îl formează pila la sfârşitul funcţionării ei este egală cu energia chimică pe care o avea la începutul funcţionării, minus energia electrică debitată şi minus energia calorică disipată prin trecerea curentului electric prin pilă.

Fenomenul electrochimic al unei pile generatoare este de fapt echivalent cu un fenomen chimic exotermic.

Intr'o reacţie chimică exotermică obişnuită, fenomenul se produce cu o desvoltare de energie sub formă de căldură, pe când pila este astfel construită încât aceeaşi reacţie să desvolte energia corespunzătoare naturii exotermice, sub formă de energie electrică, în loc de căldură. Energiile desvoltate în cele două cazuri sunt însă egale, în baza principiului conservării.

G. Noţiuni de electronică

142. **Impasul teoriei câmpului.** Teoria câmpului maxwellian putea descrie foarte just fenomenele electromagnetice din vid; în ce priveşte stările electrice ale corpurilor materiale, era necesar să se introducă pentru fiecare corp o serie de constante: conductibilitate electrică, permeabilitate, constantă dielectrică. Aceste «constante» trebue determinate experimental. Se constată însă că de fapt aceste mărimi, introduse pentru a se ţine seama de prezenţa materiei, nu sunt constante, ele având valori diferite după cum câmpul variază lent sau rapid.

Această multiplicitate de pseudo-constante complică foarte mult teoria clasică a câmpului electromagnetic şi îi scade valoarea; această teorie este în fond incapabilă de a explica numai prin mărimi de câmp, întreaga gamă a fenomenelor electromagnetice. Este şi natural să fie astfel deoarece ea consideră materia dintr'un punct de vedere macroscopic, fără a ţine seama de constituţia ei, care nu este

continuă astfel cum o presupune teoria câmpului, ci discontinuă, materia fiind formată din molecule şi atomi.

143. **Sarcina electrică elementară.** Din cele expuse în paragrafele 129 şi 130 reese că fiecare ion monovalent are aceeaşi sarcină electrică, anume:

$$e = \frac{96\,500}{N} = 1{,}60\cdot10^{-19}\ \text{C} = 4{,}80\cdot10^{-10}\ \text{unităţi electrostatice (sau stat C).}$$

Deci sarcina electrică, cel puţin în electroliză, este divizată atomistic. Nenumărate alte experienţe au arătat că totdeauna sarcina electrică este un multiplu întreg al sarcinii elementare e, (experienţele lui Millikan, cu căderea unei mici picături încărcate, între plăcile unui condensator; experienţe indirecte prin determinarea lui N, etc.). Toate aceste experienţe au arătat că, legată de atomi, electricitatea se prezintă sub forma unor sarcini elementare de valoare e.

O altă serie de experienţe au pus în evidenţă faptul că există particule mai mici decât atomul. Astfel este de exemplu cazul particulelor ce constitue razele β. Se poate anume pune în evidenţă că în acest caz ca şi în cel al razelor canal, sarcina electrică e transportată de raze este liberă, în sensul că, de data aceasta, masa materială care poartă pe e este foarte mică în raport cu masa celui mai uşor atom. Măsurând şi sarcina electrică a acestor sarcini « libere », se constată că este totdeauna un multiplu exact al lui e. Trebue astfel admis că sarcina electrică este totdeauna formată dintr'un număr de cuante e. Deoarece în aceste experienţe sarcina liberă negativă este solidară cu o masă inerţială m, s'a putut trage concluzia că de fapt în toate aceste experienţe se are de a face cu o particulă elementară, mai mică decât atomul, care a fost numită *electron*. S'a pus deci în evidenţă o particulă din constituţia atomului.

Existenţa electronului constitue un nou impas al teoriei câmpului, pentru care sarcina electrică ar fi continuă şi s'ar putea diviza oricât de mult.

In cele ce urmează se va merge pe două căi. Mai întâi se va studia comportarea electronului în teoria clasică, adică se va studia mişcarea lui într'un câmp electromagnetic exterior. După aceasta se va studia teoria electronică propriu zisă.

144. **Curentul de convecţie.** Corpurile electrizate în mişcare produc un transport de electricitate prin convecţie. După cum curentul de conducţie transportă o cantitate de electricitate, tot astfel, în cazul convecţiei, mişcarea sarcinilor reprezintă tot un curent electric. Acest curent se numeşte « de convecţie ». In teoria maxwelliană s'a admis în mod natural că acest curent nu produce efecte calorice, dar produce efecte magnetice. Efectele magnetice sunt teoretic egale cu acele produse de un curent de conducţie de densitate $\bar{J}$:

$$\bar{J} = \rho\,\bar{v}$$

în care ρ este densitatea de volum a sarcinii electrice în mişcare, iar v viteza sarcinii.

Această ipoteză a efectului magnetic al curenţilor de convecţie a fost supusă experienţei în 1876 de Rowland. Rezultatele experienţei nu au constituit însă o verificare suficientă a teoriei. Experienţele care au verificat exact teoria din punct de vedere cantitativ sunt acelea ale savantului rus Eichenwald (1903) şi ale prof. N. Vasilescu-Karpen (1903).

Mai târziu, în teoria electronilor s'a considerat şi curentul de conducţie ca fiind tot un curent de convecţie şi anume produs de mişcarea electronilor în metal.

In anul 1911 Joffe a arătat că şi razele catodice, adică electronii liberi în mişcare, produc în jurul lor un câmp magnetic, ca orice curent de convecţie.

145. **Mişcarea unui electron într'un câmp electrostatic** se determină rezolvând ecuaţia lui Newton pentru o particulă de masă m ($m = 9{,}116\cdot10^{-28}$ g) supusă la o forţă $F = e\,E$ (potrivit legii lui Coulomb).

Acest caz se întâlneşte în mod curent la osciloscoapele catodice cu deflecţie electrostatică. Acolo, un fascicol subţire de electroni intră cu viteza v între plăcile unui condensator C, plăci între care există un câmp electric E, sub acţiunea căruia electronul suferă o deviaţie dela direcţia sa iniţială OX şi ajunge pe ecranul oscilografului în K. Cu notaţia din fig. 52 bis:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e\,E\,a}{mv^2},\quad h = \frac{e\,E\,a}{mv^2}\left(l + \frac{a}{2}\right).$$

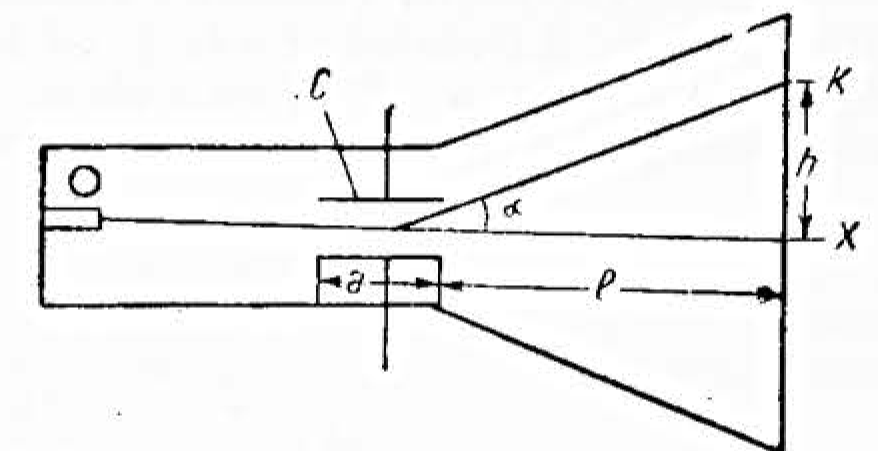


Fig. 52 bis. — Deviaţia electronilor într'un câmp electrostatic.

146. **Mişcarea electronului într'un câmp magnetic.** Un electron în repaus nu suferă nicio solicitare din partea unui câmp magnetic. Dacă însă electronul este în mişcare, el este echivalent cu un curent de convecţie şi intră în interacţiune cu câmpurile magnetice.

Electronul în mişcare este echivalent cu un curent de convecţie de intensitate i, satisfăcând condiţia

$$i\,\Delta\bar{l} = e\,\bar{v}$$

în care $\Delta\,l$ este distanţa pe care electronul o parcurge cu viteza $v = \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$ în timpul Δt.

Asupra unui electron în mişcare cu viteza v se va exercita deci o forţă datorită câmpului magnetic H:

$$\bar{f} = e\,\bar{v} \times \bar{H}\,\mu_0$$

Ecuaţiile mişcării electronului devin (câmpul H paralel cu axa z):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = e\frac{dy}{dt}H\mu_0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -e\frac{dx}{dt}H\mu_0,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Soluţia sistemului este următoarea: mişcarea electronilor într'un câmp magnetic omogen şi constant se produce pe o elice cilindrică circulară având axa paralelă cu H. Raza cercului este R, iar viteza unghiulară, constantă, este ω:

$$R = \frac{vm}{eH\mu_0}\ ;\quad \omega = \frac{eH}{m}\mu_0.$$

Mişcarea electronului în direcţia câmpului nu este afectată de câmp.

147. **Teoria clasică a electronilor** consideră electricitatea ca având o structură granulară ca şi materia ponderabilă, care este considerată ca fiind formată dintr'un număr foarte mare de particule elementare purtând sarcini electrice. Se ştie de altminteri că experienţa a pus în evidenţă existenţa electronilor şi a protonilor.

Teoria electronilor consideră corpuri conducătoare acelea în care electronii au o libertate suficientă pentru a putea avea o mişcare de ansamblu, sub influenţa unui câmp electric.

Corpurile rău conducătoare — dielectricii — sunt acele corpuri în care electronii sunt legaţi de poziţia de echilibru şi nu pot avea decât o mişcare de oscilare în jurul acestei poziţii.

Teoria clasică a electronilor îşi propune să regăsească toate faptele electromagnetice experimentale, plecând numai dela sarcinile electrice experimentale şi dela câmpul electromagnetic creat de aceste sarcini în vidul interatomic.

Acest program a fost propus de H. A. Lorentz. Teoria se numeşte clasică de oarece admite că procesele microscopice, interelectronice, se pot descrie în termeni macroscopici şi că la această scară microscopică, starea electronilor poate fi univoc determinată în spaţiu şi timp.

Ecuaţiile teoriei electronice clasice. Lorentz a desvoltat teoria admiţând că electronii au dimensiuni finite şi că în interiorul lor se poate defini o densitate finită de sarcină, ρ. El a scris atunci ecuaţiile exprimând relaţiile dintre câmpul electromagnetic şi electroni sub forma

$$\operatorname{rot} \bar{h} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + 4\pi\rho\,\bar{v}\right), \quad \operatorname{div} \bar{h} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \bar{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{e} = 4\pi\rho,$$

$\bar{e}$ şi $\bar{h}$ fiind câmpul electric, respectiv cel magnetic, ρ densitatea microscopică de sarcină, iar $\bar{v}$ vitesa electronilor.

Este de notat că în ecuaţiile lui Maxwell intervine altă densitate de sarcină, şi anume cea macroscopică medie, a unui corp conţinând un număr imens de sarcini elementare.

La aceste ecuaţii trebue să se mai adauge ecuaţia suplimentară ce exprimă forţa mecanică exercitată de un câmp asupra unei sarcini q animate de viteza v:

$$\bar{f} = q\left[\bar{e} + \frac{1}{c}\bar{v} \times \bar{h}\right].$$

Ecuaţiile teoriei electronilor s'au scris mai sus în sistemul Gauss, în care în vid $\mu = \mu_0 = 1$ şi $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$ ambele mărimi fiind fără dimensii, ceeace permite a scrie că în vid $E = D$ şi $B = H$.

148. Observaţii generale asupra teoriei electronilor. Atunci când se consideră un corp material conţinând un mare număr de sarcini elementare de acelaş semn (ceeace numim în mod curent corp încărcat) sau un corp conţinând electroni ce au o mişcare de ansamblu (corp parcurs de un curent electric), ecuaţiile lui Lorentz conduc la ecuaţii macroscopice de aceeaş formă cu ecuaţiile lui Maxwell. Aceasta era desigur necesar pentruca teoria lui Lorentz să fie acceptabilă.

In ceea ce priveşte teoria relativităţii, ea nu a dăunat cu nimic teoriei electronilor, care s'a adaptat la forma relativistă. S'a verificat astfel de ex. experimental variaţia masei electronului cu viteza.

Dificultăţi a întâmpinat teoria electronilor în explicarea faptului că deşi electronii au o rază finită de ordinul lui 10^{-13} cm şi conţin electricitate de acelaş semn, pot să rămână în echilibru, fără a exploda.

De asemenea, ecuaţiile lui Lorentz conduc pentru fenomenele electromagnetice din vid la ecuaţii de tipul ecuaţiei undelor, deci prevăd o propagare continuă a energiei electromagnetice. Ori se ştie că corpurile emit şi absorb energie numai sub formă de cuante.

Teoria clasică electronică nu poate explica nici fenomenul Zeeman anomal, nici existenţa fotonilor, nici mai ales existenţa stărilor staţionare a electronilor din interiorul atomului. După teoria clasică, electronii în atom se mişcă pe traectorii închise, deci sunt supuşi unor acceleraţii centripete, deci ar trebui încontinuu să radieze, ceeace ar face ca energia lor să scadă repede spre zero, emiţând energie

radiantă. Ori se constată că electronii nu radiază energie decât atunci când trec dela un nivel stabil de energie, la alt nivel stabil.

Actualmente teoria care explică cel mai bine fenomenele electromagnetice în ansamblul lor, este teoria cuantică a câmpului.

149. Câmpul unui electron care se mişcă uniform şi încet. Mişcarea electronului produce un câmp magnetic care îl supune la o frânare. Deşi teoria nu a introdus o masă inerţială a electronului, această decelerare a electronului este similară cu inerţia pe care o oferă masa materială la acţiunea forţelor. Se poate introduce deci o masă electromagnetică, a cărei valoare este:

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{R^2},$$

R fiind raza electronului presupus sferic. Egalând această expresie cu o valoare determinată experimental pentru masa electronului, rezultă că raza electronului este de $1{,}9 \; 10^{-13}$ cm.

150. Mişcarea electronului cu viteze comparabile cu viteza luminii pune în evidenţă două mase: aceea transversală şi aceea longitudinală. Valorile lor sunt:

$$\text{masa longitudinală } m_l = \frac{m}{(\sqrt{1-\beta^2})^3};$$

$$\text{masa transversală } m_t = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

în care m este masa de repaus a electronului, pusă în evidenţă prin metode pur electromagnetice, la mişcările lente ale electronilor.

151. Câmpul produs de electronii în mişcare constă în doi termeni distincţi:

— unul este câmpul static compus din doi termeni: câmpul electrostatic produs de sarcina electronului şi câmpul magnetic produs de curentul de convecţie (ultimul proporţional cu viteza electronului);

— a doua componentă a câmpului are caracterul unei unde electromagnetice, apare numai atunci când electronul îşi variază viteza. La distanţe mari de electron, câmpul care predomină este cel radiant, adică cel care are caracterul de undă.

152. Aplicaţiile teoriei electronice sunt numeroase în ştiinţă. Ea permite înţelegerea a numeroase fenomene microscopice, cum ar fi efectul Schottky, efectul Hall, efectul Peltier, ca şi unele legi macroscopice, cum ar fi legea Wiedeman-Franz. De asemeni a permis prevederea efectului Zeeman şi explicarea dispersiei luminii.

153. Efectul Schottky îşi are fundamentul în structura cuantică a electricităţii. El constă în faptul că un curent emis de catodul unei diode nu poate fi continuu, deoarece el este de fapt produs de circulaţia electronilor între catod şi anod. Dacă electronii ar fi emişi în mod regulat, atunci se poate calcula că pentru un curent de 1 mA perioada de timp dintre sosirile a doi electroni succesivi ar fi de circa 10^{-16} s.

Aceasta ar corespunde unei modulări a curentului de 1 mA, cu o frecvenţă înaltă, de ordinul lui 10^{16} Hz, adică în spectrul ultraviolet, frecvenţă care nu ar deranja funcţionarea tuburilor electronice. In realitate însă electronii sosesc la anod în mod statistic, astfel încât curentul este modulat cu un spectru continuu de frecvenţe, ceeace produce un sgomot de fond care poate fi pus în evidenţă şi care în general limitează câştigul amplificatorilor cu tuburi electronice.

Ceeace se numeşte în mod uzual *curent continuu* este de fapt media unui curent ondulator datorit deplasărilor discontinue, cu caracter statistic ale electronilor.

154. **Efectul Hall** este un fenomen care pledează puternic în sprijinul teoriei electronice, deoarece teoria permite calcularea anumitor coeficienţi, care se pot determina şi experimental, verificând şi confirmând astfel teoria.

Fie o placă metalică de grosimea a şi lăţimea b; ea este parcursă în lungul ei de un curent I. Dacă se produce un câmp magnetic H paralel cu a, deci perpendicular pe placă, atunci între muchiile 12 şi 34 se constată apariţia unei diferenţe de potenţial:

$$V = Eb = R\frac{HI}{a}$$

în care constanta R se numeşte cons'anta Hall şi se poate calcula teoretic pe baza teoriei electronilor, obţinându-se aceeaşi valoare cu aceea determinată experimental.

Este de notat totuşi, că unele substanţe (Fe, Co, Zn, Cd, Pb) au un coeficient Hall de semn contrar celorlalte metale, ceeace este cu totul inexplicabil prin teoria electronică şi este explicabil numai prin teoria cuantică.

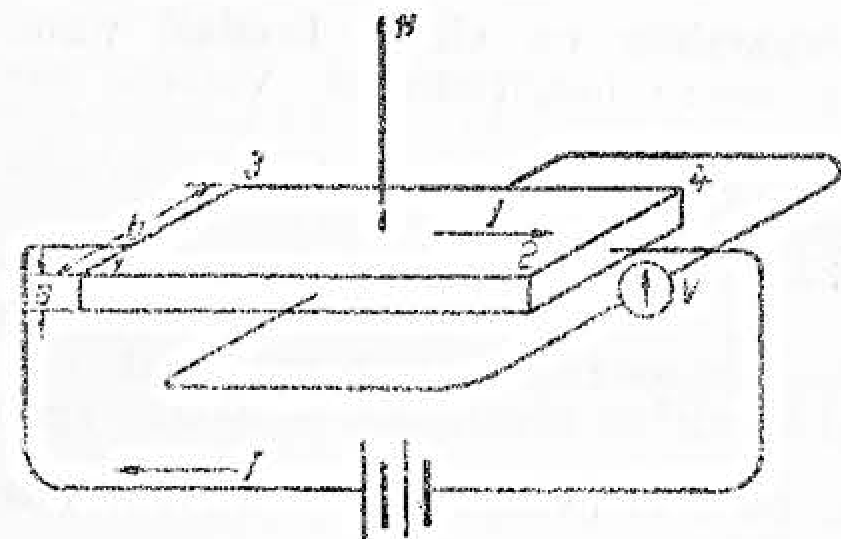


Fig. 53. — Efectul Hall.

155. **Electronii în metale.** Efectele descrise mai sus pledează pentru a arăta natura electronică şi a curentului de conducţie din metale. Suntem astfel conduşi a reprezenta metalele ca o reţea formată din ioni pozitivi, ioni care se află în repaus şi din electroni liberi, care se agită haotic în interiorul metalului. Curentul de conducţie este rezultatul orientării parţiale a acestei mişcări haotice. Intrucât forţa la care sunt supuşi electronii este proporţională cu E, deci cu V, şi efectul, adică curentul, va fi proporţional cu V: se regăseşte şi se explică legea lui Ohm. Se poate explica şi căldura desvoltată prin efectul Joule-Lenz, ca fiind lucrul mecanic efectuat de câmp pentru mişcarea electronilor.

Pentru ca fenomenul să poată fi studiat cantitativ, electronii din metal trebue imaginaţi ca fiind similari cu moleculele unui gaz. Se introduc astfel noţiunile de: drum mediu liber între două ciocniri, viteză a electronilor, număr de electroni pe cm³. Intre electronii din metale şi moleculele unui gaz există însă o deosebire fundamentală: pe câtă vreme moleculele unui gaz au vitezele repartizate statistic după legea lui Boltzmann, electronii în metale ascultă de statistica lui Fermi.

Pe baza acestor teorii electronice, curentul într'un conductor poate fi considerat că are o expresie de forma $I = NSev$ în care N este numărul de electroni liberi pe unitatea de volum, S secţiunea conductorului, v viteza medie a electronilor care iau parte la conducţiune şi e sarcina unui electron.

H. Fenomene electrice în vid şi gaze

156. **Conducţia electrică în vidul înaintat.** Vidul este singurul izolant perfect. Totuşi se poate obţine trecerea unui curent electric prin vid, datorită trecerii electronilor, ceeace reprezintă un curent de convecţie. Electronii pot fi emişi termoionic sau fotoelectric de către catod; ei se îndreaptă spre anod. Energia acestor electroni se măsoară deobicei în electroni-volţi (simbol eV): un electron-volt este

energia care corespunde trecerii unui electron print'o diferenţă de potenţial de un volt.

157. **Emisia electronilor din catod.** La trecerea electronilor din metal în vacuum trebue să se efectueze un lucru mecanic de extragere a electronilor din metal. Energia necesară efectuării acestui lucru mecanic provine fie din energia calorică dată catodului — emisie termionică — fie din energia cinetică a altor electroni — emisie secundară — fie — în cazul efectului fotoelectric — din energia luminoasă dată catodului fie din alte surse. Intensitatea curentului de emisie ascultă în cazul emisiei termionice, de legea:

$$i = AT^2\, e^{-\frac{B}{T}} \ [\mathrm{A/m^2}],$$

în care A şi B sunt constante care depind de natura metalului, T — temperatura absolută a catodului, e — baza logaritmilor neperieni.

158. **Dependenţa emisiei de intensitatea câmpului.** Lucrul de extracţie scade la intensităţi mari ale câmpului în dreptul catodului. Scăderea este de 1 eV la $7\cdot10^8$ V/m.

Mişcarea electronilor în vid se face conform legilor arătate la subcap. « *Noţiuni de electronică* ».

Aceste legi sunt valabile numai în absenţa sarcinilor spaţiale. Intrucât însă oricare curent poartă cu el o sarcină spaţială după ecuaţia:

$$\bar{J} = \rho\bar{v} \ [\mathrm{A/m^2}],$$

ecuaţia câmpului în cazul trecerii curenţilor electronici prin vid se modifică, ne mai fiind o ecuaţie Laplace $\nabla^2 V = 0$, ci o ecuaţie Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad \text{(scrisă în regim raţionalizat)}$$

Interacţiunea dintre curent, sarcină spaţială şi câmp produce limitarea prin sarcină spaţială a curentului de electroni.

159. **Intrarea electronilor în anod** produce degajare de căldură. Aceasta din două cauze distincte şi anume: *a)* trecerea barierei de potenţial dela suprafaţa anodului; *b)* transformarea în căldură a energiei cinetice a electronilor.

160. **Emisiunea secundară de electroni.** Dacă un corp este bombardat cu electroni, locul bombardat poate emite din nou electroni. Se poate întâmpla ca emisiunea secundară de electroni să fie mai intensă decât fluxul primar, producându-se astel un curent negativ faţă de tensiunea aplicată (tubul tetrodă funcţionând în montaj dynatron este un exemplu de astfel de situaţie).

161. **Mişcarea ionilor în gaze** provine din două cauze şi anume: *a)* forţele electrice ale câmpului, *b)* forţele de difuzie provenind din gradientul de concentraţie.

162. **Mişcarea ionilor sub acţiunea unui câmp electric** are două componente: o mişcare neorientată cu viteza de înaintare v şi o mişcare orientată cu viteza de înaintare w. Numai ultima este hotărîtoare pentru curentul care trece prin gazul ionizat. Dacă distribuţia vitezelor v este maxwelliană, atunci:

$$Mv_p^2/2 = 3\,kT/2 \ [\mathrm{Ws}],$$

în care M este masa ionilor;
v_p — media pătratică a lui v;
T [°K] — temperatura ionilor (1 eV = 7 740 °K);
k — constanta lui Boltzmann, $k = 1{,}37 \times 10^{-23}$ [Ws/grd]

In câmpuri slabe:

$$w = fQE\lambda/Mv_p = fQE\lambda/\sqrt{3\ MkT}\ [\text{m/s}]$$

în care Q este sarcina ionilor;
E — intensitatea câmpului în V/m;
f — o constantă având valori între 0,5 şi 1,38 după distribuţia admisă pentru parcursul liber λ.

163. **Parcursul liber** se defineşte ca fiind parcursul dintre două ciocniri succesive ale aceluiaşi ion sau electron. Parcursul liber λ are valori mai mici pentru ioni. Astfel de exemplu la He, la gaz, $\lambda = 1{,}30 \cdot 10^{-4}$ m, iar la electroni $\lambda = 7{,}4 \cdot 10^{-4}$m (la 273°K şi la 1 torr).

164. **Ionizarea gazelor** se produce prin eliberarea unor electroni periferici şi poate proveni fie din ciocnirile cu electroni sau cu alte particule, fie prin încălzirea gazului.

165. **Plasma.** Se numeşte *plasmă* un gaz în stare de înaltă ionizare (concentrarea ionior mai mare de $10^{15}/\text{m}^3$), care conţine în medie cel puţin în primă aproximaţie, tot atâţia ioni pozitivi cât şi electroni.

Plasma este caracterizată prin concentraţiile ionice aproximativ egale n_+ şi n_- şi vitezele medii ale ionilor v_{m+} şi v_{m-} care sunt de altfel exprimabile prin temperatura electronilor T.

166. **Descărcările obscure** sunt descărcările la care sarcinile spaţiale sunt neglijabile faţă de sarcinile electronilor. Intensitatea câmpului electric este determinată de câmpul electrozilor. Aceste descărcări sunt limitate la densităţi mici de curent (10^{-2} A/m²). La o dispoziţie plană a electrozilor sunt importante următoarele feluri de descărcări obscure: 1) emisia catodică; 2) ionizarea gazului prin electronii liberi existenţi iniţial şi acceleraţi în câmpul dintre electrozi; 3) ionizarea şi prin electronii emişi prin bombardarea catodului de către ionii care au o viteză suficientă în câmp; 4) ionizarea şi prin electronii rezultanţi din ciocnirea ionilor pe catod. Prin fenomenele dela 2) şi 3), la celulele fotoelectrice cu gaz (v. subcap. *I*), curentul iniţial emis de catod este amplificat de 10 până la 100 de ori.

167. **Descărcări cu efect Corona.** La conductele de înaltă tensiune, situate în aer la presiunea atmosferei, apar descărcări caracterizate printr'o peliculă luminiscentă la suprafaţa conductei. Efectul Corona este o descărcare obscură, cu degenerare pronunţată prin sarcini spaţiale, care poate fi considerată ca o trecere spre descărcarea luminoasă, deoarece la tensiuni mai înalte din suprafaţa conductei ies fire luminoase.

168. **Tensiuni critice ale fenomenului Corona.**

α) *Tensiune critică disruptivă.* Aceasta este tensiunea deasupra căreia se produc efecte prin efluvii, fără ca efectul Corona să fie încă vizibil. Tensiunea eficace a conductorului respectiv în raport cu punctul neutru este dată prin formula:

$$V_0 = 21{,}1\ \delta m\, r \ln \frac{a}{r} \quad kV,$$

în care r este raza conductorului în cm;
a — distanţa dintre conductori în cm;
m — un factor având valoarea:
$m = 1$ pentru conductori fără rugozitate;
$m = 0{,}93 \sim 0{,}98$ pentru conductori rugoşi şi oxidaţi;
$m = 0{,}80 \sim 0{,}87$ pentru cabluri;

δ — densitatea aerului, definită în funcţie de presiunea atmosferică prin

$$\delta = \frac{3{,}926\, h}{273 + \theta}$$

în care h este înălţimea în cm a coloanei de mercur care măsoară această presiune şi θ temperatura în grade centesimale.

β) *Tensiunea critică a efectului Corona vizibil* este tensiunea deasupra căreia se manifestă efluvii vizibile în jurul conductorului:

$$V_v = \left(1 + \frac{0{,}30}{\sqrt{\delta r}}\right) V_0 \quad kV$$

în care V_0, δ şi r au aceleaşi semnificaţii ca la punctul α.

γ) *Tensiunea critică de descărcare disruptivă* este aceea, deasupra căreia se produce scânteia. Se disting trei cazuri:

dacă $\frac{a}{r} \geqslant 30$ şi $r > 0{,}20$ cm:

$$V_d = \left(1 + \frac{0{,}01}{\sqrt{\delta r}} \frac{a}{r}\right) V_0 \quad kV;$$

dacă $\frac{a}{r} < 30$ şi $r > 0{,}20$ cm:

$$V_d = V_0 .$$

Dacă $r < 0{,}20$ tensiunea critică de descărcare disruptivă este egală cu aceea definită prin V_0, dar creşte foarte repede când r scade. Expresia sa este:

$$V_d = V_0 = 21{,}1\, \delta \left(1 + \frac{0{,}30}{\sqrt{\delta r}} \times \frac{1}{1 + 230\, r^2}\right) r \ln \frac{a}{r} \quad kV.$$

În toate aceste formule, tensiunile se înţeleg în valori eficace, în raport cu punctul neutru; r şi δ au aceleaşi semnificaţii ca mai sus.

169. **Descărcări luminiscente.** Descărcarea luminiscentă este o descărcare în care atomii ionizaţi transformă energia mecanică a şocurilor, în energie luminoasă. In aceste descărcări, repartiţia câmpului este determinată de sarcinile spaţiale. Ionizarea se produce prin eliberarea de electroni la catod, electroni care ionizează gazul prin ciocnirea cu moleculele gazului. Desionizarea are loc la electrozi şi pe pereţii vasului.

170. **Caracteristica tensiune-curent** la o descărcare luminiscentă normală se vede în fig. 54. In *A* este regiunea căderii catodice normale, unde tensiunea de ardere este independentă de curent. In *B* descărcarea este subnormală, iar în *C*, tensiunea creşte cu curentul.

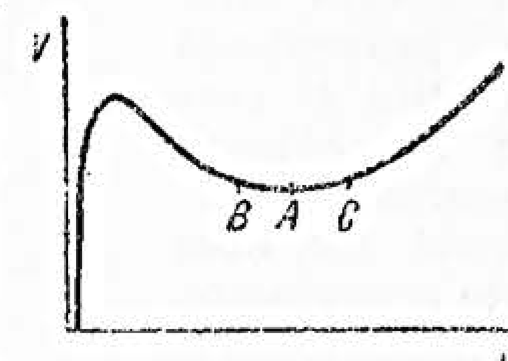


Fig. 54. — Caracteristica *V I* la descărcările luminiscente.

Descărcările luminiscente au multiple aplicaţii: lămpi cu luminiscenţă, stabilizatori de tensiune la care tensiunea este independentă de curent (utilizarea caracteristicei în punctul *A*), etc.

Ionizarea prin ciocnire se produce pentru fiecare gaz la o anumită tensiune, la care electronii capătă o energie suficientă pentru a ioniza gazul. Pentru vaporii de Hg, această tensiune este de 10,4 V, iar pentru alcaline 3,8—5,3 V.

171. **Potenţial exploziv.** Se numeşte *potenţial exploziv* tensiunea V dintre două plăci la care sare o scânteie între aceste plăci. Această tensiune depinde de distanţa d dintre plăci şi de presiunea p a gazului în care sunt introduse plăcile.

172. **Legea lui Paschen.** Potenţialul explosiv dintre două plăci plane indefinite depinde numai de masa gazului conţinut între cele două plăci, pe centimetru pătrat de suprafaţă a plăcilor, sau:

$$V = f(pd),$$

în care p şi d au aceeaşi semnificaţie ca mai sus.

173. **Descărcări în joasă presiune.** Aceste descărcări se produc la presiuni de ordinul lui 1 torr. Pentru câmpuri de circa 10 kV/m se obţin curenţi de ordinul miliamperului. In curent continuu se constată că descărcarea provoacă iluminarea gazului. Plecând dela catod spre anod se întâlnesc următoarele zone: teaca luminoasă catodică, spaţiul întunecat al lui Hittorf, lumina negativă, spaţiul întunecat al lui Faraday, coloana luminoasă pozitivă (fig. 55).

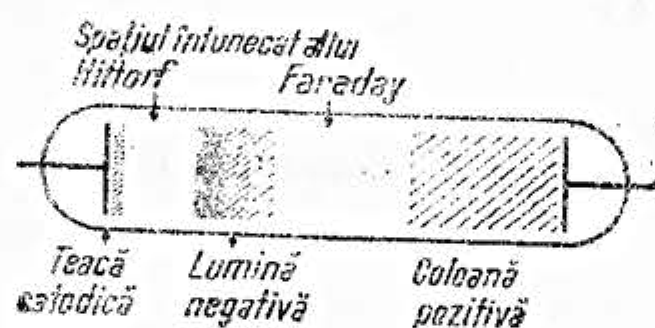


Fig. 55. — Descărcare în joasă presiune şi în curent continuu.

174. **Descărcarea în arc** este o descărcare la care din cauza bombardamentului ionic catodul ajunge la o temperatură suficientă pentru a avea o emisie termoionică puternică.

Descărcarea în arc se poate produce şi la presiunea atmosferei. Acest fenomen a fost studiat de Acad. V. F. Mitchevici între anii 1902 şi 1905. El a stabilit condiţiile generale de formare ale arcului electric şi a stabilit că principalul vehicul al curentului electric în arc sunt electronii emişi de catodul incandescent prin efect termoemisiv şi nu ionii. Acad. Mitchevici a demonstrat că la arc, temperatura înaltă a anodului nu joacă decât un rol secundar.

175. **Raze catodice.** Micşorând în mod continuu presiunea dintr'un tub în care are loc o descărcare în curent continuu, se constată că spaţiul întunecat al lui Hittorf umple treptat tot spaţiul (pe la 10^{-3} torr). In interiorul tubului se constată existenţa unor electroni care sunt de provenienţă catodică şi care au viteze mari, deoarece şi parcursul lor liber este acum mare. Aceşti electroni constitue aşa numitele raze catodice, care pot fi puse în evidenţă cu ajutorul unor ecrane fluorescente, care devin luminoase în punctele lovite de electroni.

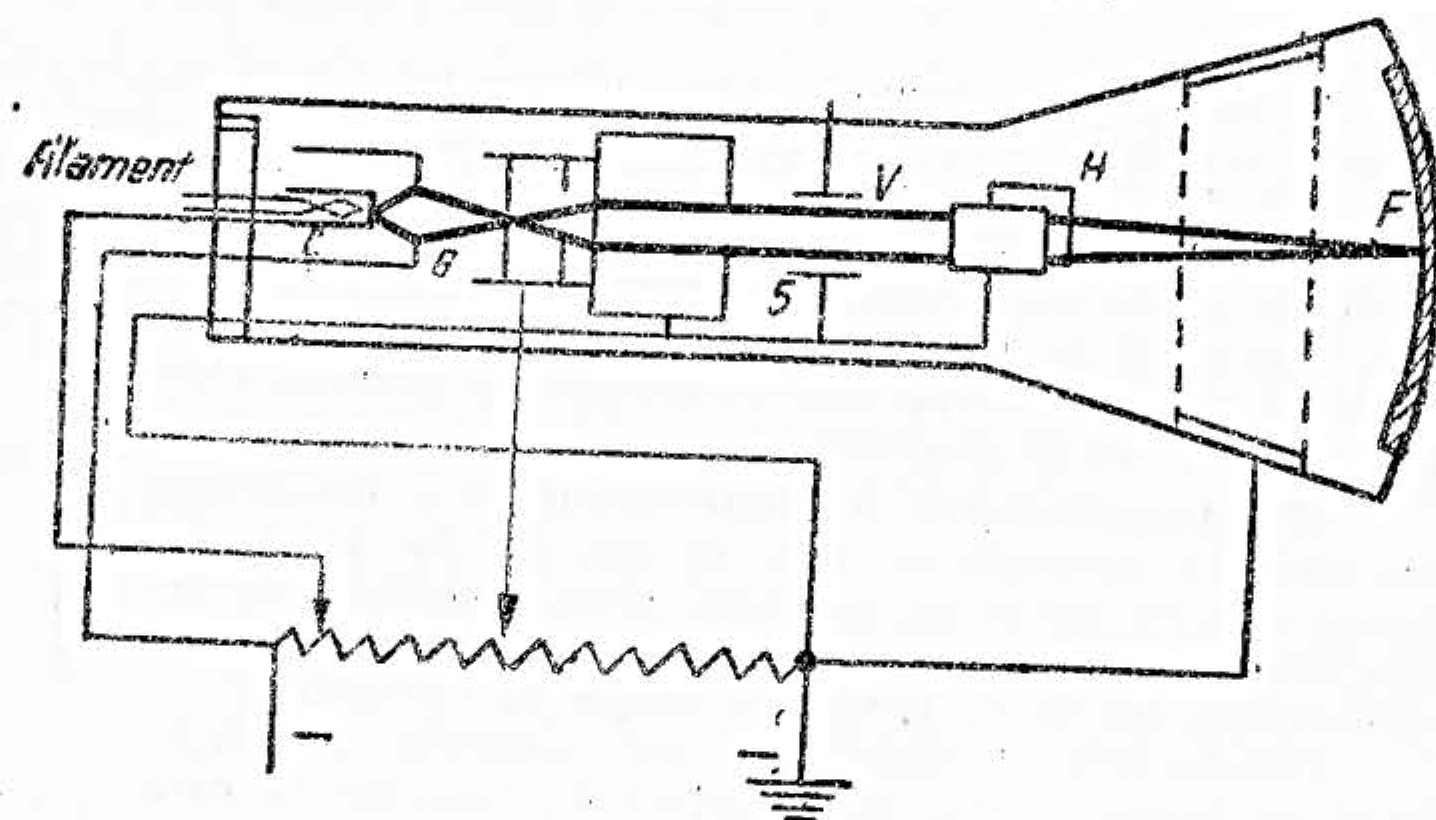


Fig. 56. — Tubul catodic.

Razele catodice pot fi obţinute şi într'un vacuum mai înaintat, dar în acest caz electronii sunt emişi de catod prin efect termoionic, catodul fiind încălzit printr'un mijloc exterior.

Proprietăţi ale razelor catodice. Razele catodice sunt emise perpendicular pe catod, oricare ar fi poziţia acestuia faţă de anod.

Razele catodice sunt raze materiale, formate din electroni în mişcare. Ele sunt deci deviate de câmpurile electrice şi magnetice.

176. **Tubul catodic** este un aparat a cărui funcţionare se bazează pe razele catodice. Din catodul cald C se emit electroni care trec prin anodul de accelerare A şi printre condensatorii V şi H ajungând pe ecranul fluorescent F. Aplicând pe condensatorul V o tensiune alternativă $U(t)$, iar pe condensatorul H o tensiune care variază liniar în timp, numită tensiunea de baleiaj, pe ecranul oscilografului catodic se poate vedea curba $U(t)$. Aceasta este tocmai datorită deflecţiei razelor catodice la trecerea printr'un câmp electric care are două componente: una între plăcile lui H (tensiunea de baleiaj) şi alta $[U(t)]$, între plăcile lui V (Fig. 56).

La studierea fenomenelor rapide care au loc în tensiunile înalte, se utilizează tuburi electronice speciale, cu catod rece, de tipul celor realizate de L. P. Neiman şi J. S. Stecolnicov.

177. **Raze pozitive.** Aceste raze sunt constituite de ionii pozitivi care sunt atraşi de catod. In mod normal ei se desionizează pe catod. Dacă însă se perforează

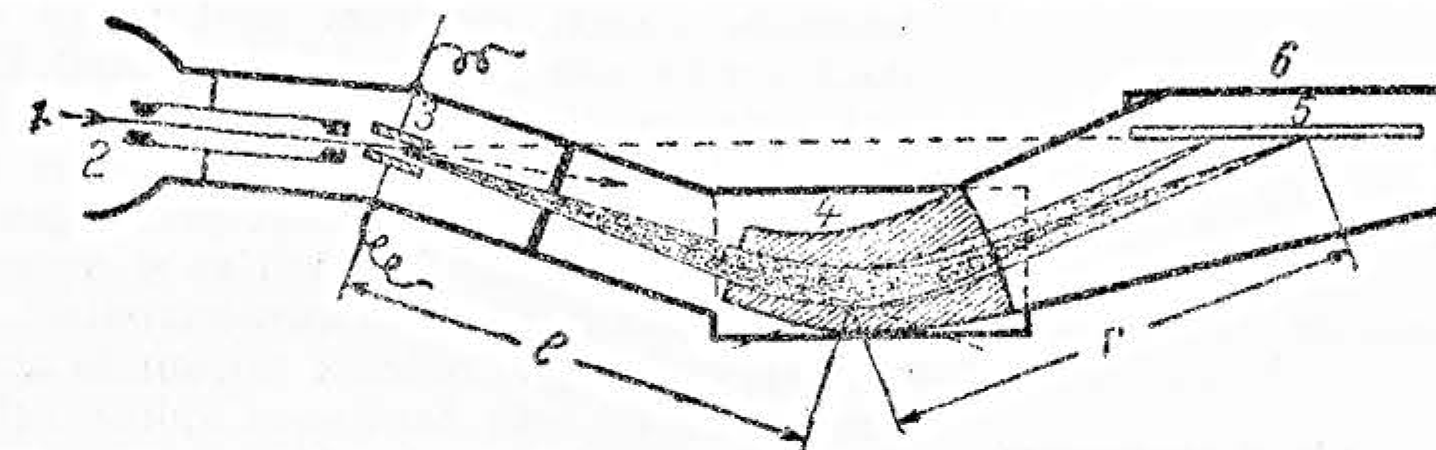


Fig. 57. — Spectograf de masă: 1 — sursa de particule; 2 — fanta; 3 — condensator; 4 — câmp magnetic; 5 — placă fotografică; 6 — incinta în care s'a făcut vid.

catodul, atunci ei pot străbate în spaţiul din spatele catodului, unde pot fi puşi în evidenţă prin diferite metode.

178. **Spectrograful de masă.** Razele pozitive sunt şi ele supuse acţiunii câmpului magnetic şi electric, astfel încât, făcându-le să treacă prin câmpuri convenabil orientate, li se poate determina raportul sarcină/masă din devierile suferite la trecerea prin aceste câmpuri. La ieşirea din câmp a unui grup de ioni de sarcină egală, vor fi grupaţi la un loc numai ionii care au aceeaşi masă. Se poate pune astfel în evidenţă faptul că elementele chimice sunt de fapt constituite din mai mulţi isotropi, adică din substanţe cu proprietăţi chimice egale, dar cu greutăţi atomice diferite între ele.

179. **Raze X.** Aceste raze nu sunt formate din particule ci sunt raze electromagnetice, în sensul că nu sunt constituite de un flux de particule având o masă inerţială sau o sarcină electrică, ci sunt numai o vibraţie electromagnetică de o frecvenţă foarte mare (de ordinul lui 10^{20} Hz).

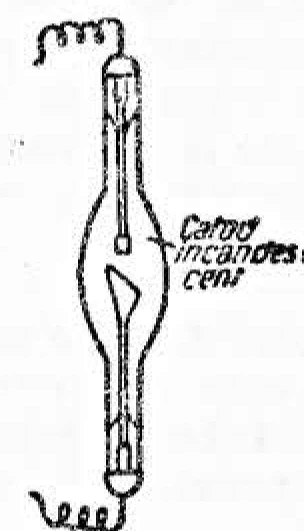


Fig. 58. — Razele X: tub Coolidge.

Razele X se obţin bombardând cu electroni rapizi un anod. Energia cinetică $mv^2/2$ a fiecărui electron este transformată într'un cuant de frecvenţă f, astfel încât să fie satisfăcută relaţia:

$$\frac{mv^2}{2} = hf, \quad \text{deci} \quad f = \frac{mv^2}{2h},$$

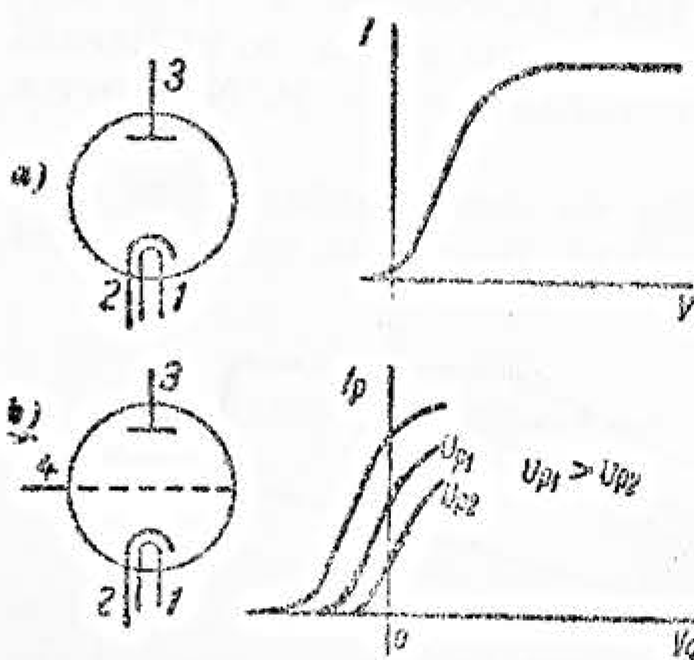
în care h este cuantumul de acţiune sau constanta lui Planck.

In mod normal, electronii sunt produşi de un filament incandescent şi sunt acceleraţi într'un câmp electric de ordinul a 100 kV sau mai mult. Ei lovesc anodul format dintr'un bloc de tungsten.

Razele X, fiind de natură electromagnetică, pot străbate cu uşurinţă prin dielectrici de grosimi nu prea mari, cum ar fi de exemplu corpul omenesc. In corpul omenesc ele nu suferă o absorbţie uniformă; în oase ca şi în eventuale obiecte metalice din corp sunt absorbite mai puternic. Punând deci o placă fotografică specială în calea razelor care au trecut printr'un corp omenesc, se obţine *radiografia* acelui corp.

Razele X au aplicaţii numeroase şi în tehnică la controlul pieselor metalice, al sudurilor, etc.

Nefiind formate din particule electrizate, ele nu sunt deviate de câmpurile electromagnetice. Având o lungime de undă mică, se utilizează la studierea structurii cristalelor.


Fig. 59. — Tuburi electronice:
a — dioda şi caracteristica ei $V\ I$;
b — trioda şi caracteristica ei $V_g\ I_p$.
1 — filament; 2 — catod;
3 — anod; 4 — grilă.

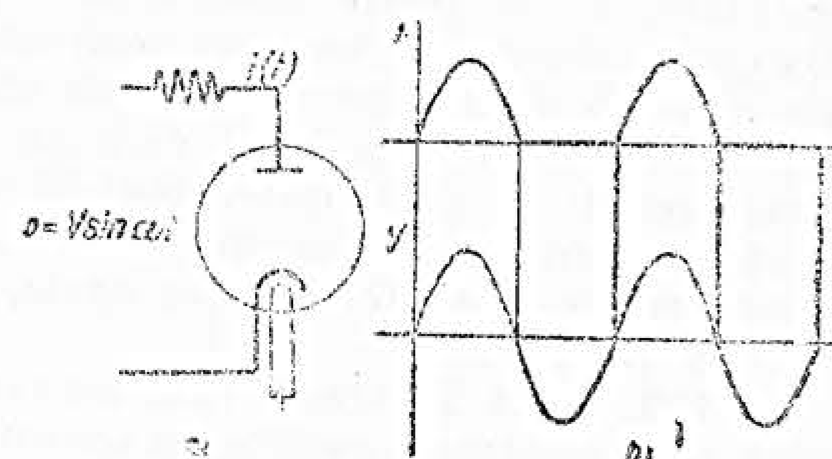
180. **Tuburile electronice** constitue un foarte însemnat progres tehnic al secolului nostru. Cel mai simplu tub electronic este *dioda*, formată dintr'un catod cald care emite electroni în vacuum. Aceşti electroni sunt atraşi de anod dacă acesta este pozitiv faţă de catod. Dacă anodul este negativ, electronii nu ajung la anod. Există deci un organ neliniar, la care tensiunea nu mai este legată de curent prin legea lui Ohm decât pentru tensiunile pozitive şi aceasta numai pe o anumită porţiune a caracteristicei. Cu dioda se pot însă uşor redresa tensiunile alternative: dacă $V \sin \omega t$ este tensiunea aplicată (fig. 60, *a*), atunci curentul care circulă prin diodă are aspectul din fig. 60, *b*; este deci un curent care are mereu acelaşi sens.

Trioda este un tub mult mai important, deoarece el permite redresarea curenţilor, obţinerea oscilaţiilor de diferite frecvenţe şi amplificarea semnalelor. Ea este formată dintr'un catod cald care emite electroni, un anod care îi atrage şi un electrod de comandă care controlează fluxul de electroni care ajunge la anod. Relaţia dintre curentul anodic alternativ, care se obţine la aplicarea pe grilă a unei tensiuni alternative, $v_g = V_g \sin \omega t$, este:

$$i = s\, v_g$$

în care s este o mărime caracteristică tubului, care se numeşte *panta tubului*. La bornele tubului, adică între anod şi catod, apare atunci o tensiune v_a care este egală cu:

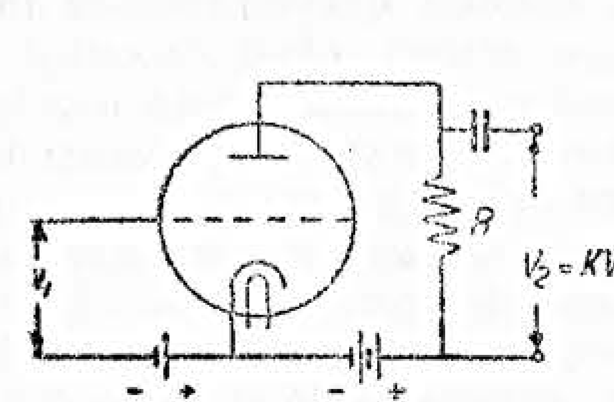
$$v_a = \mu v_g$$

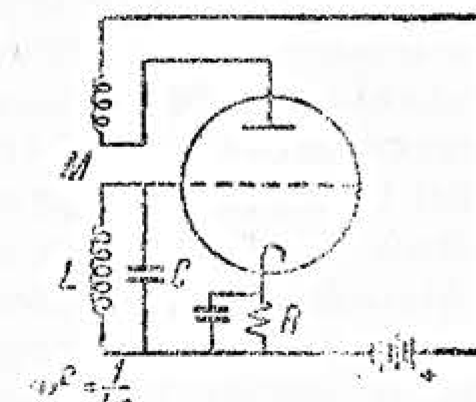

Fig. 60. — Redresarea cu ajutorul diodei.

μ fiind o mărime caracteristică tubului, care se numeşte *factor de amplificare*. Acest factor de amplificare poate atinge la anumite tuburi valori foarte mari (la pentode de ordinul miilor).

Se obţin astfel dispozitive care să amplifice tensiunile sau puterile alternative. Prin amplificarea puterilor nu trebue înţeles câtuşi de puţin un perpetuum mobile, ci numai introducerea în circuitul de utilizare a unei cantităţi de energie din sursele de alimentare locale ale tubului, care însă să urmărească frecvenţa şi forma de variaţie a tensiunii aplicate pe grila tubului.

181. **Aplicaţiile tuburilor electronice** sunt numeroase: radiodifuziunea, amplificatorii, controlul electronic al servomecanismelor şi maşinile matematice. Oscilatorii pot oscila pe frecvenţe cuprinse între fracţiuni de Hz şi frecvenţe corespunzând spectrului infraroşu. Maşinile-unelte cu control electric au o funcţionare fără greşală, de mare precizie. In fine, marile maşini matematice soluţionează extrem de rapid probleme de ecuaţii cu derivate parţiale, ecuaţii diferenţiale, etc.


Fig. 61. — Schemă de amplificator.

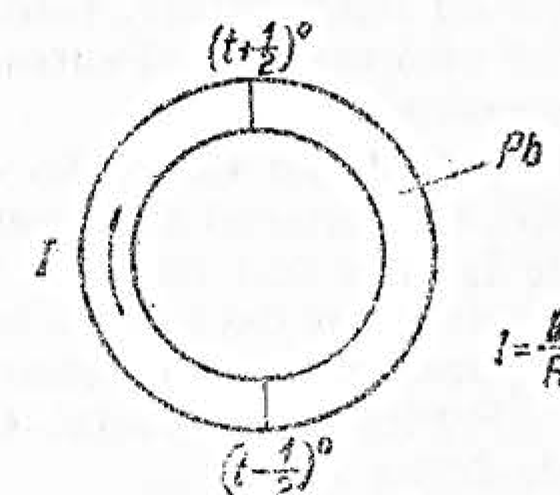

Fig. 62. — Schemă de oscilator.

I. Diferite fenomene electrice

182. **Efectul Seebeck.** Se constată că dacă într'un circuit format din două metale deosebite, cele două suduri se află la temperaturi diferite, în circuit apare o forţă electromotoare. Valoarea acestei f.e.m. depinde nu numai de diferenţa de temperatură dintre suduri ci şi de temperatura lor.

Definind puterea termoelectrică a unui metal ca fiind variaţia în funcţie de temperatură o f.e.m. E care se desvoltă la contactul dintre acel metal şi plumb pentru o diferenţă de temperatură de 1°C între suduri, se arată experimental că puterea termoelectrică variază liniar în funcţie de temperatura t (fig. 63):

$$\frac{dE_t}{dt} = a + bt.$$


Fig. 63. — Notaţia folosită la definirea puterii termoelectrice.

Se ia ca metal de referinţă plumbul, deoarece el nu prezintă efect Kelvin (v. mai jos).

In tabela următoare se dau puterile termoelectrice ale metalelor cele mai utilizate în practica termocuplelor. Puterea termoelectrică este dată în microvolţi pe grad centigrad.

Fier (moale, recopt)	16,65 − 0,029 7 t
Cupru pur	2,76 + 0,012 2 t
Manganină	1,36 + 0,000 8 t
Platină	− 1,79 + 0,034 6 t
Constantan	− 35,34 + 0,076 6 t

Forţa electromotoare care se naşte la contactul a două metale este legată de diferenţa de temperatură dintre sudura caldă şi sudura rece prin formula aproximativă:

$$E \approx (a - a')\,(t - t')$$

în care t şi t' sunt temperaturile celor două suduri.

E x e m p l u. Un cuplu fier — constantan este încălzit la o sudură cu 10°C mai mult decât la cealaltă. La sudura caldă apare o f.e.m. de:

$$10\,(16{,}65 + 35{,}34) = 519{,}9\ \mu V.$$

Curentul circulă dela constantan spre fier, prin sudura caldă.

183. Efectul Peltier. Când un curent electric i trece prin sudura dintre două metale diferite, în sudură are loc o degajare sau o absorbţie de căldură. Acest efect este diferit de degajarea căldurii în sudură prin efectul Joule (ri^2) datorită rezistenţei r a sudurii. Efectul Peltier este reversibil, căldura desvoltându-se în sudură când curentul trece într'un sens şi absorbindu-se atunci când curentul trece în sens contrar. Intre sensul efectului Peltier şi sensul curentului există o relaţie precisă şi anume: dacă curentul este forţat să treacă prin sudura caldă în aceeaşi direcţie în care circulă şi curentul termoelectric prin sudura caldă, atunci sudura se răceşte, adică se absoarbe căldură. La fel, un curent electric trecând în sens normal prin sudura rece, desvoltă căldură. La fel, curentul termoelectric absoarbe căldură la sudura caldă şi degajă căldură la sudura rece. Deasemenea un curent produs de cauze exterioare şi circulând în aceeaşi direcţie va răci sudura caldă şi va încălzi sudura rece.

184. Efectul Thomson (Kelvin) Un gradient de temperatură într'un conductor metalic este însoţit de un mic gradient de potenţial, a cărui mărime şi direcţie depinde de metalul considerat.

Astfel, atunci când într'un conductor circulă un curent electric, se produce o degajare sau o absorbţie de căldură, cu rezultatul net şi anume: căldura degajată într'o porţiune de conductor limitată prin temperaturi diferite este diferită de căldura degajată în acelaşi conductor la care n'ar exista diferenţele de temperatură; diferenţa dintre cantităţile de căldură degajate în cele două cazuri poate fi pozitivă sau negativă, după metalul considerat. La cupru, degajarea de căldură este mai mare atunci când curentul circulă din părţile calde spre cele reci şi mai mică atunci când curentul circulă din părţile reci spre cele calde. La fier fenomenul se petrece invers.

185. Efecte termomagnetice. La materialele feromagnetice, permeabilitatea creşte cu temperatura, pentru B mai mic de 10 000 gaussi şi cu atât mai mult cu cât B este mai mic. Pentru aproximativ $B = 10\,000$ gaussi, μ_r scade cu creşterea temperaturii.

186. Punct Curie. Se defineşte acest punct ca fiind temperatura crescătoare la care un material dat încetează de a mai fi magnetic, sau temperatura descrescătoare la care acel material devine magnetic. Cele două valori definite nu coincid totdeauna, dar dacă nu se specifică altfel, prin punct Curie se înţelege temperatura corespunzând primei definiţii (temperatura crescătoare).

Pentru fier punctul Curie este la circa 775°C: la această temperatură μ_r scade brusc la 0.

187 Electrostricţiunea este fenomenul de deformare a dielectricilor, sub acţiunea forţelor exercitate de un câmp electrostatic.

La solide fenomenul este slab şi mascat de deformaţii provenind din alte cauze. La lichide şi gaze, se poate calcula presiunea mecanică apărută datorită câmpului electric.

188. Piezoelectricitatea este un fenomen simetric cu cel de electrostricţiune, deoarece aci este vorba de câmpul electric — respectiv sarcinile — produse de deformaţiile elastice suferite de corpuri. Fenomenul este puternic la cristalele de cuarţ şi la titanaţii de bariu.

Cristalele de cuarţ cristalizează în prisme hexagonale. La ele se disting trei feluri de axe: (fig. 64) X — aşa numita axă electrică; Y — axa mecanică; Z — axa prismei. Cristalele se taie deobicei în lame paralele cu planul $Y\,Z$, astfel cum se vede în fig. 64. O astfel de secţiune se numeşte secţiune Curie.

Legile efectului piezoelectric, la cristalele tăiate după o secţiune Curie, sunt următoarele:

— Deformări mecanice datorită câmpurilor electrice pot apare şi după X şi după Y, dar tensiuni electrice datorite unor deformări mecanice pot apare numai după X;

— *Efectul direct.* O deformare mecanică după Y produce o tensiune electrică după X; o deformare mecanică după X produce o tensiune tot după X. Deci în general o deformare după o direcţie oarecare poate produce o tensiune numai după X.

— *Efectul invers.* O tensiune electrică după X produce o deformare şi după X şi după Y. O tensiune după o direcţie oarecare, având o componentă după X, produce efectele corespunzătoare.

Relaţia dintre sensul tensiunii şi acel al deformării este reciprocă celei din efectul direct.

Vibraţii. O tensiune electrică alternativă aplicată după axa X produce o vibraţie mecanică după X (vibraţie longitudinală, în grosime) şi una după Y (vibraţie transversală, în lungime). Cele două vibraţii mecanice nu au însă aceeaşi frecvenţă proprie.

Efectul piezoelectric îşi găseşte o foarte largă utilizare la generarea ultra-sunetelor, adică la generarea undelor elastice de o frecvenţă de ordinul kilo sau mega-herţilor. Ultrasunetele au numeroase aplicaţii în industrie.

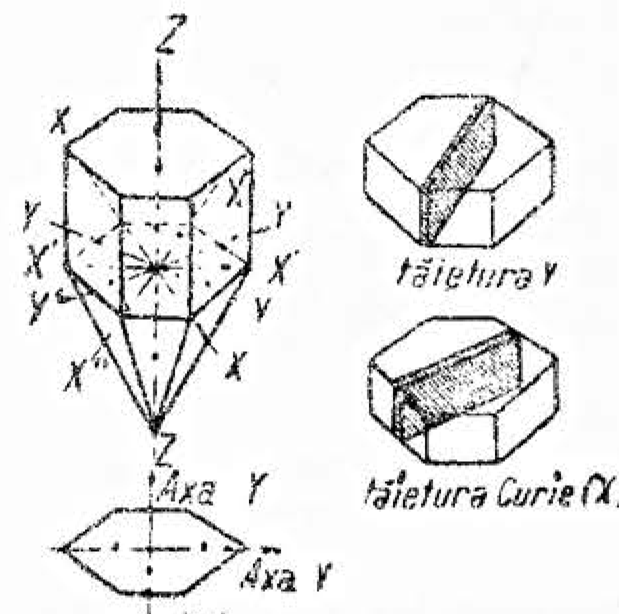


Fig. 64. — Cristal de cuarţ şi secţiune Curie.

189. Fotoelectricitatea. Se constată că un corp neutru supus acţiunii luminii se încarcă pozitiv. Explicaţia este următoarea: energia transportată de lumină, (energia electromagnetică respectivă transportată de cuantele de lumină - fotonii) lovind metalul, este cedată electronilor din metal. Aceştia capătă astfel o energie suficient de mare pentru a putea străbate bariera de potenţial dela marginea metalului pe care îl părăsesc. Metalul, având un deficit de sarcini negative, se prezintă electrizat pozitiv. Fenomenul depinde deci de energia transportată de cuante şi de potenţialul de extragere al metalului respectiv, fiind cu atât mai pronunţat cu cât fotonii au o energie mai mare, iar potenţialul de extracţie este mai mic. Intrucât energia unei cuante de lumină este $W = hf$, în care f este frecvenţa undei, rezultă că fenomenul va fi mai intens în ultraviolet decât în ultraroşu; deoarece bariera de potenţial are o valoare precisă V_b, pentru ca un electron să o poată depăşi trebue ca energia pe care o primeşte dela lumină să satisfacă inegalităţii $e \cdot V_b < hf$, adică există pentru fiecare metal o lungime de undă sub care fenomenul nu se mai poate produce. Pentru metalele alcaline această frecvenţă este coborîtă în spectrul vizibil, sau chiar în infraroşu.

190. Celulele fotoelectrice îşi bazează funcţionarea pe fenomenul fotoelectric. Se disting mai multe tipuri de celule fotoelectrice şi anume: celule fotorezistente, celule autogeneratoare, sau cu pătură de oprire şi înfine celule fotoemisive.

α) *Celulele fotorezistente* au ca prototip celula de seleniu, element la care rezistivitatea variază cu densitatea de energie luminoasă care cade pe el. Seleniul în stare amorfă absoarbe energie electrică şi capătă o structură cristalină, care dispare după ce iluminarea încetează. Această schimbare de stare este însoţită de o importantă variaţie a rezistivităţii electrice a seleniului. Celulele de acest tip trebue deci în mod necesar să cuprindă în circuitul lor o sursă căreia îi variază curentul debitat în ritmul iluminării celulei. Aceste celule sunt robuste, dar au o oarecare inerţie. Se utilizează ca relee anunţătoare pentru punerea în funcţiune şi oprirea automată a instalaţiilor de iluminare la faruri, tunele, etc.

β) *Celulele autogeneratoare*, sau fotovoltaice, sau cu pătură de oprire, sunt formate dintr'o pătură de fier pur care constitue electrodul pozitiv, un strat de seleniu şi în fine o foaie extrem de subţire de metal, foaie care este translucidă. Sub acţiunea luminii, seleniul dă o puternică emisie de electroni şi este suficient să se închidă circuitul exterior între cei doi electrozi, pentru a observa trecerea unui

curent perceptibil și utilizabil. In general, pentru o rezistență în circuit de 500 Ω la 400 de lm, se poate obține o putere de 10 μW.

Există și celule de acest tip lichide, conținând bromură de argint și o soluție de roșu de heliantină.

Și celulele de acest tip au o inerție mare, care le face improprii pentru redarea frecvențelor mai mari decât cele audibile. Se utilizează însă mult în luxmetrie, fotografie, colorimetrie, măsuri în infraroșu și ultraviolet, etc.

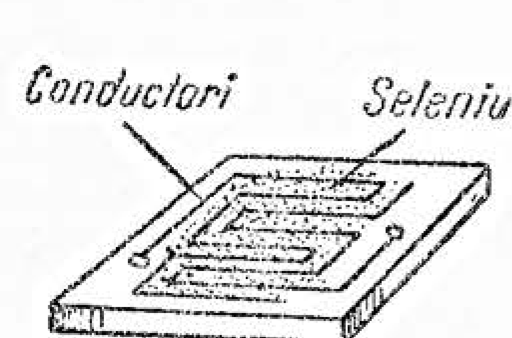


Fig. 65. — Celulă fotorezistentă.

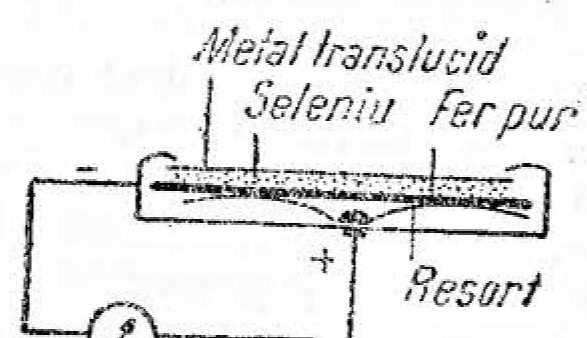


Fig. 66. — Celulă fotoelectrică autogeneratoare.

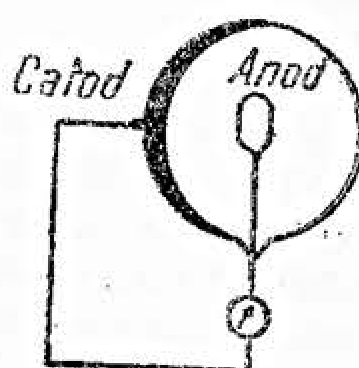


Fig. 67. Celule fotoemisive.

γ) *Celulele fotoemisive* sunt formate dintr'un balon de sticlă, în care s'a făcut vid și în interiorul căruia se află doi electrozi: catodul metalic (cesiu, sodiu sau potasiu) care este depusă chiar pe balon și anodul constituit dintr'un inel metalic. Sub influența luminii, catodul emite electroni, care sunt toți atrași de anod, care este în prealabil pus la un potențial pozitiv de circa 60—200 V. Curentul este de ordinul microamperilor și trebue amplificat considerabil înainte de a putea fi utilizat.

După compoziția catodului, aceste fotocelule au o sensibilitate foarte diferită pentru diferitele lungimi de undă: este un fenomen de selectivitate cromatică. Potasiul este sensibil la violet, rubidiul la galben, cesiul la roșu și magneziul la ultraviolet.

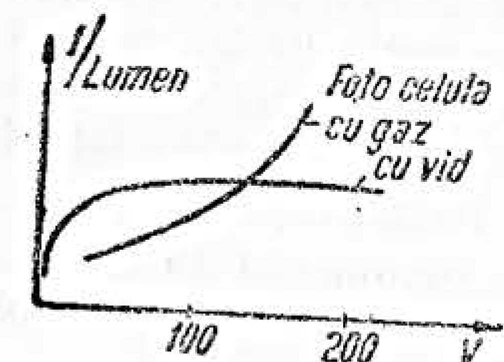


Fig. 68. — Caracteristica $I - V$ la celulele fotoemisive.

La celulele moderne, stratul emisiv nu se depune direct pe fundul balonului de sticlă, ci pe o suprafață metalică argintată sau arămită.

Sensibilitatea fotocelulei se poate mări mult, introducând în balon un gaz inert. Acestea sunt așa numitele fotocelule cu gaz. La ele tensiunea de polarizare este mai mică.

191. **Piroelectricitate.** Unele minerale izolante se încarcă electric pe întreaga lor suprafață, atunci când sunt încălzite.

192. **Piroelectricitate polară.** Unele substanțe cristalizate, care prezintă o hemiedrie polară în forma și structura lor, atunci când sunt încălzite sau răcite în mod uniform, prezintă simultan pe suprafața lor ambele feluri de sarcini electrice, în două puncte numite poli. In această categorie intră turmalina și prismele de topaz. La turmalină, electrizarea se manifestă numai atunci când temperatura variază. Felul electrizării depinde de sensul variației temperaturii: punctul care era polul pozitiv în timpul încălzirii devine polul negativ atunci când turmalina se răcește.

La temperatura de + 150°C turmalina își pierde proprietățile piroelectrice, devenind bună conducătoare de electricitate.

193. **Segnetoelectricitatea.** Unele cristale, cum ar fi sarea Segnette, anumiți compuși organici și cristale de tipul KH_2PO_4 se bucură de proprietatea că între anumite limite de temperatură prezintă — pentru câmpuri electrice slabe — o foarte mare

constantă dielectrică relativă. Valoarea acestei constante poate atinge valori de ordinul miilor.

Pentru câmpuri mai intense se constată un fenomen de saturație electrică. Fenomenul prezintă analogii cu feromagnetismul: existența a două « puncte Curie » — unul pentru temperaturi mari și altul pentru temperaturi joase — dincolo de care fenomenul încetează. Deaceea corpurile care prezintă aceste proprietăți se numesc și feroelectrice. Fenomenul a fost descoperit și studiat în U.R.S.S., și a și căpătat aplicații practice.

194. **Variația rezistivității metalelor supuse unui câmp magnetic.** Se constată experimental că metalele își variază rezistivitatea atunci când sunt supuse unui câmp magnetic. In acest sens se cunosc lucrările savantului sovietic Kapitza, care au fost interpretate pe baza cuantificării mișcării electronilor de către Prof. Ș. Țițeica.

De menționat, că încă din 1897, prof. D. Hurmuzescu s'a ocupat de modificările mecanice, fizice și chimice, pe care le suferă corpurile prin magnetizare.

J. Noțiuni generale privind curenții alternativi

a) Funcții periodice

195. **Mărimea periodică** este o mărime variabilă, ale cărei caracteristice se reproduc identic la intervale egale de timp, de spațiu, sau de o altă variabilă independentă.

196. **Curentul periodic** este curentul electric variabil ale cărui caracteristice se reproduc la intervale egale de timp (fig. 69).

197. **Curentul alternativ** este curentul electric periodic a cărui valoare medie în timpul unei perioade complecte este nulă (fig. 70).

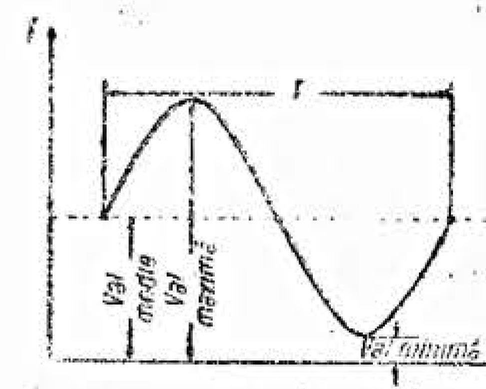


Fig. 69. — Curent periodic.

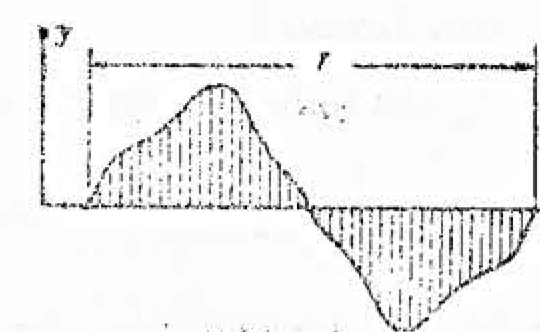


Fig. 70. — Curent electric alternativ.

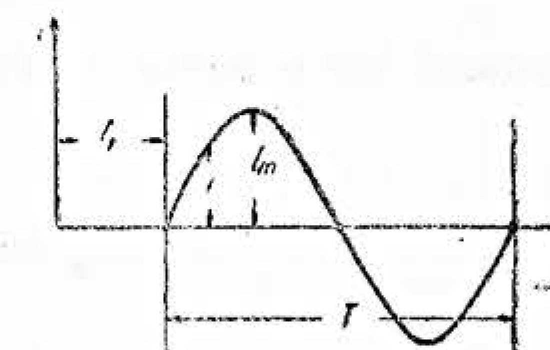


Fig. 71. — Curent electric alternativ sinusoidal.

198. **Curentul electric alternativ simetric** este un curent electric alternativ ale cărui valori, după un interval de timp de o semiperioadă sunt egale ca mărime, dar de semne contrarii.

199. **Curentul electric pulsatoriu** este un curent clectric periodic care nu-și schimbă semnul.

200. **Curentul electric alternativ sinusoidal** este un curent reprezentat prin o funcție sinusoidală de timp (fig. 71).

$$i = I_m \sin \omega (t - t_1).$$

201. **Curentul electric alternativ nesinusoidal** este curentul periodic simetric de o formă oarecare.

202. **Valoarea instantanee** a curentului electric este valoarea curentului electric la un moment dat.

203. **Valoarea de vârf** este valoarea instantanee maximă într'un interval de timp.

b) Noţiuni privind curenţii alternativi

204. Perioada T a curentului electric este intervalul minim de timp T după care valorile curentului periodic se repetă.

205. Frecvenţa f este raportul dintre un număr întreg de perioade şi intervalul de timp corespunzător.

Frecvenţa este inversul perioadei: $f\,T = 1$.

206. Pulsaţia ω este produsul frecvenţei prin 2π

$$\omega = 2\pi f$$

Această mărime are o semnificaţie numai la curenţi sinusoidali.

207. Amplitudinea este valoarea maximă în timpul unei perioade.

208. Suma a două funcţii sinusoidale de aceeaşi pulsaţie. Fie două funcţii de aceeaşi pulsaţie,

$$a = A_m \sin(\omega t - \alpha) \quad ; \quad b = B_m \sin(\omega t - \beta). \tag{208.1}$$

Funcţia rezultantă $c = a + b$ este tot o funcţie sinusoidală de forma:

$$c = C_m \sin(\omega t - \varphi), \tag{208.2}$$

în care,

$$C_m^2 = A_m^2 + B_m^2 + 2A_m\, B_m \cos(\alpha - \beta), \tag{208.3}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_m \sin\alpha + B_m \sin\beta}{A_m \cos\alpha + B_m \cos\beta} \tag{208.4}$$

209. Produsul a două funcţii de aceeaşi pulsaţie. Fie funcţiile

$$a = A_m \sin(\omega t - \alpha);\ b = B_m \sin(\omega t - \beta). \tag{209.1}$$

Produsul lor p poate fi exprimat sub forma:

$$p = ab = A_m\, B_m \sin(\omega t - \alpha)\sin(\omega - \beta) = \tag{209.2}$$

$$= \frac{1}{2} A_m\, B_m \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} A_m\, B_m \cos[2\,\omega t - (\alpha + \beta)].$$

Rezultă că produsul a două funcţii sinusoidale comportă un termen constant

$$\frac{1}{2} A_m\, B_m \cos(\alpha - \beta) \tag{209.3}$$

şi un termen sinusoidal de pulsaţie dublă

$$-\frac{1}{2} A_m\, B_m \cos[2\,\omega t - (\alpha + \beta)].$$

Produsul a două funcţii sinusoidale nu este o funcţie sinusoidală.

210. Suma a două funcţii sinusoidale de pulsaţii diferite şi de amplitudini egale. Fie funcţiile:

$$a = A_m \sin(\omega_1 t - \alpha);\ b = A_m \sin(\omega_2 t - \beta). \tag{210.1}$$

Funcţia rezultantă c va fi de forma:

$$c = A_m \sin(\omega_1 t - \alpha) + A_m \sin(\omega_2 t - \beta) =$$

$$= 2\,A_m \cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (\alpha - \beta)}{2} \sin\frac{(\omega_1 + \omega_2)\,t - (\alpha + \beta)}{2} \tag{210.2}$$

Funcţia c rezultantă poate fi considerată ca o funcţie periodică simplă de pulsaţie $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, a cărei amplitudine variază, după o lege sinusoidală, cu pulsaţia $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$.

211. Produsul a două funcţii sinusoidale de pulsaţii diferite. Fie funcţiile:

$$a = A_m \sin(\omega_1 t - \alpha) \tag{211.1}$$

$$b = B_m \sin(\omega_2 t - \beta)$$

Produsul celor două funcţii sinusoidale este de forma:

$$p = ab = A_m\, B_m \sin(\omega_1 t - \alpha)\sin(\omega_2 t - \beta) = \tag{211.2}$$

$$= \frac{1}{2} A_m\, B_m \cos[(\omega_1 - \omega_2)\,t - (\alpha - \beta)] - \frac{1}{2} A_m\, B_m \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (\alpha + \beta)];$$

Funcţia rezultantă p se compune din două funcţii sinusoidale de aceeaşi amplitudine, având ca pulsaţii suma, respectiv diferenţa pulsaţiilor funcţiilor componente.

212. Valoarea eficace a unei mărimi periodice. Se înţelege prin valoarea eficace a unei mărimi periodice (curent electric, tensiune electrică, etc.) rădăcina pătrată a mediei pătratelor valorilor instantanee ale unei perioade întregi, sau a unui număr întreg de perioade.

Dacă a este valoarea instantanee a unei mărimi periodice, iar T durata unei perioade, atunci valoarea sa eficace este:

$$A = \sqrt{\frac{1}{nT}\int_0^{nT} a^2 \mathrm{d}t} \tag{212.1}$$

în care n este un număr întreg.

Din punct de vedere fizic, valoarea eficace a unui curent periodic este egală cu intensitatea unui curent continuu, care, străbătând acelaşi conductor, ar desvolta în timpul corespunzător al unui acelaşi număr întreg de perioade, aceeaşi cantitate de energie transformată în căldură.

213. Valoarea eficace a unei mărimi alternative sinusoidale. Fie o mărime alternativă a cărei valoare instantanee are expresia sinusoidală de forma:

$$a = A_m \sin(\omega t - \alpha). \tag{213.1}$$

Expresia valorii eficace, în acest caz particular, devine:

$$A = \sqrt{\frac{1}{nT}\int_0^{nT} a^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{A_m^2}{nT}\int_0^{nT} \sin^2(\omega t - \alpha)\,\mathrm{d}t} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \tag{213.2}$$

Valoarea eficace a unei mărimi alternative sinusoidale este egală cu amplitudinea împărţită prin $\sqrt{2}$.

Expresia funcţiei sinusoidale poate fi deci pusă şi sub forma:

$$a = \sqrt{2}\,A \sin(\omega t - \alpha). \tag{213.3}$$

In mod obişnuit se notează valorile instantanee ale funcţiilor periodice prin litere mici, valorile eficace prin majuscule, iar amplitudinile prin majuscule cu indicele m (fig. 72).

214. Valoarea eficace a sumei de funcţii sinusoidale de pulsaţii diferite. Fie funcţiile:

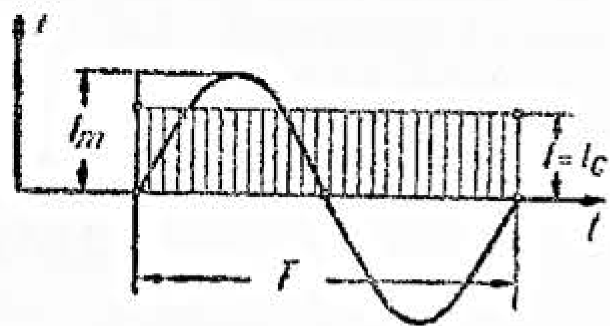


Fig. 72. — Valorile eficace şi maximă a unei funcţii sinusoidale.

$$a_1 = \sqrt{2}\, A_1 \sin(\omega_1 t - \alpha_1)$$
$$a_2 = \sqrt{2}\, A_2 \sin(\omega_2 t - \alpha_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad (214.1)$$
$$a_n = \sqrt{2}\, A_n \sin(\omega_n t - \alpha_n).$$

Valoarea eficace a sumei

$$C = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

va fi

$$A = \sqrt{\frac{1}{nT}\int_0^{nT} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2\, dt} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2}, \quad (214.2)$$

în care nT este un număr întreg de perioade, multiplu comun al perioadelor funcţiilor componente.

Valoarea eficace a sumei de funcţii sinusoidale de pulsaţii diferite este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor eficace ale fiecărei funcţii componente.

215. Valoarea eficace a sumei de funcţii sinusoidale de aceeaşi pulsaţie. Fie funcţiile:

$$a_1 = \sqrt{2}\, A_1 \sin(\omega t - \alpha_1) \quad (215.1)$$
$$a_2 = \sqrt{2}\, A_2 \sin(\omega t - \alpha_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = \sqrt{2}\, A_n \sin(\omega t - \alpha_n)$$

In acest caz, suma

$$C = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (215.2)$$

va fi tot o funcţie sinusoidală şi de aceeaşi pulsaţie ω.

Valoarea eficace a funcţiei rezultante va urma deci norma indicată la suma a două funcţii sinusoidale de aceeaşi pulsaţie sub forma:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 + [2 A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \dots} \quad (215.3)$$

216. Valoarea medie este media aritmetică a valorilor instantanee ale mărimii în timpul unei perioade (fig. 74).

Valoarea medie a curenţilor alternativi simetrici este nulă (fig. 73).

217. Valoarea medie pe o jumătate de perioadă este media valorilor mărimii, în intervalul unei jumătăţi de perioade.

Pentru funcţiile sinusoidale de forma:

$$a = A_m \sin(\omega t - \alpha), \quad (217.1)$$

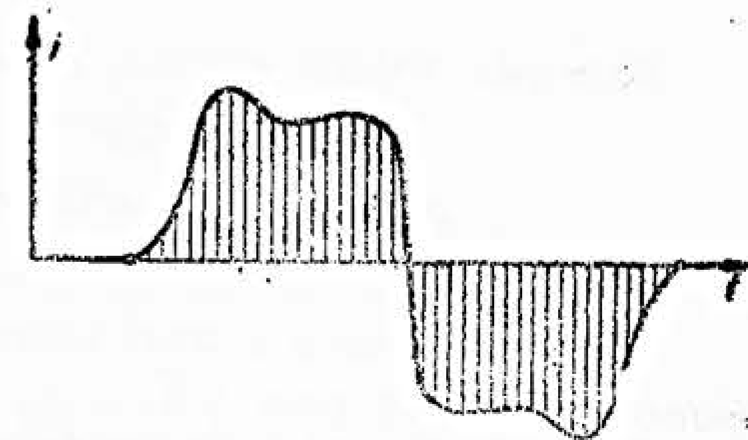


Fig. 73. — Curent alternativ simetric.

valoarea medie pe o jumătate de perioadă este:

$$A_{med} = \frac{1}{T/2}\int_{\alpha/\omega}^{T/2+\alpha/\omega} a\, dt = \frac{1}{T/2}\int_{\alpha/\omega}^{T/2+\alpha/\omega} A_m \sin(\omega t - \alpha) = \frac{2A_m}{\pi} \quad (217.2)$$

218. Factorul de formă este raportul dintre valoarea eficace şi valoarea medie pe o jumătate de perioadă.

Pentru funcţiile sinusoidale de forma:

$$a = A_m \sin(\omega t - \alpha) = \sqrt{2}\, A \sin(\omega t - \alpha) \quad (218.1)$$

factorul de formă este:

$$f = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2A_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \simeq 1{,}11. \quad (218.2)$$

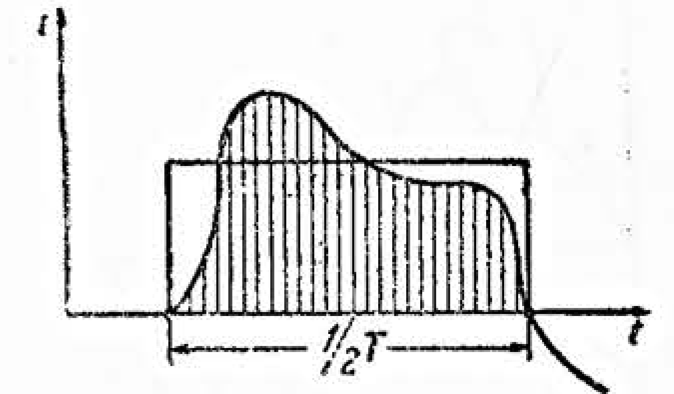


Fig. 74. — Valoarea medie pe o jumătate de perioadă a unei funcţii nesinusoidale.

219. Defazaj. Fie circuitul de curent alternativ (fig. 75), caracterizat prin forţa electromotoare e şi curentul i:

$$e = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t - \alpha) \text{ şi}$$
$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \beta). \quad (219.1)$$

Se numeşte defazaj al acestor funcţii unghiul

$$\varphi = \alpha - \beta$$

220. Faza este unghiul care defineşte poziţia funcţiei sinusoidale, faţă de originea timpurilor.

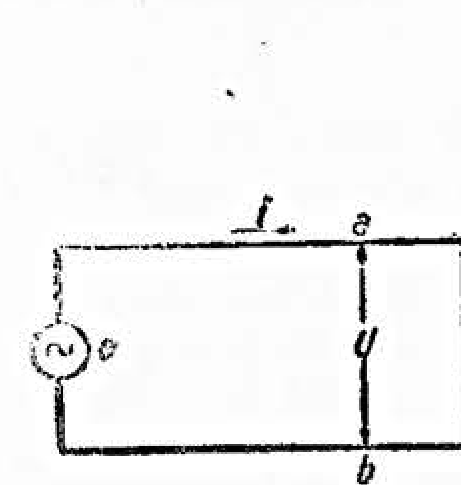


Fig. 75. — Circuit de curent alternativ.

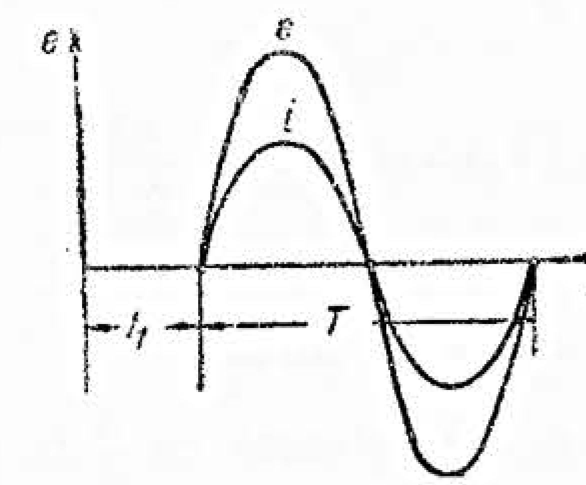


Fig. 76. — Funcţii sinusoidale în fază.

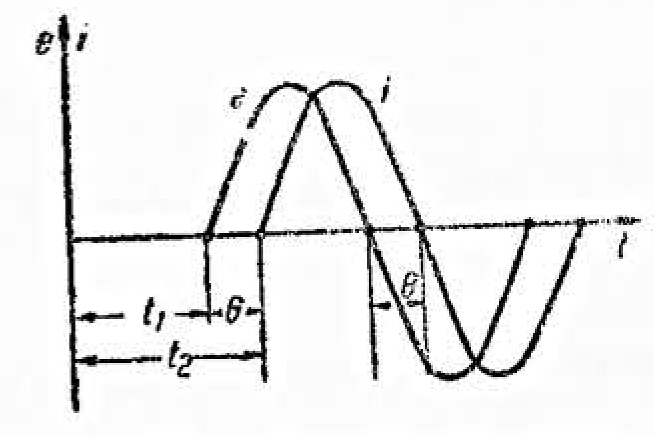


Fig. 77. — Funcţii sinusoidale defazate.

221. Funcţii în fază. Două funcţii e şi i care trec prin zero şi maxim simultan se chiamă că sunt în fază (fig. 76). In acest caz $\alpha = \beta$ şi funcţiile devin:

$$e = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t - \alpha) = \sqrt{2}\, E \sin \omega (t - t_1)$$
$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \alpha) = \sqrt{2}\, I \sin \omega (t - t_1). \quad (221.1)$$

222. Funcţii defazate. Două funcţii e şi i care nu trec simultan prin zero şi maxim se numesc funcţii defazate (fig. 77).

In acest caz:

$$\alpha = \omega t_1 \quad \text{şi} \quad \beta = \omega (t_1 + \theta). \quad (222.1)$$

223. Defazajul de timp este timpul θ, cu care funcţia i este în urmă faţă de funcţia e.

224. Defazajul de unghi este unghiul $\varphi = \omega\theta$, cu care funcţia i este în urmă faţă de funcţia e.

225. Funcţii în cuadratură. Două funcţii e şi i sunt în cuadratură când defazajul de unghi este $\varphi = \frac{\pi}{2}$, sau defazajul de timp este $T/4$ (fig. 78).

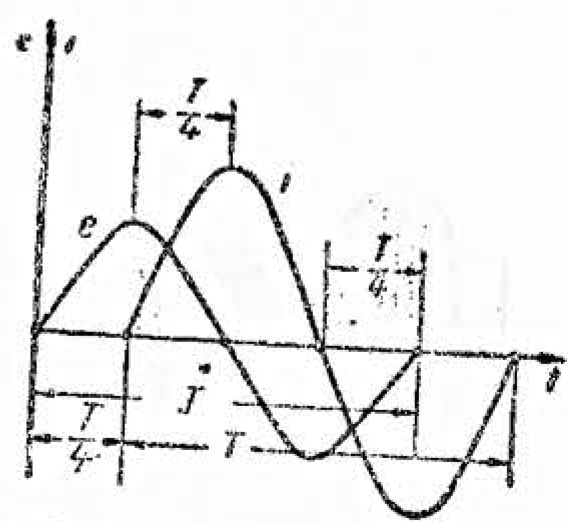


Fig. 78. — Funcţii sinusoidale în cuadratură.

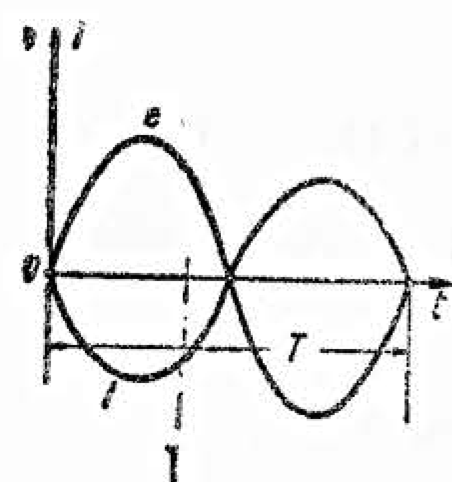


Fig. 79. — Funcţii sinusoidale în opoziţie.

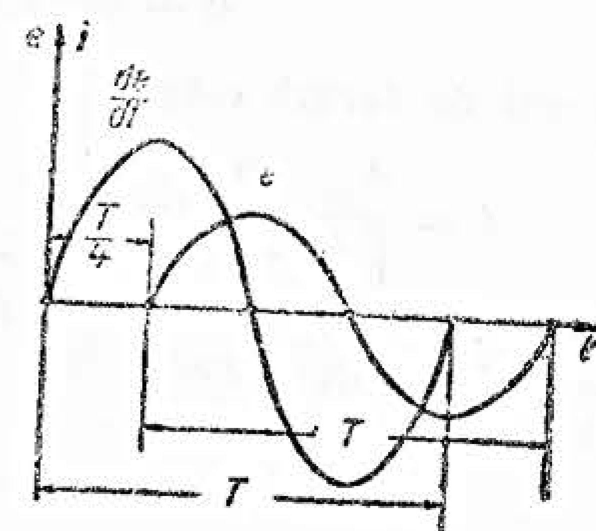


Fig. 80. — Funcţie sinusoidală derivată.

226. Funcţii în opoziţie. Două funcţii e şi i sunt în opoziţie, când defazajul de unghi este $\varphi = \pi$, sau defazajul de timp este $T/2$ (fig. 79).

227. Funcţia derivată a unei funcţii sinusoidale: $a = \sqrt{2}\, A \sin \omega t$ este tot o funcţie sinusoidală defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea funcţiei a şi de amplitudine $\sqrt{2}\, A\omega$ (fig. 80).

$$a' = \sqrt{2}\, A\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (227.1)$$

228. Funcţia integrală a unei funcţii sinusoidale:

$$a = \sqrt{2}\, A \sin \omega t \qquad (228.1)$$

este tot o funcţie sinusoidală (fig. 81) defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma funcţiei a şi de

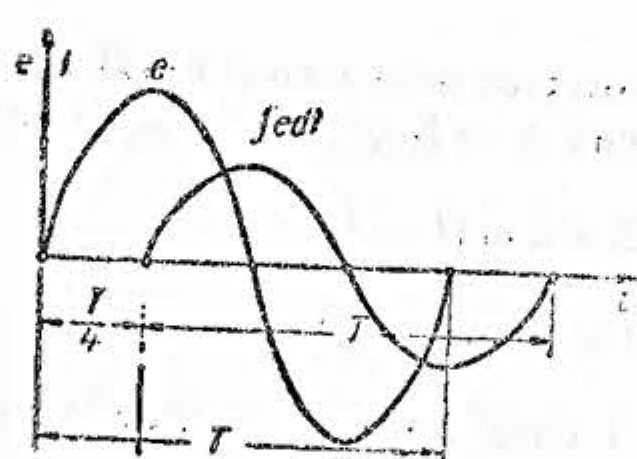


Fig. 81. — Funcţie sinusoidală integrală.

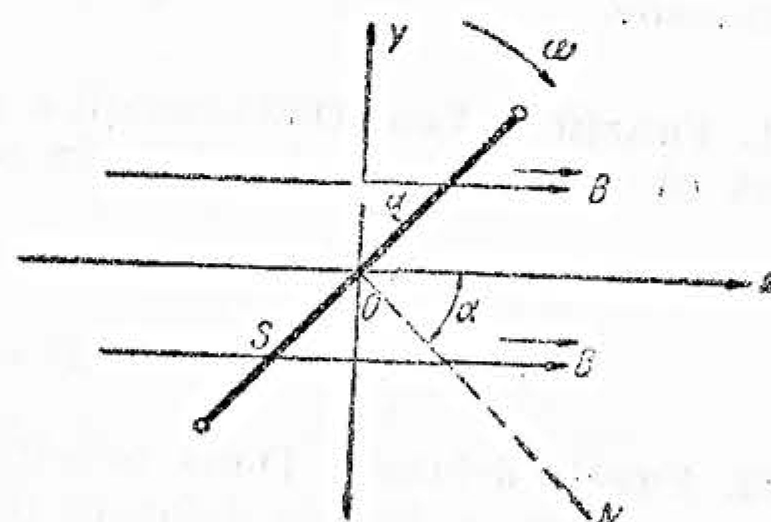


Fig. 82. — Producerea forţei electromotoare alternative.

amplitudine $\frac{\sqrt{2}\, A}{\omega}$, adoptându-se valoarea 0 pentru constanta de integrare.

$$\int a dt = \frac{\sqrt{2}\, A}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (228.2)$$

K. Circuite de curent alternativ în regim sinusoidal

229. Producerea forţelor electromotoare sinusoidale. Fie un circuit plan simetric în raport cu axa zz' şi situat în câmpul uniform B (fig. 82).

Fie ox direcţia liniilor de inducţie, α unghiul pe care îl face axa ox cu normala ON la planul circuitului, iar S, suprafaţa acestui circuit.

Fluxul care străbate circuitul este:

$$\varphi = BS \cos \alpha = \Phi_m \cos \alpha$$

în care s'a notat: $\Phi_m = BS$ fluxul maxim.

Dacă circuitul se roteşte în jurul axei oz cu viteza uniformă ω, pentru momentul oarecare t,

$$\alpha = \omega t,$$

în care s'a luat ca origine a timpurilor, momentul când planul circuitului este perpendicular pe direcţia câmpului.

Fluxul va avea expresia:

$$\varphi = \Phi_m \cos \omega t. \qquad (229.1)$$

Între extremităţile circuitului presupus întrerupt, se poate măsura o forţă electromotoare de inducţie:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = \Phi_m \omega \sin \omega t \qquad (229.2)$$

$$e = E_m \sin \omega t$$

în care s'a notat $\Phi_m \omega = E_m$.

230. Ecuaţia generală a circuitului cu rezistenţa R şi inductanţa L. Fie circuitul cu rezistenţa R şi inductanţa L, la bornele căruia se aplică o forţă electromotoare variabilă e.

Dacă circuitul este închis, se stabileşte un curent i variabil. Acest curent i produce el însuşi un flux variabil Li, astfel încât variaţia Ldi în timpul infinit mic dt produce o forţă electromotoare $-L\frac{di}{dt}$ care, conform legii lui Lenz, tinde să se opună variaţiei curentului şi, prin urmare, forţei electromotoare e.

Forţa electromotoare rezultantă va avea expresia:

$$e' = e - L\frac{di}{dt}.$$

Luând în considerare toate forţele electromotoare, se poate aplica legea lui Ohm şi deci:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = e.$$

Dacă forţa electromotoare e are expresia sinusoidală $E_m \sin \omega t$ atunci:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E_m \sin \omega t = \sqrt{2}\, E \sin \omega t. \qquad (230.1)$$

Aceasta este ecuaţia generală care defineşte intensitatea curentului într'un circuit de o rezistenţă R şi inductanţă L, supus la o forţă electromotoare:

$$E_m \sin \omega t = \sqrt{2}\, E \sin \omega t.$$

Ecuaţia diferenţială este liniară de gradul 1, cu coeficienţi constanţi şi membrul al doilea

Integrarea ecuaţiei (230.1) conduce la:

$$i = \frac{\sqrt{2}\,E}{R^2 + L^2\omega^2}(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + Ce^{-\frac{R}{L}t} \qquad (230.2)$$

în care C este o constantă care depinde de condiţiile iniţiale.

231. Regimul tranzitoriu şi regimul permanent. Se constată că valoarea curentului instantaneu i se compune din doi termeni:

— un termen periodic $y = \frac{E_m}{R^2 + L^2\omega^2}(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t)$ (231.1)

— şi un termen exponenţial: $y_1 = Ce^{-\frac{R}{L}t}$. (231.2)

Termenul y_1 descreşte continuu, ajungând la un moment dat să poată fi neglijat faţă de termenul y.

Acest timp este cu atât mai mic cu cât cantitatea $\frac{L}{R}$ este mai mică.

Cantitatea $\frac{L}{R}$ se numeşte « constantă de timp ».

Se pot distinge două regimuri, pentru curent:

— un regim de stabilire a curentului, sau regimul tranzitoriu, al cărui studiu face obiectul unui capitol special;

— un regim periodic permanent, în care curentul este reprezentat printr'o funcţie periodică de timp.

Regimul permanent este independent de condiţiile iniţiale.

In cele ce urmează făcând abstracţie de regimul tranzitoriu, se va nota prin i curentul din regimul permanent.

232. Curent watat şi curent dewatat. La rândul său, în regimul permanent, curentul se compune din doi termeni:

$$i_1 = \frac{E_m R}{R^2 + L^2\omega^2}\sin \omega t = \frac{\sqrt{2}\,ER}{R^2 + L^2\omega^2}\sin \omega t; \qquad (232.1)$$

$$i_2 = \frac{E_m L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\cos \omega t = \frac{\sqrt{2}\,EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (232.2)$$

Curentul $i = i_1 + i_2$ poate fi considerat ca rezultând din suprapunerea celor doi curenţi i_1 şi i_2.

Curentul i_1, în fază cu forţa electromotoare $E_m \sin \omega t$ se mai numeşte *curent watat*, iar curentul i_2 defazat cu $\frac{\pi}{2}$ în urmă faţă de forţa electromotoare se numeşte *curent dewatat*.

233. Reactanţa. Cantitatea $L\omega$ care are aceeaşi dimensiuni cu o rezistenţă, se numeşte « *reactanţă* ». Deşi tot de dimensiunea unei rezistenţe, reactanţa este mai complexă. Ea depinde nu numai de constituţia proprie a circuitului, ci şi de perioada forţei electromotoare alternative la care este supus circuitul.

234. Impedanţa. Dacă în loc de a considera curentul total i ca o suprapunere a curenţilor i_1 şi i_2, se exprimă curentul total i, se obţine:

$$\frac{E_m}{R^2 + L^2\omega^2}(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

în care:

$$\frac{RE_m}{R^2 + L^2\omega^2} = I_m \cos\varphi = \sqrt{2}\,I \cos\varphi;$$

$$\frac{L\omega E_m}{R^2 + L^2\omega^2} = I_m \sin\varphi = \sqrt{2}\,I \sin\varphi;$$

şi deci:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} \qquad (234.1)$$

şi

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

Cantitatea $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ care intervine în ecuaţia curentului se numeşte « *impedanţă* ».

Impedanţa unui circuit format dintr'o rezistenţă în serie cu reactanţa este egală cu rădăcina pătrată din suma pătratelor rezistenţei şi ale reactanţei. Geometric este ipotenuza unui triunghi dreptunghic, având ca laturi rezistenţa şi reactanţa.

Din cele enunţate mai sus, rezultă că dacă o forţă electromotoare sinusoidală cu valoarea eficace E este aplicată la bornele unui circuit de o rezistenţă R şi o inductanţă L, ea produce un curent alternativ de aceeaşi perioadă, a cărui intensitate eficace este egală cu $\frac{E}{Z}$, curentul fiind defazat în urmă cu unghiul φ.

235. Căldura desvoltată de un curent alternativ într'un conductor. Cantitatea totală de căldură desvoltată de curentul alternativ nu este riguros proporţională cu timpul. Curentul fiind de forma:

$$i = I_m \sin \omega t = \sqrt{2}\,I \sin \omega t, \qquad (235.1)$$

cantitatea de căldură va fi exprimată de:

$$q = R\int_0^{\tau} i^2\,dt = RI^2\tau - \frac{RI^2}{\omega}\Big|\sin 2\omega t\Big|_0^{\tau}. \qquad (235.2)$$

Pentru $\tau = T$ al doilea termen se anulează.

Curba care reprezintă q în funcţie de t se construeşte adăugând la ordonatele dreptei: $q_1 = R I^2 \tau$ sinusoida

$$q_2 = -\frac{RI^2}{\omega}\sin 2\omega t,$$

a cărei perioadă este $T/2$. Fluctuaţia cantităţilor de căldură explică fluctuaţia lămpilor cu incandenscenţă alimentate cu curenţi alternativi.

Această fluctuaţie este cu atât mai aparentă cu cât frecvenţa este mai mică, filamentul mai fin şi căldura specifică mai mică.

236. Interpretarea geometrică a ecuaţiei care defineşte curentul i. Curentul i produs de forţa electromotoare $E_m \sin \omega t$ într'un circuit de rezistenţa R şi inductanţa L este:

$$i = \frac{E_m}{Z^2}[R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t] = \frac{E_m}{Z^2}\left[R \sin \omega t + L\omega \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad (236.1)$$

şi poate fi deci considerat ca suma a două funcţii armonice de aceeaşi perioadă şi prezentând o diferenţă de fază $\pi/2$.

Se trasează

$$\overline{OA} = \frac{E_m R}{Z^2} = \frac{\sqrt{2}\,ER}{Z^2}$$

şi în întârziere cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ se trasează

$$\overline{AB} = \frac{E_m L\omega}{Z^2} = \frac{\sqrt{2}\,EL\omega}{Z^2}$$

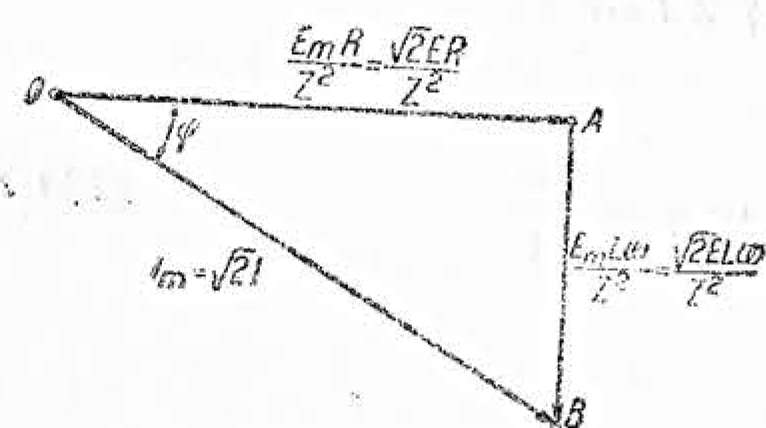


Fig. 83. – Diagrama curenţilor.

Suma geometrică a acestor cantităţi va da $\overline{OB}$. Rezultă că $\overline{OB}$ reprezintă în mărime intensitatea maximă a curentului iar unghiul φ reprezintă defazajul acestui curent faţă de tensiune.

— Vectorul $\overline{OA}$ este curentul maxim în fază;

— Vectorul $\overline{AB}$ este curentul maxim în cuadratură.

Din figura 83 rezultă,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{L\omega}{R}$$

$$\overline{OB} = I_m = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{E_m}{Z} = \frac{\sqrt{2}\,E}{Z}$$

iar valoarea eficace a curentului devine $I = \frac{E}{Z}$.

In construcţia grafică precedentă s'au folosit rezultatele analizei algebrice. Ecuaţia fundamentală

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E_m \sin \omega t = \sqrt{2}\,E \sin \omega t$$

se poate rezolva grafic direct (fig. 83 bis).

Primul termen Ri poate fi reprezentat prin vectorul RI_m, termenul al doilea prin vectorul $L\omega I_m$, defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de primul. Ecuaţia arată că rezultanta $\overline{OB}$ reprezintă cel de al doilea membru.

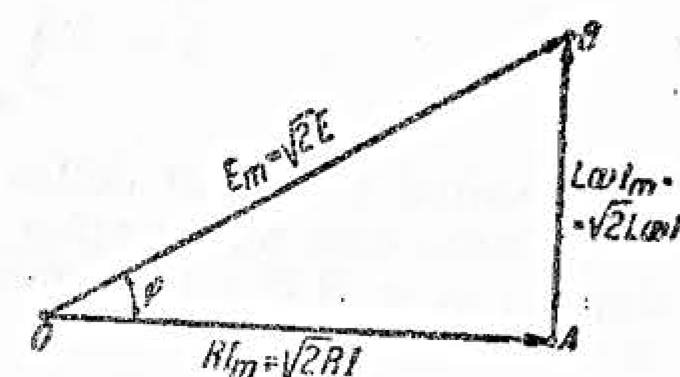


Fig. 83 bis. – Reprezentarea grafică a ecuaţiei: $Ri + L\frac{di}{dt} = E_m \sin \omega t$.

Fiecare din cele două construcţii grafice are caracterul ei particular.

In prima construcţie, curentul se descompune în două componente, una în fază cu forţa electromotoare şi alta în cuadratură.

In a doua construcţie, forţa electromotoare se descompune în două componente, din care una RI_m în faza cu curentul şi alta $L\omega I_m$ în cuadratură cu el.

237. Diferenţa de potenţial alternativă. In loc de a considera un circuit închis, căruia i se aplică o forţă electromotoare alternativă, se consideră o porţiune $\overline{AB}$ străbătută de un curent alternativ (fig. 84).

Intre aceste două puncte se produce o diferenţă de potenţial:

$$u = U_m \sin \omega t = \sqrt{2}\,U \sin \omega t. \qquad (237.1)$$

Dacă R este rezistenţa porţiunii $\overline{AB}$ a conductorului, iar L inductanţa în serie, rezultă:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} = U_m \sin \omega t = \sqrt{2}\,U \sin \omega t. \qquad (237.2)$$

Fig. 84. – Diferenţă de potenţial alternativă.

Se regăseşte astfel o ecuaţie de aceeaşi formă cu ecuaţia fundamentală, cu deosebirea că în membrul al doilea nu mai figurează forţa electromotoare, ci o diferenţă de potenţial.

Intensitatea curentului va fi exprimată astfel:

$$i = \frac{U_m \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{\sqrt{2}\,U \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}. \qquad (237.3)$$

Prin L se notează inductanţa aceleiaşi porţiuni $\overline{AB}$ care intervine ca şi cum ar fi în serie cu rezistenţa R.

238. Impedanţa conductorilor în serie. Impedanţa în cazul curenţilor alternativi joacă un rol asemănător rezistenţei în curentul continuu. Totuşi, este o diferenţă importantă între proprietăţile rezistenţei şi ale impedanţei.

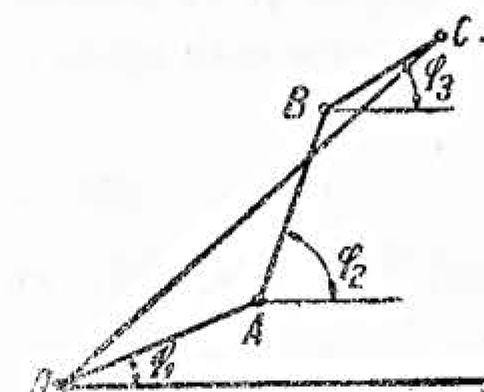


Fig. 85. – Diagrama impedanţelor în serie.

In timp ce rezistenţa mai multor conductori, în serie este egală cu suma rezistenţelor acestor conductori, impedanţa mai multor conductori în serie nu este în general egală cu suma algebrică a impedanţelor acestor conductori.

Fie $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$ rezistenţele şi $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ inductanţele conductorilor astfel încât rezistenţa totală să fie:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots R_n \qquad (238.1)$$

şi inductanţa totală L:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n. \qquad (238.2)$$

Impedanţa totală este:

$$\sqrt{(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)^2 + (L_1 + L_2 + \ldots + L_n)^2\omega^2}, \qquad (238.3)$$

în timp ce suma impedanţelor are ca valoare:

$$\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2} + \sqrt{R_2^2 + L_2^2\omega^2} + \sqrt{R_3^2 + L_3^2\omega^2} + \cdots + \sqrt{R_n^2 + L_n^2\omega^2}. \qquad (238.4)$$

Expresiile (238.3) şi (238.4) nu sunt egale decât în cazul particular când:

$$\frac{L_1\omega}{R_1} = \frac{L_2\omega}{R_2} = \ldots = \frac{L_n\omega}{R_n}, \qquad (238.5)$$

adică atunci când constantele de timp ale tuturor conductorilor în serie ar fi egale.

Reprezentarea geometrică indică acelaşi lucru. (fig. 85)

Fie faza curentului originea de fază. Diferenţele de potenţial la bornele impedanţelor 1, 2, 3,...n vor fi reprezentate respectiv prin vectorii, $\overline{OA} = U_1 = IZ_1$ $\overline{AB} = U_2 = IZ_2$, etc., iar unghiurile φ_1, φ_2, φ_n, etc. vor fi definite prin:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L_1\omega}{R_1} \; ; \; \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L_2\omega}{R_2} \ldots \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{L_n\omega}{R_n} \tag{238.6}$$

Diferenţa de potenţial rezultantă va fi: $\overline{OC} = U = IZ$.

Se vede că:

$$\overline{OC} < \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC}$$

sau

$$U < U_1 + U_2 + \ldots$$

sau încă

$$IZ < IZ_1 + IZ_2 + \ldots \qquad + IZ_n.$$

$$Z < Z_1 + Z_2 + \ldots \qquad + Z_n.$$

şi deci impedanţa totală a unui număr de conductori în serie este mai mică decât suma algebrică a impedanţelor acestor conductori.

Acest lucru rezultă dealtfel şi din exprimarea curentului I sub forma

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}} = \frac{U_2}{\sqrt{R_2^2 + L_2^2\omega^2}} = \ldots = \frac{U}{\sqrt{(\Sigma R)^2 + (\Sigma L\omega)^2}} \tag{238.7}$$

Ori este evident că U nu este egal cu $U_1 + U_2 + \ldots$

În schimb însă impedanţa Z, fiind reprezentată prin ipotenuza unui triunghi dreptunghi poate fi considerată ca având o semnificaţie vectorială şi se notează cu $\overline{Z}$. In acest caz suma vectorială a mai multor impedanţe în serie este egală cu expresia vectorială a impedanţei totale:

$$\overline{Z} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3} + \ldots \tag{238.8}$$

239. Circuit cuprinzând R, L, C. Fie porţiunea de circuit $\overline{AB}$ (fig. 86) cuprinzând în serie:

— un conductor $\overline{AC}$ de o rezistenţă R_1 şi de o inductanţă L_1;

— un condensator $\overline{CD}$ de o capacitate C;

— un conductor $\overline{DB}$ de o rezistenţă R_2 şi de o inductanţă L_2.



Fig. 86. — Circuit R, L, C în curent alternativ.

La bornele circuitului se aplică între punctele $\overline{AB}$ o diferenţă de potenţial sinusoidală,

$$u = U_m \sin \omega t = \sqrt{2}\, U \sin \omega t. \tag{239.1}$$

Deşi circuitul AB comportă un condensator, el va fi totuşi străbătut de un curent alternativ care corespunde încărcărilor şi descărcărilor succesive ale condensatorului.

Orice circuit întrerupt într'un punct printr'un izolant opune un obstacol de netrecut curentului continuu, în timp ce lasă să treacă curentul alternativ, cu atât mai mult cu cât capacitatea este mai mare.

Se poate deci spune că curentul alternativ străbate condensatorul, menţionând că în izolant curentul este de natura unei deplasări electrice.

Dacă în timpul dt, o cantitate dq de electricitate pozitivă soseşte pe armătura C, intensitatea $\overline{AC}$ fiind

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{239.2}$$

în acelaşi timp dt, o cantitate dq de electricitate negativă se deplasează pe armătura D.

Fie v_A, v_C, v_D, v_B, potenţialele instantanee în punctele A, C, D, B. Intre A şi C se poate scrie

$$v_A - v_C = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \tag{239.3}$$

şi între D, B,

$$v_D - v_B = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \tag{239.4}$$

Sarcina q a condensatorului va fi:

$$q = C\,(v_C - v_D); \quad v_C - v_D = \frac{q}{C} \tag{239.5}$$

Adunând ecuaţiile (239.3); (239.4) şi (239.5) se obţine:

$$u = v_A - v_B = (R_1 + R_2)\, i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \tag{239.6}$$

în care $R = R_1 + R_2$ şi $L = L_1 + L_2$. Deoarece $i = \dfrac{dq}{dt}$,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = u, \tag{239.7}$$

ceeace se mai poate scrie

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{du}{dt}. \tag{239.8}$$

Curentul comportă şi în acest caz un regim variabil (tranzitoriu), depinzând de condiţiile iniţiale, care nu se va studia aici şi un regim permanent.

Rezolvând această ecuaţie diferenţială se obţine valoarea curentului în regim permanent care este:

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \text{ şi } \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \tag{239.9}$$

ceeace se deduce din (239.6), (239.7) sau (239.8) dacă se ţine seama şi de $u = U_m \sin \omega t$, iar impedanţa Z este:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \tag{239.10}$$

Defazajul este pozitiv când curentul este defazat în urma tensiunii, adică $L\omega > \dfrac{1}{C\omega}$ şi negativ când curentul este defazat înaintea tensiunii şi deci când $L\omega < \dfrac{1}{C\omega}$.

240. Reprezentarea grafică a ecuației:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{du}{dt}\cdot \tag{240.1}$$

Se ia ca origine de fază, faza curentului i (fig. 87).

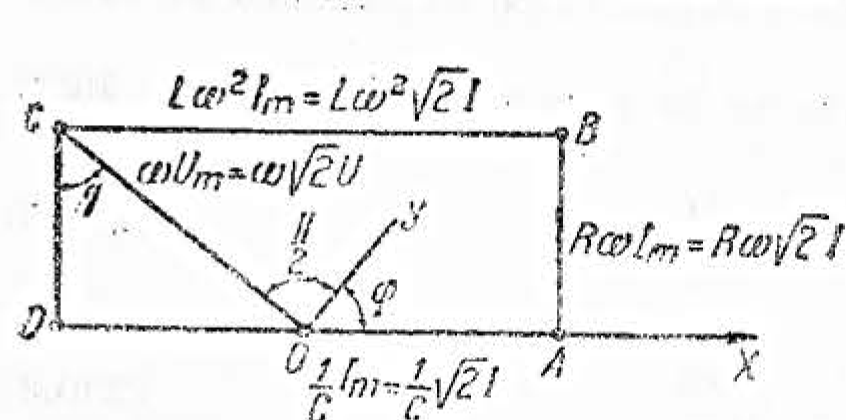


Fig. 87. — Reprezentarea grafică a ecuației circuitului serie R, L, C.

Termenul $\frac{1}{C}i$ va fi reprezentat prin vectorul $\overline{OA}=\frac{1}{C}I_m$ după direcția lui ox; termenul $R\frac{di}{dt}$ prin vectorul $\overline{AB}$ și în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de ox; termenul $L\frac{d^2i}{dt^2}$ prin vectorul $\overline{BC}$ egal cu $L\omega^2 I_m$ în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de ox. Vectorul $\overline{OC}$ egal cu ωU_m va reprezenta pe $\frac{du}{dt}$ astfel încât:

$$\overline{OC}^2=\overline{OD}^2+\overline{DC}^2=I_m^2\left[\omega^2\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2+R^2\omega^2\right]$$

$$U_m^2=I_m^2\left[\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2+R^2\right] \text{ și } \operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\widehat{OCD}=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}$$

și deci valoarea eficace $I=\dfrac{U}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$.

Observații. Din expresia curentului rezultă că, făcând abstracție de defazaj, o capacitate simplă C, fără rezistență sau inductanță, intercalată între două puncte, echivalează cu o conductanță $C\omega$. Rezultă că o capacitate finită echivalează cu un scurt-circuit pentru frecvențele foarte mari. Dimpotrivă pentru frecvențele joase, un condensator de mică capacitate se comportă ca un circuit deschis sau întrerupt.

Dacă dielectricul condensatorului nu este perfect izolant și are o conductanță (inversul rezistenței) egală cu G, se poate substitui condensatorului real un condensator fictiv, perfect izolant, de aceeași capacitate, în paralel cu un conductor de o conductanță G. Curentul care străbate condensatorul va fi defazat înaintea tensiunii cu $\pi/2$. Curentul care străbate conductorul, egal cu UG, va fi în fază cu tensiunea U. Curentul total va rezulta din suprapunerea celor doi curenți și va avea valoarea:

$$I=U\sqrt{C^2\omega^2+G^2},$$

fiind defazat înaintea tensiunii U cu unghiul θ dat de:

$$\operatorname{tg}\theta=C\omega/G.$$

Prezența unei conductanțe G în lama izolantă antrenează o pierdere de putere sub formă de căldură GU^2.

241. Rezistențe și reactanțe în paralel. Fie o rezistență R, o inductanță L și o capacitate C, montate în paralel între firele unei linii căreia i se aplică o tensiune sinusoidală $u=\sqrt{2}\,U\sin\omega t$ (fig. 88).

În acest caz, valoarea eficace a curentului i debitat de tensiunea u este:

$$I=U\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{L\omega}-C\omega\right)^2} \tag{241.1}$$

iar valoarea instantanee i:

$$i=\sqrt{2}\,U\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{L\omega}-C\omega\right)^2}\sin(\omega t-\varphi), \tag{241.2}$$

în care φ este unghiul de defazaj între U și I, definit prin:

$$\operatorname{tg}\varphi=R\left(\frac{1}{L\omega}-C\omega\right). \tag{241.3}$$

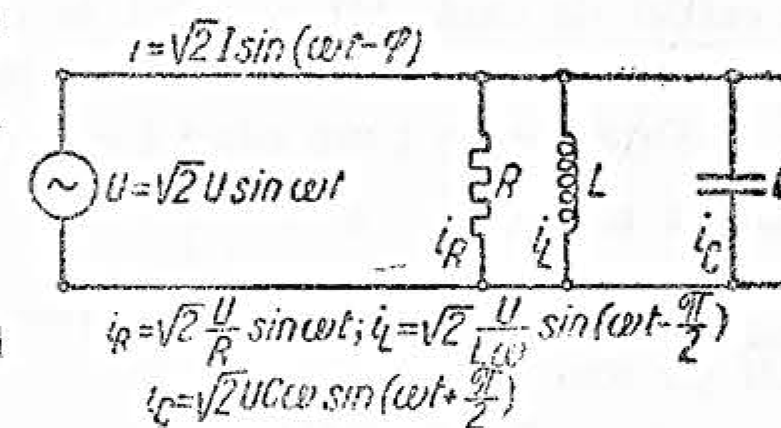


Fig. 88. — Rezistențe și reactanțe în paralel.

Curentul I este defazat în urma lui U când $\frac{1}{L\omega}>C\omega$ și invers.

În cazul particular când nu există nici efect inductiv și nici capacitiv, atunci:

$$I=\frac{U}{R} \quad \text{și} \quad \varphi=0, \tag{241.4}$$

deoarece:

$$C=0 \quad \text{și} \quad L=\infty:$$

L. Metode de calcul în curenții alternativi

242. Clasificare. În calculele regimurilor de curenți alternativi sinusoidali se întrebuințează metode bazate pe principii diferite, care se întrebuințează de la caz la caz; aceste metode sunt:

- metoda analitică;
- metoda cinematică;
- metoda geometrică grafică;
- metoda vectorială;
- reprezentarea prin mărimi complexe;
- metoda separației puterilor.

243. Metoda analitică. Se scriu ecuațiile problemei în valori instantanee. Variabila poate fi forța electromotoare sau curentul i.

Fie:

$$e=\sqrt{2}\,E\sin\omega t \tag{243.1}$$

variabila independentă și deci faza forței electromotoare este și origine de fază. Celelalte tensiuni și curenți vor fi exprimate sub forma:

$$i_1=\sqrt{2}\,I_1\sin(\omega t-\varphi_1);$$
$$i_2=\sqrt{2}\,I_2\sin(\omega t-\varphi_2);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$i_n=\sqrt{2}\,I_n\sin(\omega t-\varphi_n); \tag{243.2}$$
$$u_1=\sqrt{2}\,U_1\sin(\omega t-\psi_1);$$
$$u_2=\sqrt{2}\,U_2\sin(\omega t-\psi_2);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n=\sqrt{2}\,U_n\sin(\omega t-\psi_n).$$

Introducând aceste expresii în ecuaţiile respective şi identificând, se deduc valorile necunoscutelor:

$$I_1, I_2 \ldots I_n;\quad U_1, U_2 \ldots U_n;\quad \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n \quad \text{şi} \quad \psi_1, \ldots \psi_n.$$

244. Metoda cinematică. Fie funcţia sinusoidală de forma

$$a = \sqrt{2}\, A \sin(\omega t - \alpha) = \sqrt{2}\, A \cos(\omega t - \alpha - \pi/2)$$

şi cercul de rază $\overline{OM} = A\sqrt{2}$ în care direcţia diametrului este axa de referinţă, iar $\overline{OM}$ se roteşte în lungul cercului cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 89).

Originea de timp când $t = 0$ corespunde momentului când raza $\overline{OM}$ face cu axa ox unghiul $\left(-\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

În momentul t, căruia îi corespunde unghiul $(\omega t - \alpha - \pi/2)$ proiecţia razei $\overline{OM}$ pe axa ox este:

$$\text{pr. } \overline{OM} = \overline{OM'} = \sqrt{2}\, A \cos\left(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, A \sin(\omega t - \alpha)$$

şi deci proiecţia razei pe axa ox reprezintă funcţia sinusoidală a.

Pulsaţia este chiar viteza unghiulară de rotaţie a razei.

Perioada T a funcţiei sinusoidale este timpul în care raza $\overline{OM}$ face o rotaţie complectă. O altă funcţie sinusoidală:

$$b = \sqrt{2}\, B \sin(\omega t - \beta) = \sqrt{2}\, B \cos(\omega t - \beta - \pi/2)$$

de aceeaşi pulsaţie va fi reprezentată de proiecţia pe axa ox a razei $\overline{ON} = \sqrt{2}\, B$ care se roteşte tot cu viteza ω şi în urmă faţă de $\overline{OM}$ cu unghiul φ dat de:

$$\varphi = \beta - \alpha.$$

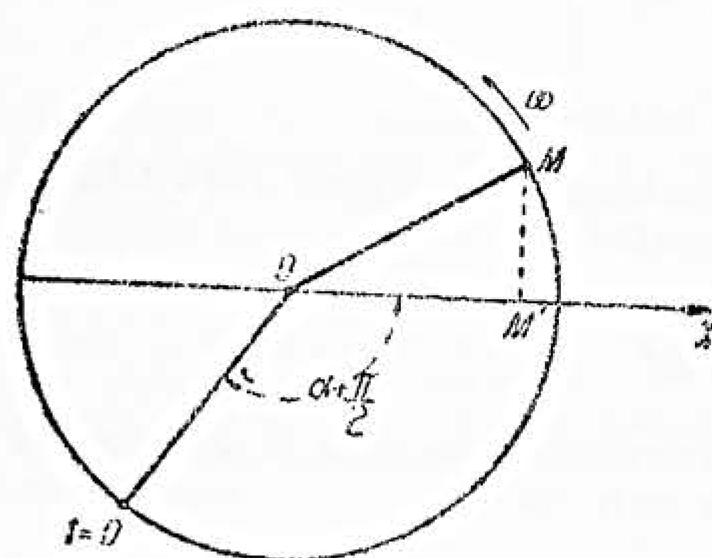


Fig. 89. — Reprezentarea cinematică a funcţiilor sinusoidale.

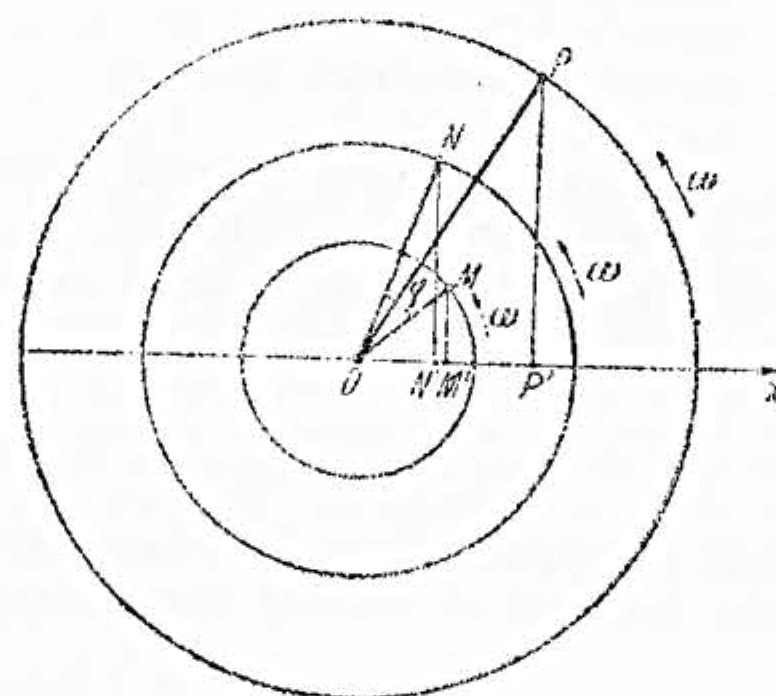


Fig. 90. — Suma a două funcţii sinusoidale de aceeaşi pulsaţie.

245. Suma a două funcţii a şi b va fi tot o funcţie sinusoidală de pulsaţie ω. Rezultanta geometrică OP a lui $\overline{OM}$ şi $\overline{ON}$ se roteşte tot cu viteza ω şi proiecţia pe axa ox va fi (fig. 90):

$$\text{pr. } \overline{OP} = C = \sqrt{2}\, C \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, C \sin(\omega t - \varphi),$$

în care $\sqrt{2}\, C = OP$.

În reprezentarea grafică a unei funcţii sinusoidale, raza rotitoare a cărei proiecţie reprezintă suma a două funcţii sinusoidale elementare este diagonala paralelogramului construit pe razele rotitoare ale căror proiecţii reprezintă funcţiile sinusoidale componente.

246. Aplicaţia 1. Produsul a două funcţii sinusoidale de aceeaşi pulsaţie. Fie funcţiile

$$a_1 = A_1 \sin \omega t$$
$$a_2 = A_2 \sin(\omega t - \varphi). \qquad (246.1)$$

Produsul $p = a_1 a_2$ este de forma:

$$p = a_1 a_2 = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos\varphi - \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos(2\omega t - \varphi) \qquad (246.2)$$

Produsul a două funcţii sinusoidale comportă un termen constant $\frac{1}{2} A_1 A_2 \cos\varphi$ şi un termen de pulsaţie 2ω: $-1/2\, A_1 A_2 \cos(2\omega t - \varphi)$.

Rezultă că produsul a două funcţii sinusoidale nu poate fi reprezentat cinematic.
Totuşi, într'o epură cinematică specială, acest produs poate fi reprezentat în modul următor: (fig. 91): Fie,

după axa ox, $\overline{OA} = p = \dfrac{A_1 A_2}{2} \cos\varphi$ şi după axa oy, $\overline{OB} = q = \dfrac{A_1 A_2}{2} \sin\varphi$.

Rezultanta lui $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$ este un vector $\overline{OO_1}$ de lungimea $A_1A_2/2$. Din punctul O_1 se trasează cercul de rază $\dfrac{A_1 A_2}{2}$ iar punctul M se roteşte pe acest cerc cu viteza unghiulară 2ω astfel încât, la momentul $t = 0$, M este în M_0.

Proiecţia $\overline{OM_1}$ a punctului M pe axa ox este:

$$\overline{OM_1} = \overline{OA} - \overline{AM_1} = \overline{OO_1} \cos\varphi - \overline{O_1M} \cos(2\omega t - \varphi) \;\therefore\; \overline{OM_1} = \frac{A_1 A_2}{2} \cos\varphi - \frac{A_1 A_2}{2} \cos(2\omega t - \varphi)$$

şi deci egală cu produsul p al funcţiilor sinusoidale $a_1\, a_2$.

Produsul p este deci suma proiecţiei unui vector fix $\overline{OO_1}$ şi a proiecţiei vectorului mobil $\overline{O_1M}$.

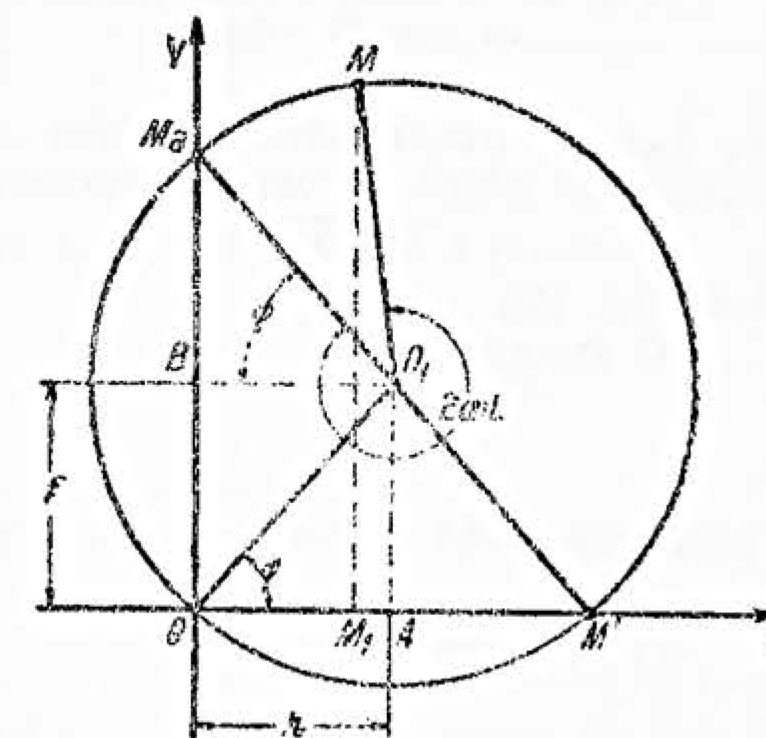


Fig. 91. — Produsul a două funcţii sinusoidale de aceeaşi pulsaţie.

247. Aplicaţia 2. Suma a două funcţii sinusoidale de pulsaţii diferite. Fie funcţiile:

$$a_1 = A_1 \cos \omega_1 t,$$
$$a_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi). \qquad 247.1$$

Prima poate fi considerată ca proiecţia pe axul fix ox a vectorului $\overline{OM}$ de lungimea A_1, făcând cu axul ox unghiul $\omega_1 t$ şi prin urmare rotindu-se cu viteza ω_1 în jurul punctului O (fig. 92).

A doua funcţie este proiecţia pe acelaşi ax a vectorului $\overline{ON}$ făcând cu axa ox unghiul $\omega_2 t - \varphi$ şi prin urmare rotindu-se cu viteza ω_2 în jurul punctului O.

Rezultanta este un vector $\overline{OP}$. Dacă se roteşte ansamblul figurii în jurul punctului O cu o viteză unghiulară egală şi de semn contrar cu ω_1, vectorul $\overline{OM}$ devine fix şi vectorul $\overline{ON}$ se roteşte cu viteza $\Omega = \omega_2 - \omega_1$.

Se ia ca axă de referinţă direcţia $\gamma'\gamma$ a vectorului $\overline{OM}$. Vectorul $\overline{OP}$ este atunci suma vectorului fix $\overline{OM}$ şi a vectorului $\overline{MP}$ echipolent cu $\overline{ON}$, făcând cu $\overline{OM}$ unghiul $\Omega t - \varphi$ şi prin urmare rotindu-se în jurul lui M cu viteza Ω.

Rezultanta $\overline{OP}$ apare deci ca o funcţie sinusoidală de pulsaţia Ω dar de amplitudine şi fază relativă, variabilă în timp.

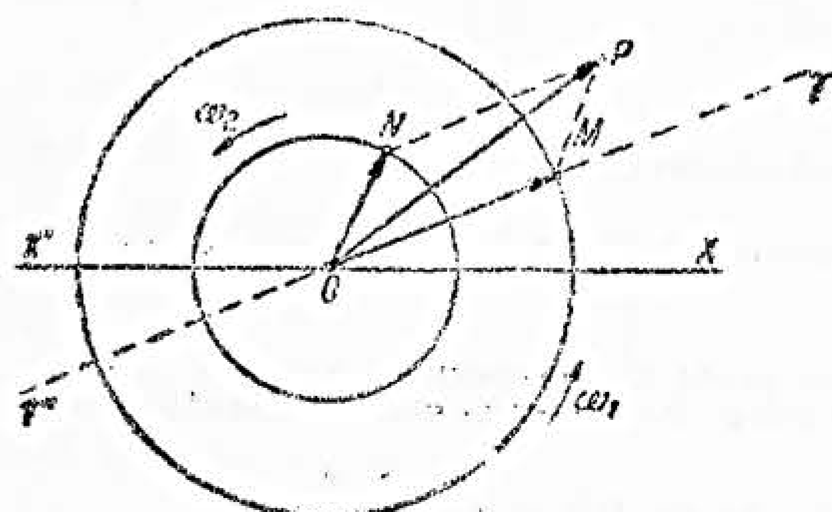
Proiectând pe $\overline{OP}$ pe $\gamma'\gamma$ se obţine:

$$\overline{OP'} = \overline{OM} + \overline{MP} \cos(\Omega t - \varphi) = A_1 + A_2 \cos(\Omega t - \varphi),$$
$$\overline{P'P} = A_2 \sin(\Omega t - \varphi),$$
$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OP'}^2 + \overline{P'P}^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\Omega t - \varphi)},$$
$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}} = \frac{A_2 \sin(\Omega t - \varphi)}{A_1 + A_2 \cos(\Omega t - \varphi)},$$

Funcţia rezultantă este atunci

$$a = a_1 + a_2 = \overline{OP} \cos (\omega_1 t + \Psi),$$

$$a = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\Omega t - \varphi)} \times \cos \left(\omega_1 t + \operatorname{arctg} \frac{A_2 \sin (\Omega t - \varphi)}{A_1 + A_2 \cos (\Omega t - \varphi)}\right). \quad (247.3)$$



Amplitudinea rezultantei variază periodic trecând prin maximum egal cu $A_1 + A_2$ şi prin minimum egal cu $A_1 - A_2$. Frecvenţa acestei variaţii periodice este egală cu diferenţa frecvenţelor funcţiilor componente.

In cazul particular $A_1 = A_2$, adică atunci când ambele funcţii componente au aceeaşi amplitudine,

$$\overline{OP} = A_1 \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos (\Omega t - \varphi)} = 2 A_1 \cos \frac{\Omega t - \varphi}{2}$$

şi

$$\operatorname{tg} \Psi = \operatorname{tg} \frac{\Omega t - \varphi}{2}$$

deci

$$a = 2 A_1 \cos \frac{\Omega t - \varphi}{2} \cos \left[\frac{(\omega_1 + \omega_2) t - \varphi}{2}\right] \quad (247.4)$$

Funcţia a este o funcţie sinusoidală de pulsaţie $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ şi de amplitudine variabilă sinusoidală cu o pulsaţie $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

Fig. 92. — Suma a două funcţii de pulsaţii diferite.

248. Metoda geometrică grafică. Dacă două funcţii sinusoidale au aceeaşi pulsaţie, dar de amplitudini şi faze diferite, se poate face abstracţie de partea comună ωt adică de rotaţia vectorilor în raport cu axa fixă ox.

Vectorii $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OP}$, pot fi consideraţi fieşi asemănător forţelor în mecanică (fig. 92).

O funcţie:

$$a_1 = A \sin \omega t \quad (248.1)$$

a cărei diferenţă de fază cu axa originii este nulă va fi reprezentată prin segmentul $\overline{OA}$ de lungimea A (fig. 93).

O altă funcţie:

$$b = B \sin (\omega t - \varphi) \quad (248.2)$$

a cărei diferenţă de fază cu axa originii este φ va fi reprezentat prin vectorul $\overline{OB}$ de lungimea B făcând cu axa ox unghiul φ (fig. 93).

Suma celor două funcţii va fi reprezentată prin rezultanta geometrică $\overline{OC}$ a lui $\overline{OB}$ şi $\overline{OA}$. Amplitudinea va fi egală cu lungimea $\overline{OC}$, iar faza relativă faţă de origine cu ψ.

In general, amplitudinea şi faza relativă a sumei funcţiilor armonice de amplitudini A_1, A_2, A_3 şi A_4 şi faze relative φ_1, φ_2, φ_3 şi φ_4 faţă de aceeaşi origine ox va fi rezultanta $\overline{OD}$ (fig. 94).

Vectorii A_1, A_2... pot reprezenta fie valorile maxime, fie valorile eficace la scara corespunzătoare.

249. Aplicaţia 3. Sistem de distribuţie având într'o latură o intensitate constantă. Fie montajul din fig. 95 cuprinzând o rezistenţă cu o inductanţă în paralel, iar ansamblul lor în serie cu un condensator C. La bornele circuitului se aplică o diferenţă de potenţial eficace U. Se cer

condiţiile pe care trebue să le satisfacă L şi C pentru ca intensitatea curentului în ramura MRN să fie constantă şi independentă de R.

Se ia ca origine a fazelor faza tensiunii între punctele M şi N (fig. 96).

Se va nota cu I intensitatea eficace a curentului în ramura MRN. Deoarece această ramură nu este inductivă, curentul I va fi în fază cu tensiunea $\overline{OA} = RI$.

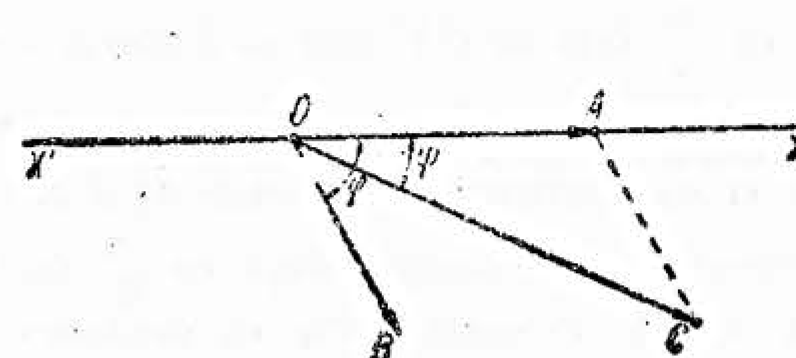


Fig. 93. — Reprezentarea grafică a funcţiilor sinusoidale.

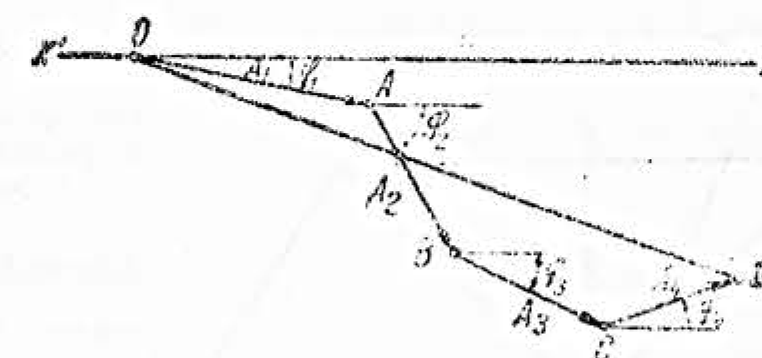


Fig. 94. — Reprezentarea grafică a sumei funcţiilor sinusoidale.

Curentul în ramura MLN va fi defazat în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de diferenţa de potenţial; va fi reprezentat prin vectorul:

$$\overline{OB} = \frac{RI}{L\omega}.$$

Curentul total care străbate condensatorul va fi egal cu suma curentului I şi a curentului $\frac{RI}{L\omega}$, aceşti doi curenţi fiind defazaţi unul faţă de celălalt cu $\frac{\pi}{2}$.

Curentul I, dacă ar fi singur, ar da naştere, între punctele A şi M, la o diferenţă de potenţial egală cu $\frac{I}{C\omega}$ şi în întârziere cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de I. Această diferenţă de potenţial va fi reprezentată prin vectorul

$$\overline{OC} = \frac{I}{C\omega}.$$

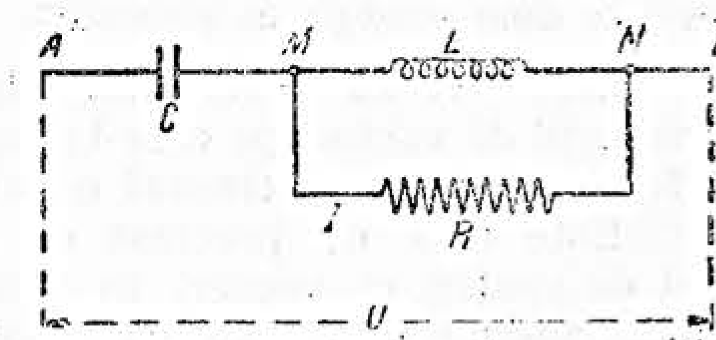


Fig. 95. — Distribuţie sub intensitate constantă.

Curentul $\frac{RI}{L\omega}$ dacă ar fi singur, ar da naştere la o diferenţă de potenţial $\frac{RI}{CL\omega^2}$ în urmă cu $\frac{\pi}{2}$, adică reprezentată prin:

$$\overline{OD} = \frac{RI}{CL\omega^2}.$$

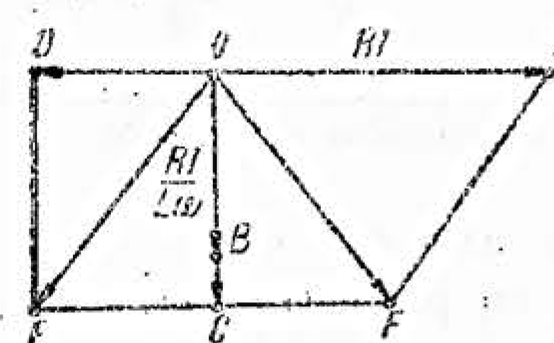


Fig. 96. — Reprezentarea grafică a tensiunilor şi a curenţilor în sistemul cu intensitate constantă.

Diferenţa de potenţial la bornele condensatorului va fi deci rezultanta vectorilor $\overline{OC}$ şi $\overline{OD}$, adică $\overline{OE}$. Diferenţa de potenţial dintre bornele A şi B va fi rezultanta vectorilor $\overline{OA}$ şi $\overline{OE}$, adică $\overline{OF}$

$$U^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OC}^2 + (\overline{EF} - \overline{EC})^2 = \frac{I^2}{C^2\omega^2} + \left(RI - \frac{RI}{CL\omega^2}\right)^2$$

$$U^2 = \frac{I^2}{C^2\omega^2} + R^2 I^2 \left(1 - \frac{1}{CL\omega^2}\right).$$

Pentru ca curentul I, să fie constant şi independent de R, trebue ca:

$$1 - \frac{1}{CL\omega^2} = 0.$$

Dacă această condiţie este îndeplinită, atunci:

$$\overline{OD} = \overline{OA}$$

şi prin urmare vectorul $\overline{OF}$ se confundă cu $\overline{OC}$. In acest caz curentul în ramura MRN este defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de diferenţa de potenţial U şi egal cu $UC\omega$.

Dacă rezistența R ar fi montată în paralel cu condensatorul, C, diagrama ar fi modificată ca în fig. 97.

Fie $\overline{OA}$ diferența de potențial la bornele condensatorului:

$$\overline{OA} = RI.$$

Curentul în condensator va fi defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ față de $\overline{OA}$, egal cu $RIC\omega$ și reprezentat de vectorul $\overline{OB}$. Curentul care trece prin inductanța L poate fi considerat ca sumă a curenților $RIC\omega$ și I.

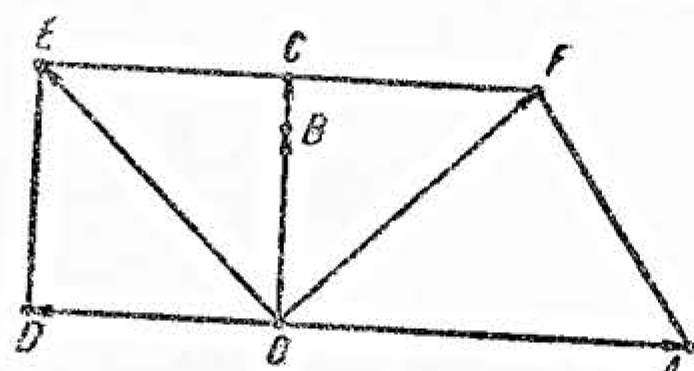


Fig. 97. — Diagrama curenților și tensiunilor într'un sistem cu intensitate constantă, (variantă).

Curentul I va da naștere între punctele M și N la o diferență de potențial $\overline{OC}$, defazată înainte cu $\frac{\pi}{2}$ față de curent și egală cu $IL\omega$. Curentul $RIC\omega$ va produce o cădere de tensiune $\overline{OD}$, defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului și egală cu $RIC\omega L\omega$.

Diferența de potențial între punctele M și N va fi deci $\overline{OE}$, iar diferența de potențial totală va fi $\overline{OF}$, rezultantă a lui $\overline{OE}$ și $\overline{OA}$:

$$\overline{OF}^2 = \overline{OC}^2 + (\overline{EF} - \overline{EC})^2$$

$$U^2 = I^2L^2\omega^2 + (RI - RICL\omega^2)^2 = I^2L^2\omega^2 + R^2I^2(1 - CL\omega^2)^2.$$

Pentru ca I să fie independent de R trebue ca

$$CL\omega^2 = 1$$

care este chiar condiția de rezonanță.

250. Metoda vectorială. Metodele geometrice și analitice scot în evidență caracterul de vectori pe care-l poate căpăta reprezentarea tensiunilor și a curenților. În felul acesta se precizează o nouă metodă de calcul, metoda vectorială.

Este însă de precizat că aici vectorii nu sunt de spațiu, ci vectori în timp, cu aplicarea unor principii vectoriale care pot soluționa anumite probleme.

Fie un vector oarecare de tensiune sau curent $\overline{OA}$ (fig. 98).

Raportându-l la un sistem de axe ox, oy, se obțin cele două proiecții $\overline{OB} = A'$ și $\overline{OC} = A''$. Notând cu $\bar{x}$ și $\bar{y}$ vectorii unitari pe cele două axe, se poate scrie:

$$\overline{A} = \bar{x}\,A' + \bar{y}\,A''. \qquad (250.1)$$

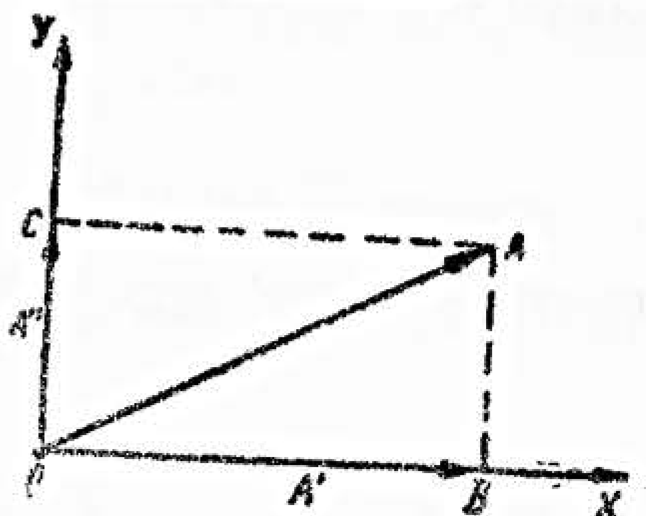


Fig. 98. — Reprezentarea vectorială a funcțiilor sinusoidale.

Fie de exemplu două aparate în serie, străbătute de un curent care se raportă la un sistem de axe ox, oy.

Tensiunea la bornele unuia dintre aparate este U, cu proiecțiile U_1', U_1'', iar tensiunea la bornele celuilalt aparat U_2, cu proiecțiile U_2' și U_2''.

Vectorul $\overline{U_1}$ poate fi scris sub forma,

$$\overline{U_1} = \bar{x}\,U_1' + \bar{y}\,U_1'' \qquad (250.2)$$

$$\overline{U_2} = \bar{x}\,U_2' + \bar{y}\,U_2'', \qquad (250.3)$$

iar tensiunea totală $\overline{U}$ prin:

$$\overline{U} = \overline{U_1} + \overline{U_2} = \bar{x}, U_1' + \bar{y}, U_1'' + \bar{x}\,U_2' + \bar{y}\,U_2'' = \bar{x}\,(U_1' + U_2') + \bar{y}\,(U_1'' + U_2'') \qquad (250.4)$$

Pentru precizarea mai completă a vectorilor față de axa de origine de fază, se obișnuește și următoarea notație:

$$\overline{U_1} = U_1\underline{|\alpha} = \bar{x}U_1\cos\alpha + \bar{y}U_1\sin\alpha = \bar{x}U_1' + \bar{y}U_1'' \qquad (250.5)$$

în care U_1 este amplitudinea vectorului, iar α unghiul său de defazaj față de originea de faze.

Dacă unui vector $\overline{U_1}$ i se dă o rotație cu un unghi β, se obține un nou vector $\overline{U_2}$, care se poate nota:

$$\overline{U_2} = U_1\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta} = U_1\underline{|\alpha+\beta} = \bar{x}U_1\cos(\alpha+\beta) + \bar{y}U_1\sin(\alpha+\beta). \qquad (250.6)$$

251. Aplicația 4. Fie circuitul având o rezistență R în serie cu o inductanță L și străbătut de un curent de valoarea eficace I:

$$\overline{I} = I\underline{|0} = \bar{x}\,I. \qquad (251.1)$$

Tensiunea la bornele rezistenței va fi:

$$\overline{U_1} = U_1\underline{|0} = RI\underline{|0} = \bar{x}\,RI. \qquad (251.2)$$

Tensiunea la bornele inductanței va fi:

$$\overline{U_2} = U_2\underline{|\pi/2} = L\omega I\underline{|\pi/2} = \bar{y}L\omega I. \qquad (251.3)$$

Tensiunea totală va fi:

$$\overline{U} = \overline{U_1} + \overline{U_2} = U\underline{|\varphi} = \bar{x}RI + \bar{y}L\omega I, \qquad (251.4)$$

a cărei amplitudine este,

$$U = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}, \qquad (251.5)$$

iar argument

$$\varphi = \operatorname{arctg} L\omega/R. \qquad (251.6)$$

252. Aplicația 5. Fie circuitul având o capacitate C în paralel cu o impedanță $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ la bornele căreia se aplică tensiunea luată ca origine de fază U:

$$\overline{U} = U\underline{|0} = \bar{x}U. \qquad (252.1)$$

Curentul în capacitate va fi:

$$\overline{I_1} = I_1\underline{|+\pi/2} = C\omega U\underline{|+\pi/2} = \bar{y}C\omega U. \qquad (252.2)$$

Curentul în impedanța Z va fi:

$$\overline{I_2} = I_2\underline{|-\varphi} = \frac{U}{Z}\underline{|-\varphi} = \bar{x}\frac{U}{Z}\cos\varphi - \bar{y}\frac{U}{Z}\sin\varphi; \qquad (252.3)$$

însă,

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{și} \quad \sin\varphi = \frac{L\omega}{Z}, \quad \text{deci}$$

$$\overline{I_2} = \bar{x}\frac{UR}{Z^2} - \bar{y}\frac{UL\omega}{Z^2}, \qquad (252.4)$$

iar curentul total:

$$\overline{I} = \overline{I_1} + \overline{I_2} = \bar{x}\frac{UR}{Z^2} + \bar{y}\,U\left(C\omega - \frac{L\omega}{Z^2}\right) \qquad (252.5)$$

în care valoarea eficace este:

$$|I| = U\sqrt{R^2/Z^4 + (L\omega/Z^2 - C\omega)^2}. \qquad (252.6)$$

253. Aplicarea metodei mărimilor complexe la funcțiile sinusoidale. Precizări asupra reprezentării vectoriale. S'a arătat că orice funcție sinusoidală de forma:

$$a = \sqrt{2}\,A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (253.1)$$

poate fi reprezentată printr'un vector având ca modul valoarea eficace A, iar ca argument unghiul α, faţă de direcţia axei luată ca origine.

Pentru o anume funcţie sinusoidală, unghiul α are o valoare care depinde de originea arbitrară a timpului de origine definit prin $\alpha = \omega t_0$, în care t_0 este timpul dintre trecerea funcţiei a prin zero în sens urcător şi momentul luat ca origine de timp (fig. 99).

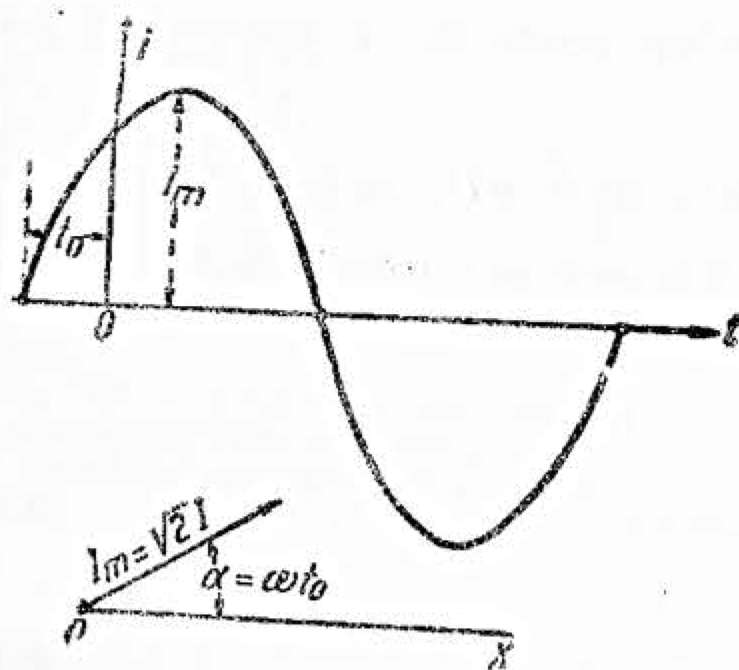


Fig. 99. — Valori instantanee şi reprezentări vectoriale.

Insă totodată, pentru aceeaşi funcţie sinusoidală unghiul α defineşte direcţia axei de origine în reprezentarea vectorială. Rezultă deci că alegerea arbitrară a timpului de origine în reprezentarea valorii instantanee a fixează şi direcţia axei de origine în reprezentarea vectorială a aceleiaşi funcţii prin valoarea sa eficace.

Pe de altă parte, dacă se modifică originea de timp cu un interval θ, astfel încât vechiul timp t să se exprime în funcţie de noul timp t' prin $t = \theta + t'$, atunci funcţia sinusoidală a devine:

$$a = \sqrt{2} A \sin(\omega t' + \alpha') \qquad (253.2)$$

în care:

$$\alpha' = \alpha + \omega\theta,$$

ceeace înseamnă că vectorul $\bar{A}$ va fi reprezentat faţă de o nouă axă de referinţă ox' înclinată cu $\omega\theta$ faţă de vechea axă ox (fig. 100).

In cazul particular, când intervalul de schimbare a originii de timp este $\theta = T/4$, adică un sfert de perioadă, atunci ecuaţia (253.1) devine:

$$a = \sqrt{2} A \sin\left(\omega t' + \alpha + \frac{\omega T}{4}\right) = \sqrt{2} A \sin\left(\omega t' + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (253.3)$$

$$a = \sqrt{2} A \sin(\omega t' + \alpha'),$$

în care $\alpha' = \alpha + \pi/2$ deoarece $\omega T/4 = \pi/2$, ceeace înseamnă că deplasând originea de timp cu un sfert de perioadă, reprezentarea vectorială se raportează la o nouă axă, înclinată cu $\pi/2$ faţă de prima.

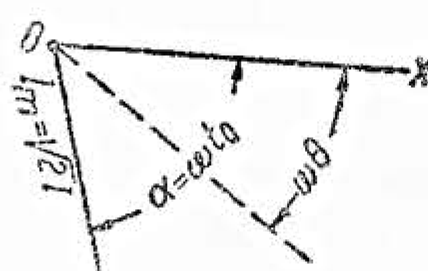


Fig. 100. — Modificarea axei de referinţă.

Relaţia (253.3) se vede că se mai poate scrie:

$$a = \sqrt{2} A \cos(\omega t' + \alpha); \qquad (253.4)$$

adică reprezentarea unei funcţii sinusoidale în cosinus şi cu acelaşi argument α implică faţă de reprezentarea în sinus o modificare a originii de timp cu $T/4$.

Unghiul α este definit ca şi în cazul exprimării funcţiilor sinusoidale în sinus, tot prin expresia $\alpha = \omega t_0$, în care însă de data aceasta t_0 reprezintă timpul dintre trecerea funcţiei a prin maxim pozitiv şi momentul luat ca origine de timp.

In mod invers, alegerea arbitrară a axei de referinţă pentru reprezentarea vectorială implică fixarea originii timpurilor pentru expresia funcţiei sinusoidale corespunzătoare.

254. Introducerea mărimilor complexe. Orice vector $\bar{A}$, raportat la o axă de origine arbitrară OX (fig. 98), poate fi reprezentat prin:

$$\bar{A} = \bar{A}' + \bar{A}'' = \bar{x} A' + \bar{y} A'' = \bar{x} A \cos\alpha + \bar{y} A \sin\alpha, \qquad (254.1)$$

în care $\bar{A}'$ şi $\bar{A}''$ sunt vectorii componenţi ai vectorului $\bar{A}$ în direcţia $\overline{OX}$ şi $\overline{OY}$;

— $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ — vectorii unitari pe aceleaşi direcţii;

— α argumentul vectorului $\bar{A}$ faţă de axa de origine OX.

Expresia (254.1) constitue o reprezentare analitică a vectorului $\bar{A}$.

In interesul calculului însă, se recurge uneori, la o reprezentare simbolică operaţională.

Se notează:

$$\bar{A}' = \bar{x} A' = \bar{x} A \cos\alpha$$

printr'o simplă cantitate:

$$A' = A \cos\alpha,$$

denumită convenţional cantitate reală şi $\bar{A}'' = \bar{y} A \sin\alpha$ printr'o cantitate $A'' = jA \sin\alpha$, denumită convenţional cantitate imaginară, în care se ştie că j este un operator indicând o direcţie a cantităţii zise imaginare, la $\pi/2$ faţă de axa de origine OX.

Operatorul j provoacă o rotaţie cu $\pi/2$ în sensul trigonometric, având totodată proprietăţile:

$$j^2 = -1 \quad ; \quad j^3 = -j \quad ; \quad j^4 = 1.$$

In felul acesta expresia (254.1) devine:

$$\bar{A} = A' + jA'' = A(\cos\alpha + j\sin\alpha), \qquad (254.2)$$

ceeace, cu ajutorul formulei lui Euler, se poate pune şi sub forma:

$$\bar{A} = Ae^{j\alpha} \qquad (254.3)$$

Orice mărime fizică vectorială se poate scrie printr'o mărime complexă. Nu însă totdeauna orice număr complex corespunde unei mărimi fizice vectoriale. Curenţii şi tensiunile sinusoidale în special, fiind funcţii sinusoidale, pot fi reprezentate prin vectori şi deci implicit prin mărimi complexe.

Deoarece unele mărimi care se folosesc în electrotehnică sunt caracterizate printr'o valoare şi printr'o direcţie, aceste mărimi se vor nota ca vectori: $\bar{U}$, $\bar{I}$, $\bar{E}$, etc. Se folosesc însă uneori şi alte notaţii: o săgeată în loc de linioară, litera îngroşată fără linioară sau săgeată, etc. Conform STAS 3087-52 simbolurile mărimilor complexe pot fi scrise barat (cu o linioară) sau nebarat.

In rezumat, în electrotehnică mărimile cu caracter vectorial pot fi reprezentate în variantele:

(a) forma vectorială polară: $\bar{A} = A\,\underline{|\alpha}$;

(b) forma vectorială analitică:

$$\bar{A} = \bar{x} A' + \bar{y} A'' = A(\bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha);$$

(c) forma prin mărimi complexe:

$$\bar{A} = A' + jA'' = A(\cos\alpha + j\sin\alpha) = Ae^{j\alpha}.$$

Aceste trei forme sunt echivalente. Distincţia apare asupra metodelor de calcul şi asupra domeniilor de aplicaţii. Toate formele pot introduce comod noţiunea de rotire cu un unghi ψ. Pentru această operaţie, cea mai simplă este forma (a). Vectorul $\bar{A}$ rotit cu un unghi ψ în planul său devine $\bar{A}' = A\,\underline{|\alpha + \psi}$.

Forma (b) este valabilă şi indicată în sistemul când este mai bine să se aplice metodele de calcul vectorial obişnuit.

Forma (c) se supune la metodele de calcule algebrice ale mărimilor complexe, foarte utile în practica aplicaţiilor electrotehnice.

Tensiunile şi curenţii nesinusoidali pot fi reprezentaţi prin vectori de timp într'un spaţiu cu multiple dimensiuni.

Mărimile electrotehnice cu caracter vectorial se pot exprima în aceiaşi formă ca şi mărimile scalare dacă nu este necesar a se pune în evidenţă caracterul lor vectorial.

255. Operaţii asupra mărimilor complexe. Adoptarea reprezentării prin mărimi complexe permite folosirea numeroaselor operaţii algebrice de calcul asupra numerelor complexe, care sunt arătate în capitolul « *Matematici* ».

256. Domeniul de aplicare în electrotehnică a mărimilor complexe. Principalele mărimi din electrotehnică, care se introduc în calcule sub formă de mărimi complexe, sunt:

α) *Tensiunile sau forţele electromotoare sinusoidale.* Fie o tensiune având valoarea eficace U defazată cu unghiul α faţă de axa de origine. Expresiile sale vectoriale şi complexe sunt:

$$\overline{U} = U \underline{|\alpha} = U(\bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha),$$

$$\overline{U} = U(\cos\alpha + j\sin\alpha) = Ue^{j\alpha} \tag{256.1}$$

Unghiul α are semnul sensului trigonometric. El este deci pozitiv în cazul unui defazaj înaintea axei de origine şi negativ în sens contrar. De exemplu, o tensiune sinusoidală instantanee:

$$u = \sqrt{2}\,U\sin(\omega t - \alpha) \tag{256.2}$$

se scrie sub formă complexă:

$$\overline{U} = U(\cos\alpha - j\sin\alpha) = Ue^{-j\alpha}. \tag{256.3}$$

β) *Curenţii electrici sinusoidali* se exprimă identic tensiunilor. Un curent de valoarea eficace I, defazat cu β faţă de axa de origine, se exprimă prin:

$$\overline{I} = I\underline{|\beta} = I(\bar{x}\cos\beta + \bar{y}\sin\beta); \tag{256.4}$$

$$\overline{I} = I(\cos\beta + j\sin\beta) = Ie^{j\beta}. \tag{256.5}$$

Aceeaşi semnificaţie asupra semnului unghiului β ca în cazul precedent.

Valorile eficace de tensiune şi curent sunt modulele expresiilor complexe respective:

$$I = |\overline{I}| = \sqrt{(I\cos\beta)^2 + (I\sin\beta)^2}. \tag{256.6}$$

γ) *Impedanţa.* Fie un element de circuit constituit dintr'o rezistenţă R în serie cu o inductanţă L, pulsaţia regimului fiind ω. Acest dispozitiv constitue o impedanţă care se poate reprezenta sub formă complexă prin expresia:

$$\overline{Z} = R + jL\omega, \tag{256.7}$$

modulul său fiind:

$$|\overline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}. \tag{256.8}$$

In cazul unui dispozitiv format din rezistenţa R, în serie cu o capacitate C, impedanţa complexă este:

$$\overline{Z} = R - j\frac{1}{C\omega} \tag{256.9}$$

şi ca modul:

$$|\overline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}. \tag{256.10}$$

Când dispozitivul este constituit din R, L, C, în serie, (fig. 100 bis) impedanţa complexă este:

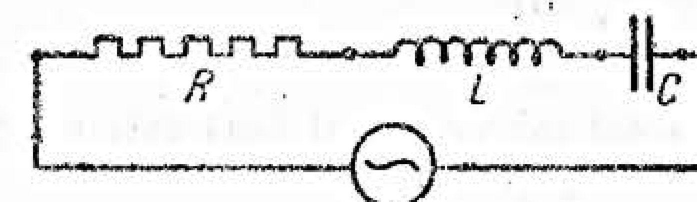
$$\overline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + jX, \tag{256.11}$$

cu modulul:

$$|\overline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \tag{256.12}$$

în care X este reactanţa scrisă sub forma:

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}. \tag{256.13}$$



O atenţie deosebită trebue acordată semnelor corecte care trebue date reactanţelor, conform celor precizate mai sus.

Deasemenea, în calcule trebue făcută o deosebire precisă între impedanţa complexă şi modulul impedanţei (care, prescurtat, se mai numeşte şi impedanţă).

δ) *Admitanţa.* Pe baza definiţiei, admitanţa este inversul impedanţei. Ea se poate reprezenta printr'o mărime complexă de formă:

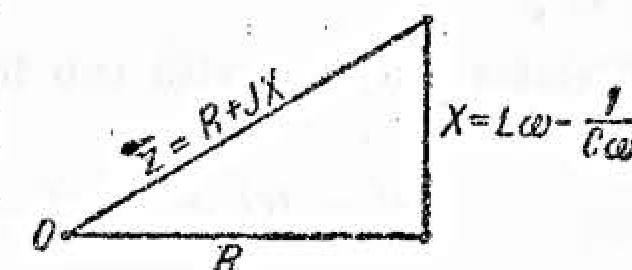


Fig. 100 bis. — Impedanţă complexă.

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}. \tag{256.14}$$

O precizare asupra semnelor este necesară.

Impedanţa vectorială are faza şi deci argumentul unghiular pozitiv atunci când tensiunea este defazată înainte faţă de curent. La admitanţă faza este pozitivă când curentul este defazat înaintea tensiunii. Pe baza definiţiilor date şi a notaţiilor adoptate;

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad \text{este conductanţa}; \tag{256.15}$$

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2}, \quad \text{este susceptanţa},$$

Potrivit precizării de mai sus asupra semnelor:

$$Z = R + jX \text{ şi } \overline{Y} = G - jB, \tag{256.16}$$

când X este de natură inductivă şi curentul defazat în urma tensiunii;

$$Z = R - jX \text{ şi } \overline{Y} = G + jB, \tag{256.17}$$

când X este de natură capacitivă şi curentul defazat înaintea tensiunii.

257. Aplicaţii de calcule prin mărimi complexe în electrotehnică. Pornind dela expresiile fizice ale valorilor instantanee, se poate ajunge la relaţiile dintre

mărimile lor complexe, ceeace caracterizează astfel metoda de calcul respectivă. Se redă câteva exemple de astfel de aplicaţii.

α) *Legea lui Ohm în curent alternativ sinusoidal.* Fie un element de circuit, constituit dintr'o rezistenţă R, o inductanţă L şi o capacitate C, în serie, căruia i se aplică o tensiune sinusoidală având valoarea instantanee u. Curentul produs are valoarea instantanee i (fig. 101).

Se porneşte dela relaţia fizică dintre mărimile instantanee:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt \qquad (257.1)$$

Se scrie fiecare termen sub forma complexă corespunzătoare:

u are expresia complexă $\overline{U}$;

Ri are expresia complexă $R\overline{I}$;

$L\dfrac{di}{dt}$ are expresia complexă $jL\omega\overline{I}$, deoarece valoarea eficace a funcţiei $\dfrac{di}{dt}$ este ωI iar vectorul $L\omega I$ este cu $\pi/2$ înaintea lui I;

$\dfrac{1}{C}\int i dt$ în mod analog are valoarea complexă: $-j\dfrac{\overline{I}}{C\omega}$.

Relaţia (257.1) scrisă sub forma complexă devine deci:

$$\overline{U} = R\overline{I} + jL\omega\overline{I} - j\frac{\overline{I}}{C\omega} = \overline{I}\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]; \qquad (257.2)$$

însă

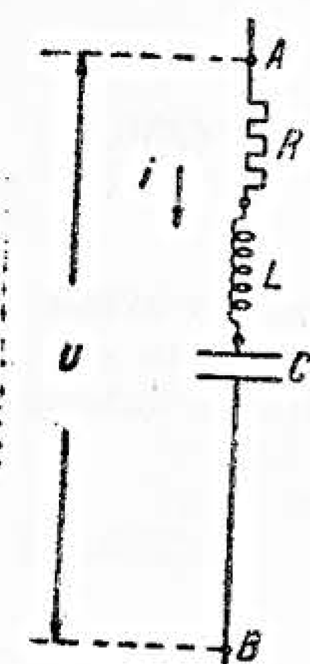


Fig. 101. — Legea lui Ohm în curenţi sinusoidali.

$$R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = \overline{Z}$$

este expresia impedanţei complexe a circuitului şi deci:

$$\overline{U} = \overline{Z}\cdot\overline{I}, \qquad (257.3)$$

ceeace reprezintă legea lui Ohm scrisă pentru curenţii alternativi sinusoidali, prin intermediul mărimilor complexe.

Când $\overline{U}, \overline{Z}, \overline{I}$ reprezintă mărimi complexe, produsele de forma $\overline{Z}\cdot\overline{I}$ nu trebue înţelese nici ca produse vectoriale şi nici ca produse scalare, ci ca produse algebrice de mărimi complexe.

β) *Legile lui Kirchhoff în curenţi sinusoidali.* Prima lege a lui Kirchhoff scrisă pentru fiecare nod prin valori instantanee $\sum i = 0$ conduce la expresia corespunzătoare prin mărimi complexe,

$$\sum \overline{I} = 0.$$

Legea a doua a lui Kirchhoff scrisă sub forma de valori instantanee pentru fiecare circuit al unei reţele este de forma:

$$\sum e - \sum L\frac{di}{dt} = \sum Ri + \sum\frac{1}{C}\int i\, dt,$$

în care e, i, R, L, C, sunt valorile corespunzătoare fiecărei laturi a ochiului respectiv, iar Σ se aplică la totalitatea laturilor aceluiaşi ochi de reţea.

Trecând la expresii complexe, se obţine în mod analog:

$$\sum\overline{E} = \sum\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\overline{I}$$

sau

$$\sum\overline{E} = \sum(\overline{Z}\times\overline{I}), \qquad (257.4)$$

în care $\overline{E}$ şi $\overline{I}$ sunt valorile complexe ale forţei electromotoare şi ale curenţilor din toate laturile reţelei, iar $\overline{Z}$ impedanţa complexă a laturii străbătută de curentul $\overline{I}$.

γ) *Curentul într'o inductanţă L.* Din (257.3) se deduce:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{U}}{jL\omega} = -j\frac{\overline{U}}{L\omega}. \qquad (257.5)$$

Se vede că curentul este defazat la $\pi/2$ în urma tensiunii $\overline{U}$, exprimată prin valoarea sa complexă $\overline{U}$, indiferent care ar fi direcţia ei faţă de axa de origine.

In cazul particular, când $U = U_1 + jU_2$, atunci:

$$\overline{I} = -j(U_1 + jU_2)\frac{1}{L\omega} = \frac{U_2}{L\omega} - j\frac{U_1}{L\omega} \qquad (257.6)$$

iar valoarea sa eficace:

$$|\overline{I}| = I = \sqrt{U_2^2 + U_1^2}\times\frac{1}{L\omega} = \frac{U}{L\omega} \qquad (257.7)$$

δ) *Curentul într'o capacitate C.* Analog se găseşte:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{U}}{-j\dfrac{1}{C\omega}} = j\overline{U}C\omega. \qquad (257.8)$$

Curentul este deci defazat cu $\pi/2$ înaintea tensiunii $\overline{U}$, având valoarea eficace:

$$\overline{I} = I = C\omega U. \qquad (257.9)$$

ε) *Impedanţe în serie.* Fie impedanţele $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ în serie. Scriind aceste impedanţe sub forma complexă $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3, \ldots$ se poate considera că suma lor este echivalentă cu o impedanţă rezultantă $\overline{Z}$, a cărei valoare complexă este:

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 + \ldots \qquad (257.10)$$

Trebue bine observat că relaţia (257.10) este valabilă numai dacă impedanţele se scriu sub formă complexă. La modulele impedanţelor, această expresie nu se aplică decât în cazuri particulare.

θ) *Impedanţe în paralel.* Fie impedanţele $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ dispuse în paralel, având valorile complexe $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3, \ldots$ Impedanţa echivalentă are o valoare complexă $\overline{Z}$, care prin aplicarea legilor lui Kirchhoff este definită prin:

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3} + \ldots \qquad (257.11)$$

Dacă de exemplu este vorba numai de două impedanţe în paralel, atunci impedanţa echivalentă este

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1\,\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1^2 + \bar{Z}_2^2}\,. \tag{257.12}$$

Şi de data aceasta relaţiile sunt valabile numai pentru impedanţele scrise sub forma de mărimi complexe.

ζ) *Evaluarea curentului total* furnizat de o sursă având tensiunea eficace U, asupra unui sistem R, L, C, în paralel. Valoarea complexă a tensiunii sursei este $\bar{U}$.

Curentul în R este: $\bar{I}_1 = \bar{U}/R$; (257.13)

Curentul în L este: $\bar{I}_2 = -j\bar{U}/L\omega$; (257.14)

Curentul în C este: $\bar{I}_3 = j\bar{U}C\omega$. (257.15)

potrivit legii întâi a lui Kirchhoff curentul total are valoarea:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \tag{257.16}$$

Înlocuind curenţii prin valorile de mai sus se obţine

$$\bar{I} = \bar{U}\left[\frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)\right] \tag{257.17}$$

şi valoarea sa eficace este:

$$|\bar{I}| = I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}. \tag{257.18}$$

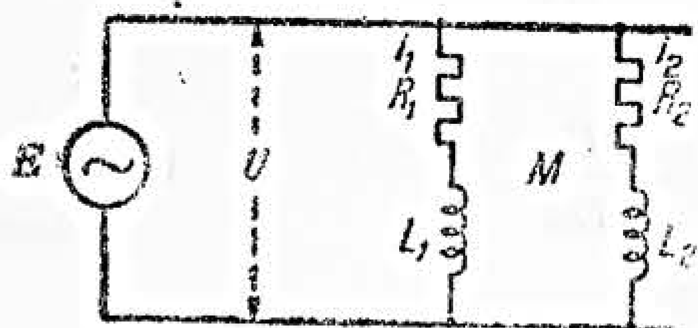


Fig. 102. — Impedanţe în paralel.

η) *Fie date două bobine montate în paralel*, având fiecare câte o rezistenţă şi inductanţă R_1 şi L_1, pentru bobina 1 şi respectiv R_2 şi L_2 pentru bobina 2. Cele două bobine au şi o inductanţă mutuală M. Se cere (fig. 102) condiţia ca la o tensiune u, aplicată între bornele comune AB, curenţii în cele două bobine să fie în cuadratură.

Ecuaţiile între valorile instantanee sunt:

$$U = R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}; \tag{257.19}$$

$$U = R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \tag{257.20}$$

iar în cantităţi complexe sunt:

$$\bar{U} = R_1\bar{I}_1 + jL_1\omega\,\bar{I}_1 + jM\omega\,\bar{I}_2; \tag{257.21}$$

$$\bar{U} = R_2\bar{I}_2 + jL_2\omega\,\bar{I}_2 + jM\omega\,\bar{I}_1. \tag{257.22}$$

Pentru ca I_1 şi I_2 să fie în cuadratură, trebue ca $I_2 = Kj\bar{I}_1$ în care K este o constantă arbitrară. Introducând condiţia în relaţiile complexe, se obţine:

$$\bar{U} = R_1\bar{I}_1 + jL_1\omega\,\bar{I}_1 - KM\omega\bar{I}_1 = (R_1 - KM\omega)\,\bar{I}_1 + jL_1\omega\,\bar{I}_1 \tag{257.23}$$

$$\bar{U} = KjR_2\bar{I}_1 - K\,L_2\omega\,\bar{I}_1 + jM\omega\,\bar{I}_1 = -KL_2\omega\bar{I}_1 + j(KR_2 + M\omega)\bar{I}_1. \tag{257.24}$$

Eliminând pe $\bar{U}$ şi $\bar{I}_1$ se obţine:

$$(R_1 - KM\omega) + jL\omega = -KL_2\omega + j(KR_2 + M\omega). \tag{257.25}$$

ceeace implică:

$$R_1 - KM\omega = -KL\omega, \tag{257.26}$$

$$L_1\omega = KR_2 + M\omega. \tag{257.27}$$

şi apoi prin eliminarea lui K se obţine,

$$(L_1 - M)(M - L_2)\,\omega^2 = R_1R_2. \tag{257.28}$$

258. **Puntea Wheatstone în curenţi alternativi sinusoidali.** Fie puntea Wheatstone din fig. 103. Cele patru laturi ale punţii au rezistenţele R_1, R_2, R_3, R_4 şi reactanţele X_1, X_2, X_3, X_4, (acestea putând cuprinde atât reactanţe inductive cât şi capacitative).

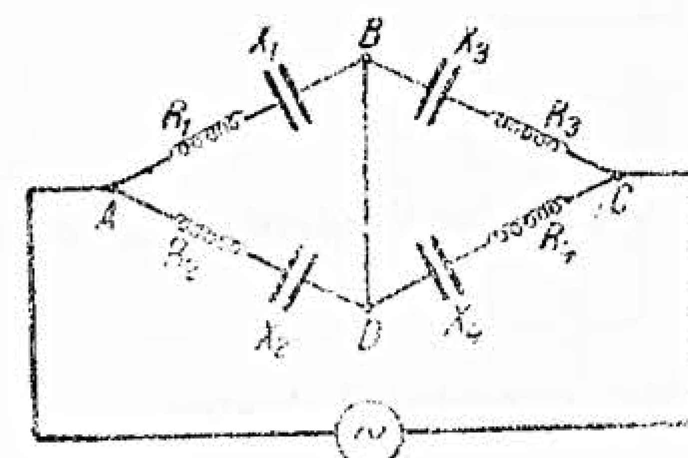


Fig. 103. — Puntea Wheatstone în curenţi alternativi.

Impedanţele celor patru laturi devin:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= R_1 + jX_1;\\ \bar{Z}_2 &= R_2 + jX_2;\\ \bar{Z}_3 &= R_3 + jX_3;\\ \bar{Z}_4 &= R_4 + jX_4.\end{aligned} \tag{258.1}$$

Pentru ca niciun curent să nu străbată diagonala BD, trebue ca:

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_4} \quad \text{sau} \quad \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} = \frac{R_3 + jX_3}{R_4 + jX_4} \tag{258.2}$$

ceeace conduce la condiţia finală:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{X_3}{X_4} \tag{258.3}$$

sau

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{X_1}{X_3} = \frac{X_2}{X_4}. \tag{258.4}$$

259. **Metoda de calcul prin separaţia puterilor.** A se vedea subcapitolul N « Fenomene energetice în curenţi alternativi ».

M. Fenomenul de rezonanţă

260. **Circuitul serie.** Dacă la bornele unui circuit cuprinzând în serie o rezistenţă R, o inductanţă L şi un condensator de capacitatea C, se aplică o forţă electromotoare $e = \sqrt{2}\,E\sin\omega t$, (fig. 104) curentul care circulă prin circuit are valoarea cunoscută:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{260.1}$$

Acest curent este defazat în urmă faţă de forţa electromotoare, cu unghiul φ dat de:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad \therefore \quad \sin\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\therefore \quad \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{260.2}$$

Dacă se îndeplineşte condiţia ca: $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$

$$LC\omega^2 = 1, \tag{260.3}$$

atunci curentul I devine:

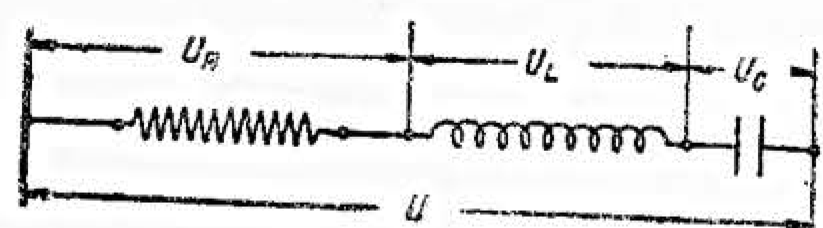


Fig. 104. — Tensiuni la aparate montate în serie.

$$I = \frac{E}{R}. \tag{260.4}$$

Valoarea curentului este maximă. Condiţia $L\,C\omega^2 - 1 = 0$ se numeşte «*condiţie de rezonanţă*». Pentru anumite valori ale inductanţei L şi capacităţii C pulsaţia proprie sau de rezonanţă coincide cu pulsaţia impusă şi astfel se obţine regimul de rezonanţă.

Intr'un regim de rezonanţă, forţa electromotoare aplicată E dă valoarea maximă a curentului, sau, cu alte cuvinte, pentru a produce un curent I, forţa electromotoare este minimă.

Diagrama tensiunilor este aceea indicată în fig. 105.

Tensiunea U_c la bornele condensatorului este egală cu tensiunea la bornele inductanţei, dar defazată faţă de faza lui E cu $+\pi/2$ respectiv $-\pi/2$.

Tensiunile U_l şi U_c pot deveni foarte mari, fiindcă curentul I este maxim. Se pot produce supratensiuni periculoase.

Dacă rezistenţa R scade, tinzând la limita spre zero, se obţine:

$$E = R\,I \to 0.$$

Deci un curent se poate întreţine la rezonanţă într'un dispozitiv cuprinzând inductanţă şi capacitate, fără nicio forţă electromotoare exterioară.

Pulsaţia acestui curent este:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{260.5}$$

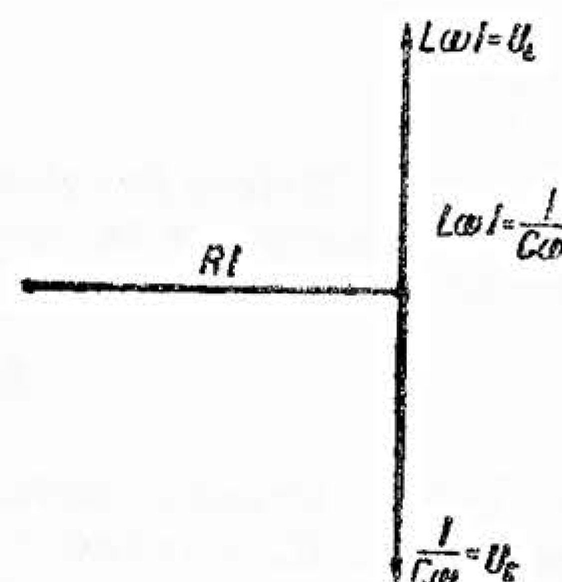


Fig. 105. — Diagrama tensiunilor la aparatele în serie.

Puterile reactive la rezonanţă, în inductanţa L şi în capacitatea C, sunt egale şi de sens contrar, astfel încât forţa electromotoare nu va mai produce nicio putere reactivă.

261. Circuite în derivaţie. Pentru circuitul cuprinzând: rezistenţa R, inductanţa L şi capacitatea C montate în paralel, (fig. 106) curentul I este dat de:

$$I = E\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}. \tag{261.1}$$

Când condiţia de rezonanţă este îndeplinită, $L\,C\,\omega^2 - 1 = 0$, curentul total devine minim

$$I = \frac{E}{R} \tag{261.2}$$

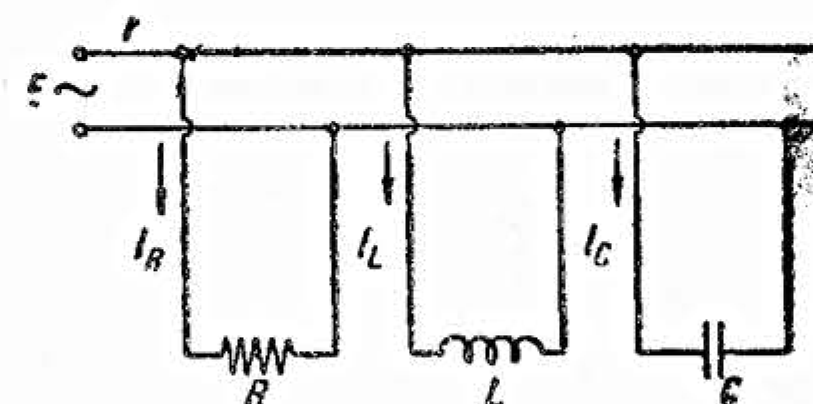


Fig. 106. — Curenţii în aparatele montate în paralel.

Dacă rezistenţa $R \to \infty$ şi deci $I \to 0$, sursa nu mai debitează curent.

Deşi sursa nu mai debitează curent, între inductanţa L şi capacitatea C circulă un curent de pulsaţie:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{261.3}$$

La circuitele în paralel apare pericolul de supracurenţi.

Intre puterile reactive, corespunzând inductanţei L şi capacităţii C, există, asemănător circuitului în serie, fenomenul de compensare.

Diagrama curenţilor este aceea indicată în fig. 107.

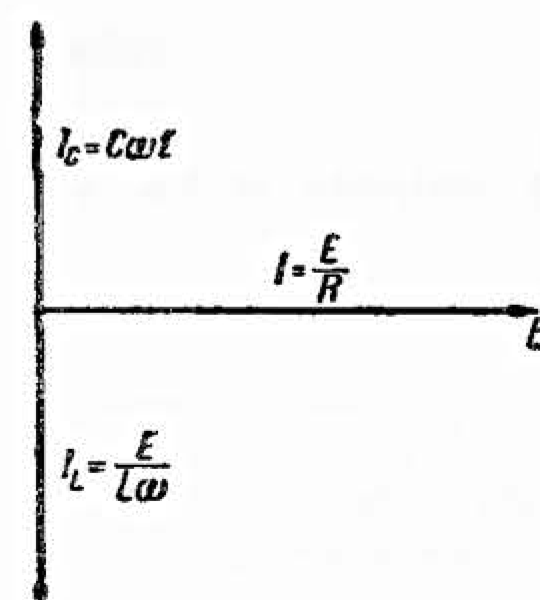


Fig. 107. — Diagrama curenţilor la aparate în paralel.

Vectorii curenţilor capacitiv şi inductiv sunt defazaţi cu $\pi/2$ înainte, respectiv în urmă, faţă de faza forţei electromotoare luată ca origine de fază.

262. Curbe de rezonanţă. Curbele reprezentând variaţia tensiunilor sau a curenţilor care străbat circuitul în funcţie de pulsaţie se numesc curbe de rezonanţă.

α) *Variaţia tensiunii la bornele condensatorului.* Fie circuitul R, L, C, în serie; se cere variaţia tensiunii la bornele condensatorului C şi a defazajului φ dat de:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}, \tag{262.1}$$

în funcţie de pulsaţia ω.

Diferenţa de potenţial la bornele condensatorului C (fig. 108) are valoarea eficace:

$$U = \frac{I}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} \times \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \tag{262.2}$$

Ea va fi defazată cu $\pi/2$ în urmă faţă de I şi prin urmare cu

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \varphi \tag{262.3}$$

faţă de forţa electromotoare aplicată întregului sistem.

Se obţine astfel:

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{R}{\frac{1}{C\omega} - L\omega}, \quad \sin\Psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\cos\Psi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{262.4}$$

Se efectuează schimbările de variabilă:

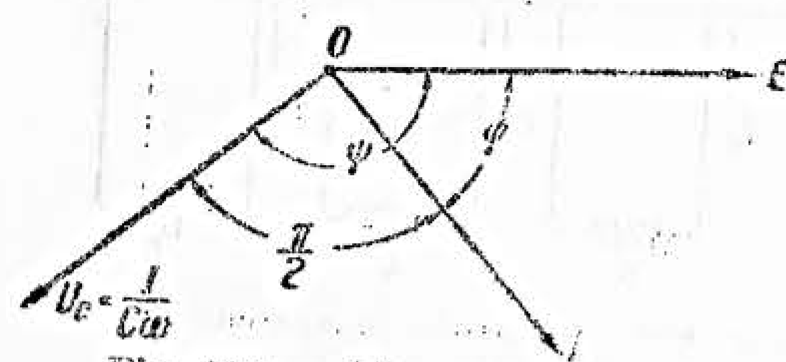


Fig. 108. — Diagrama tensiunilor la bornele condensatorului.

$$\alpha = \omega\sqrt{LC},$$

$$m = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}, \quad \frac{U}{E} = y \tag{262.5}$$

Ecuaţiile (262.2) şi (262.4) devin:

$$y = \frac{U}{E} = \frac{1}{\sqrt{4m^2\alpha^2 + (\alpha^2 - 1)^2}} \quad \therefore \quad \operatorname{tg}\Psi = \frac{2m\alpha}{1 - \alpha^2}$$

$$\cos\Psi = \frac{1 - \alpha^2}{\sqrt{4m^2\alpha^2 + (1 - \alpha^2)^2}}. \tag{262.6}$$

Reprezentarea grafică a lui y în funcţie de α este indicată în fig. 109.

Funcţia y devine maximă pentru:

$$\alpha = \sqrt{1 - 2m^2} \tag{262.7}$$

având în acest caz valoarea:

$$y_m = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}} \tag{262.8}$$

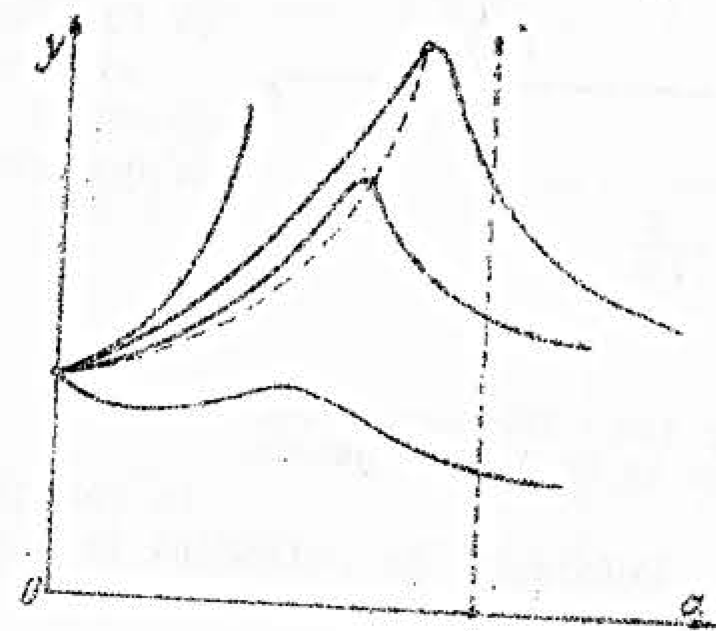


Fig. 109. — Reprezentarea grafică a lui y în funcţie de α.

Dacă rezistenţa este nulă, tensiunea la bornele condensatorului va fi infinit mare pentru:

$$\alpha = 1$$

Dacă $2\,m^2$ este mic faţă de unitate şi deci R^2 este neglijabil faţă de $2\frac{L}{C}$, atunci y este maxim pentru o valoare α, vecină de unitate, adică atunci când pulsaţia ω este vecină de pulsaţia «proprie» a circuitului. Coeficientul de supratensiune tinde în acest caz spre valoarea:

$$\frac{1}{2m} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}. \tag{262.9}$$

Dacă rezistenţa creşte, valoarea maximă a lui y are loc pentru valori din ce în ce mai mici ale pulsaţiei ω.

Dacă m^2 depăşeşte valoarea $\frac{1}{2}$ adică:

$$R > \sqrt{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{262.10}$$

atunci funcţia y rămâne subunitară. La bornele condensatorului nu se mai produc supratensiuni.

β) *Variaţia defazajului* Ψ *în funcţie de* α. Din relaţia:

$$\cos\Psi = \frac{1 - \alpha^2}{\sqrt{4\,m^2\alpha^2 + (1 - \alpha^2)^2}} \tag{262.11}$$

rezultă:

— $\cos\Psi$ este pozitiv pentru $\alpha < 1$;

— $\cos\Psi$ este nul pentru $\alpha = 1$;

— $\cos\Psi$ este negativ pentru $\alpha > 1$.

Dacă rezistenţa R se anulează, adică $m = 0$, atunci

$$\operatorname{tg}\Psi = 0,$$

oricare ar fi α, şi Ψ va trece brusc dela valoarea zero la π.

Când m creşte, atunci şi $\operatorname{tg}\Psi$ creşte proporţional.

Curba reprezentând grafic variaţia lui Ψ în funcţie de α pleacă din origine, trece, pentru $\alpha = 1$, prin valoarea $\pi/2$ şi admite asimptota $\Psi = \pi$ (fig. 110).

Curba mai are un punct de inflexiune pentru valorile lui:

$$m < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

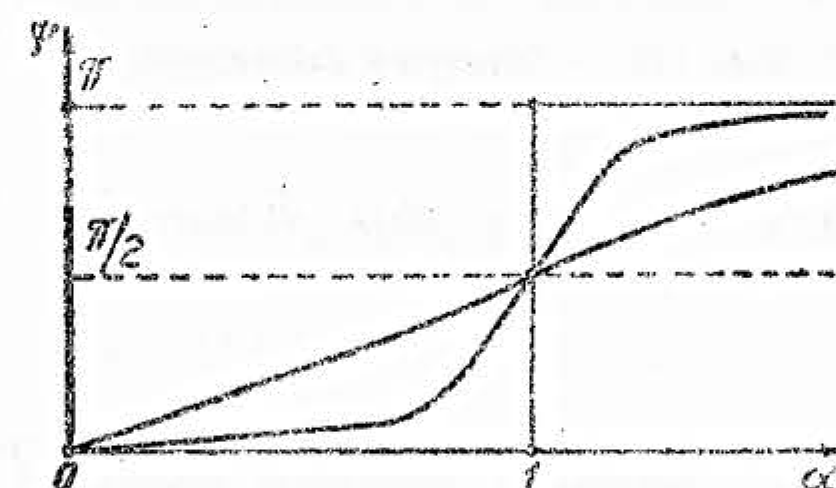


Fig. 110. — Variaţia unghiului de defazaj Ψ în funcţie de $\alpha = \omega\sqrt{LC}$.

γ) *Variaţia curentului.* Folosind aceleaşi variabile, expresiile curentului şi ale defazajului Ψ se pot scrie:

$$I = \frac{E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\alpha}{\sqrt{4\,m^2\alpha^2 + (1 - \alpha^2)^2}}, \quad \operatorname{tg}\Psi = \frac{1}{2m}\,\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}. \tag{262.12}$$

Dacă inductanţa L şi capacitatea C sunt constante, curentul este maxim oricare ar fi m pentru $\alpha = 1$ adică la rezonanţă (fig. 111).

Acest maxim are valoarea:

$$I_m = \frac{E\sqrt{\frac{C}{L}}}{2m} = \frac{E}{R}. \tag{262.13}$$

Defazajul Ψ este:

$$\psi = -\frac{\pi}{2} \text{ pentru } \alpha = 0; \quad (262.14)$$

$$\psi = +\frac{\pi}{2} \text{ pentru } \alpha = \infty ; \quad (262.15)$$

$$\psi = 0 \quad \text{pentru } \alpha = 1. \quad (262.16)$$

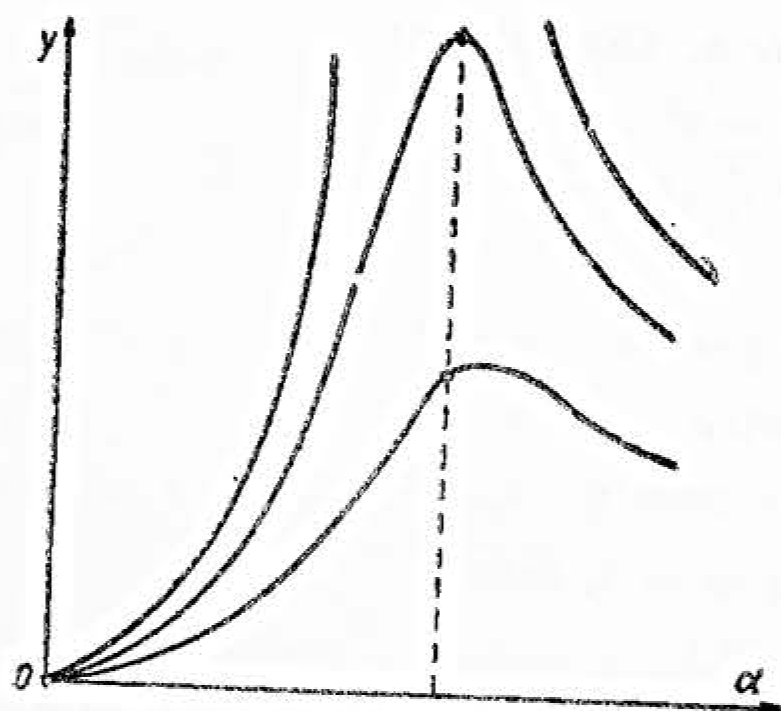


Fig. 111. — Diagrama curentului în funcție de $\alpha = \omega\sqrt{LC}$.

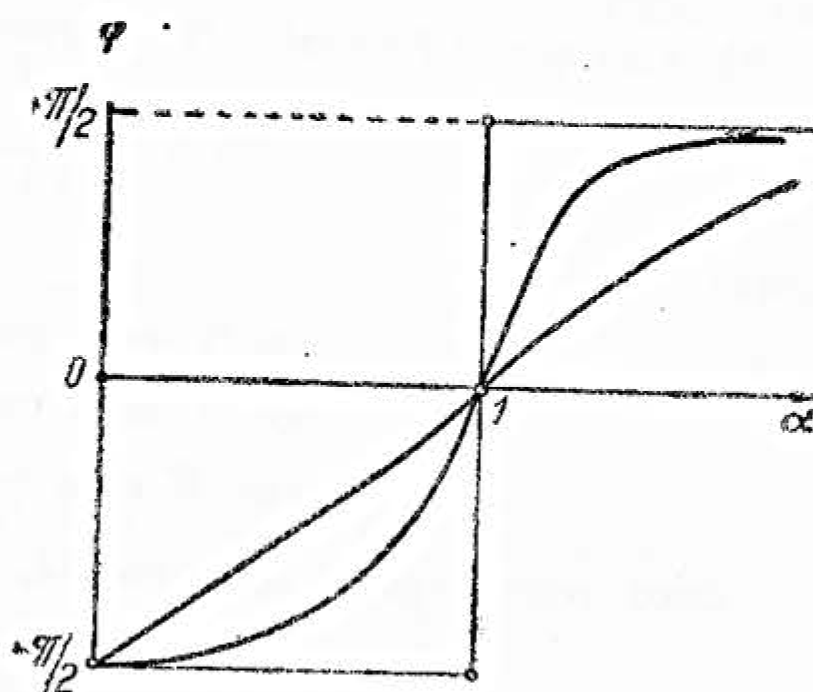


Fig. 112. — Diagrama defazajului φ în funcție de α.

Dacă rezistența este nulă, defazajul Ψ trece brusc dela valoarea $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ când $\alpha = 1$.

263. Aplicații. Fenomenul de rezonanță, în afară de influența pe care o poate avea asupra curenților, tensiunilor, sau unghiurilor de defazaj, poate conduce la numeroase manifestări și aplicații.

S'a văzut, la paragraful asupra metodelor de calcul, situația unei scheme formată dintr'o rezistență, o inductanță și o capacitate și s'a găsit că, în latura rezistenței R, curentul poate avea o valoare eficace constantă, dacă între L și C din acea schemă există o condiție de forma $CL\omega^2 = 1$.

Această situație poate fi însă privită sub forma mult mai generală a montajelor îndeplinind condiția:

$$\frac{U}{I} = \text{const.} \quad (263.1)$$

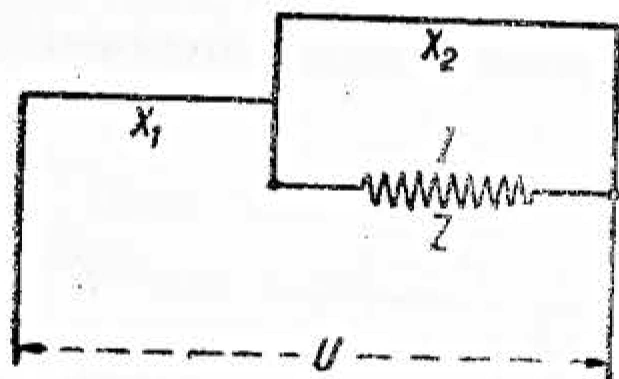


Fig. 113. — Montaje de forma $\frac{U}{I}$ = const.

Fie schema din fig. 113 constituită dintr'o reactanță X_2 în paralel cu o impedanță Z și totul în serie cu o altă reactanță X_1, sub o tensiune totală de valoarea eficace constantă U.

Se presupun cele două reactanțe X_1 și X_2 constituite fiecare din câte o inductanță sau o capacitate, dispuse oricum, însă îndeplinind condiția:

$$(a) \quad X_1 = -X_2.$$

In acest caz, se poate demonstra că valoarea eficace I a curentului în impedanța Z este $I = \frac{U}{X_1}$, independent de valoarea și constituția impedanței Z, acest curent fiind în cuadratură cu U.

Această demonstrație se poate obține prin oricare din metodele: vectorial geometrică, mărimi complexe, sau separația puterilor.

Condiția (a) însă este posibilă, dacă una din reactanțele X, indiferent care, este constituită dintr'o inductanță L și cealaltă dintr'o capacitate C. In acest caz, condiția (a) echivalează cu

$$L\omega = \frac{1}{C\omega},$$

reprezentând deci un fenomen de rezonanță.

Astfel de montaje pot fi utile în practică, oridecâteori este nevoie să se obțină un curent de o valoare eficace constantă, indiferent de impedanța străbătută de acel curent.

N. Fenomene energetice în curent sinusoidal

264. Generalități. In prezentul subcapitol se arată care sunt fenomenele fizice, care stau la baza manifestărilor energetice, atunci când producția, transportul și distribuția energiei se efectuează prin curenți electrici alternativi sinusoidali.

265. Puteri instantanee. Fie un circuit electric (eventual o linie de distribuție electrică) alimentat de o sursă electromotoare sinusoidală e (fig. 114).

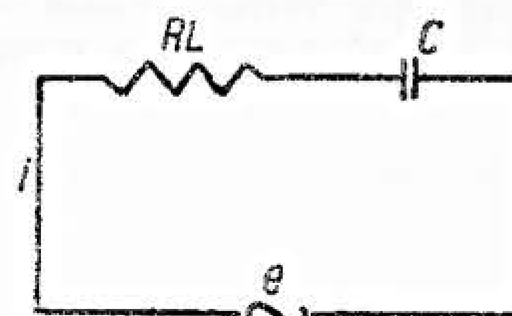


Fig. 114. — Circuit de curent alternativ.

Circuitul, posedând anumite valori constructive de rezistență R, de o inductanță L, și de o capacitate C, va fi străbătut de un curent i, care este tot sinusoidal în ipoteza că elementele constructive R, L, C sunt constante.

Forța electromotoare e, ca și curentul i, fiind raportate la aceeași origine de timp, au expresiile lor generale:

$$e = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t - \alpha); \quad (265.1)$$
$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \beta).$$

în care e și i sunt valori instantanee, E și I valorile eficace, ω pulsația, iar α și β unghiurile de defazaj respective față de originea de referință. Dacă se scoate în evidență unghiul de defazaj dintre e și i, se poate scrie în acest caz:

$$\beta = \alpha + \varphi.$$

Puterea electrică pe care sursa o produce și circuitul o primește la un moment dat este $p = ei$.

$$p = ei = EI\cos\varphi - EI\cos(2\omega t - \alpha - \beta). \quad (265.2)$$

Intr'un anumit interval de timp t, sursa debitează o energie:

$$w = \int_0^t p\,dt, \quad (265.3)$$

Puterea medie desvoltată în acest interval de timp este:

$$p_m = \frac{w}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t p\,dt = \frac{1}{t}\int_0^t ei\,dt. \quad (265.4)$$

Limita puterii medii când timpul t devine infinit de mic se numește putere instantanee, a cărei expresie dedusă din (265.3) și (265.4) este:

$$p = \frac{dw}{dt} = ei. \quad (265.5)$$

Identitatea dintre (265.5) şi (265.6) permite a da puterii instantanee o altă definiţie, sub forma produsului dintre valorile instantanee de forţă electromotoare şi curent.

Din (265.2) se vede că puterea instantanee este o funcţie periodică de timp. Expresia sa este compusă dintr'o sumă de doi termeni:

Unul constant $EI \cos \varphi$ şi unul sinusoidal $EI \cos (2\omega t - \alpha - \beta)$ de pulsaţie 2ω.

266. Puterea reală (sau activă). Dat fiind că valorile puterii instantanee se repetă periodic, reiese că energia produsă de o sursă în timpul unei perioade are o valoare ca şi cum ar fi produsă de o putere constantă egală cu media puterilor instantanee în timpul perioadei respective T.

Această noţiune de medie a puterii instantanee în timpul unei perioade se numeşte putere reală (sau activă).

Expresia sa generală devine deci:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt, \tag{266.1}$$

care în cazul curenţilor sinusoidali, ţinând seama de relaţia (265.2) ia forma:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T EI \cos \varphi \, dt - \frac{1}{T}\int_0^T EI \cos (2\omega t - \alpha - \beta)\, dt. \tag{266.2}$$

sau

$$P = EI \cos \varphi,$$

dat fiind că ultimul termen al relaţiei (266.2) în timpul unei perioade este nul.

Deasemenea într'o porţiune de circuit, între ale cărei extremităţi ab se stabileşte o tensiune eficace (fig. 114), circuit străbătut de un curent I defazat cu φ faţă de U, puterea reală sau activă devine:

$$P = UI \cos \varphi. \tag{266.3}$$

Puterea reală (sau activă) într'un circuit de curent alternativ periodic oarecare este identică cu media puterii instantanee în timp de o perioadă.

In cazul particular al unui regim sinusoidal, puterea reală este egală cu produsul tensiunii sau al forţei electromotoare eficace, prin componenta curentului în fază cu ea.

Se zice că o sursă de valoarea eficace E produce o putere reală $EI \cos \varphi$, iar circuitul sau reţeaua primeşte aceeaşi putere reală.

Oricare aparat receptor, sau dispozitiv echivalent cu un aparat receptor, primeşte dela reţea o putere reală $UI \cos \varphi$, în care U este tensiunea eficace creată la bornele aceluiaşi aparat, I curentul absorbit şi φ unghiul de defazaj respectiv.

267. Putere fluctuantă. S'a dat numele de putere fluctuantă termenului al doilea din expresia puterii instantanee [relaţia (265.2)] şi anume:

$$P_f = EI \cos (2\omega t - \alpha - \beta). \tag{267.1}$$

Puterea fluctuantă este deci o putere instantanee de formă sinusoidală având o pulsaţie egală cu 2ω. Valoarea sa medie este nulă.

268. Putere aparentă. Se numeşte putere aparentă produsul dintre forţa electromotoare sau tensiunea eficace şi valoarea eficace a curentului. Se notează cu P_a sau S.

In curent continuu, S şi P sunt identice.

In curenţi alternativi, în general $S > P$.

Noţiunea în putere aparentă este folosită în special pentru a caracteriza mărimea şi dimensionarea electrică a anumitor aparate şi maşini, spre diferenţă de P, puterea reală sau activă, care defineşte acea valoare de putere care corespunde unui transport efectiv de energie într'un anumit sens.

269. Factor de putere. Se numeşte *factor de putere* raportul dintre puterea reală şi puterea aparentă.

In cazul curenţilor alternativi sinusoidali, acest raport devine:

$$K = \frac{P}{S} = \frac{EI \cos \varphi}{EI} = \cos \varphi. \tag{269.1}$$

In acest caz, factorul de putere este cosinusul unghiului de defazaj φ dintre E şi I (sau respectiv dintre U şi I).

Factorul de putere dă o indicaţie de ceeace se poate folosi efectiv dintr'o sursă de energie, care debitează un curent I sub un anumit defazaj φ. Cu cât φ este mai mare, se poate dispune de o putere reală mai mică pentru aceeaşi putere aparentă.

La $\varphi = \frac{\pi}{2}$, sursa are o forţă electromotoare, produce un curent, însă nu livrează nicio putere reală.

Maximum de putere reală se realizează la un defazaj $\varphi = 0$ pentru o aceeaşi putere aparentă.

Una din problemele tehnice este realizarea unui transport sau distribuţie de energie cu un factor de putere cât mai ridicat, adică mai aproape de 1.

Factorul de putere depinde atât de construcţia reţelei, cât şi de condiţiile constructive şi de funcţionare ale maşinilor şi aparatelor receptoare respective.

Intr'un circuit format dintr'o inductanţă L şi o rezistenţă R în serie, se ştie că:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} \quad \text{şi} \quad \text{deci} \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{R}{Z}. \tag{269.2}$$

Factorul de putere este cu atât mai mic, cu cât pentru acelaşi R, impedanţa Z şi deci $L\omega$ şi respectiv L sunt mai mari.

Intr'un circuit format din L şi R în paralel,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{L\omega} \quad \text{şi} \quad \text{deci} \quad \cos \varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}. \tag{269.3}$$

In acest caz, factorul de putere total este cu atât mai mic cu cât pentru acelaşi R reactanţa $L\omega$ scade şi în schimb factorul de putere tinde către 1 când $L\omega \rightarrow \infty$.

Fie reţeaua formată dintr'o impedanţă $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ în paralel cu o capacitate C (fig. 115). Curenţii în cele două laturi sunt

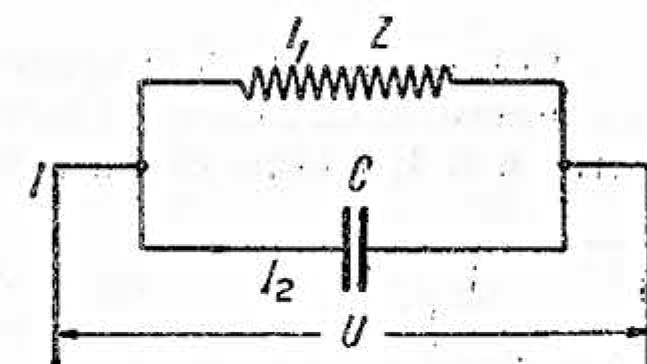


Fig. 115. — Circuit de curent alternativ.

$$\overline{I}_1 = \frac{UR}{Z^2} - j\frac{UL\omega}{Z^2} \quad ; \quad \overline{I}_2 = +j\,UC\omega, \tag{269.4}$$

iar curentul total $\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2$ este defazat faţă de tensiunea U cu un unghi φ definit prin:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dfrac{UL\omega}{Z^2} - UC\omega}{\dfrac{UR}{Z^2}} = \frac{L\omega - C\omega Z^2}{R}, \tag{269.5}$$

ceeace corespunde unui factor de putere:

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - C\omega Z^2)^2}}. \qquad (269.6)$$

Factorul de putere devine 1, când:

$$L\omega = C\omega Z^2 \quad \text{sau} \quad L = CZ^2 \qquad (269.7)$$

270. Putere reactivă. Unghiul de defazaj fiind definit prin tangenta sa, rezultă că:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{EI\sin\varphi}{EI\cos\varphi} = \frac{EI\sin\varphi}{P}. \qquad (270.1)$$

Prin simetrie cu expresia puterii reale P, expresia dela numărător $EI \sin\varphi$ a căpătat numele de putere *reactivă* şi se notează cu Q sau P_r.

Această mărime se defineşte în regim sinusoidal astfel:

Puterea reactivă este produsul dintre tensiunea sau forţa electromotoare eficace şi componenta curentului în cuadratură cu ea.

Analog cu puterea reală, într'o porţiune de curent între ale cărei extremităţi *ab* se stabileşte o tensiune eficace U (fig. 1), puterea reactivă este:

$$Q = UI\sin\varphi, \qquad (270.2)$$

în care φ este unghiul de defazaj dintre U şi I.

Puterea reactivă este o mărime de dimensiunea unei puteri şi depinde de φ; ea nu este însă o putere reală şi nu corespunde unui transport continuu de energie într'un anumit sens.

Puterea reactivă este simetrică cu puterea reală, ceeace apare în special din expresia puterii aparente:

$$S = EI = \sqrt{(EI\cos\varphi)^2 + (EI\sin\varphi)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}. \qquad (270.3)$$

Factorul de putere devine în aceste condiţii:

$$K = \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}. \qquad (270.4)$$

Puterea reactivă Q apare ca fiind substratul fizic al factorului de putere.

Factorul de putere al unui circuit este cu atât mai mic, cu cât Q este mai mare; pentru a fi 1, trebue ca puterea reactivă a circuitului să se anuleze.

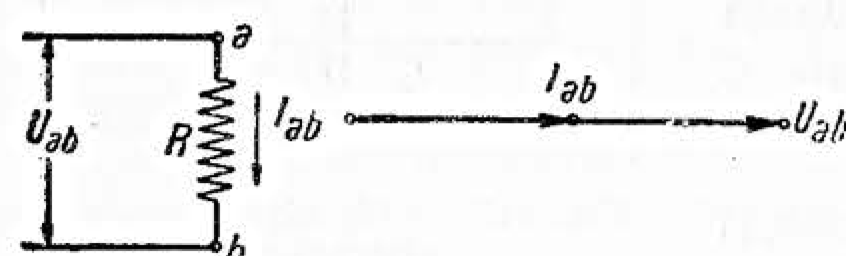


Fig. 116. — Curent în fază.

Puterea reactivă transmisă unui circuit este pozitivă, ori negativă, după cum defazajul φ este în urmă ori înaintea tensiunii.

Prezenţa puterii reactive cu proprietăţile şi efectele ei are o importanţă deosebită în funcţionarea reţelelor şi a instalaţiilor electrice.

271. Exemple de putere. *a)* Fie cazul unei rezistenţe simple R căreia i se aplică o tensiune sinusoidală U_{ab} (fig. 116). Curentul I_{ab} absorbit de această rezistenţă este în fază cu tensiunea U_{ab}.

Rezistenţa R_{ab} primeşte deci o putere reală P.

Unghiul de defazaj fiind nul, puterea reactivă absorbită de rezistenţa R_{ab} este nulă.

b) În locul rezistenţei R_{ab} se montează o inductanţă simplă L. În acest caz, curentul $I_{ab} = \frac{U_{ab}}{L\omega}$ este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii U_{ab} (fig. 117).

Puterea reală absorbită de inductanţă este nulă, în schimb inductanţa primeşte o putere reactivă:

$$Q = +UI = +L\omega I^2 = X_L I^2.$$

c) O capacitate C, aplicată la aceeaşi tensiune, absoarbe un curent I_{ab} defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de tensiunea U_{ab}.

Puterea reală este şi în acest caz nulă.

Capacitatea primeşte o putere reactivă:

$$Q = -UI\,C\omega\,U^2 = -\frac{1}{C\omega} I^2 = X_c I^2.$$

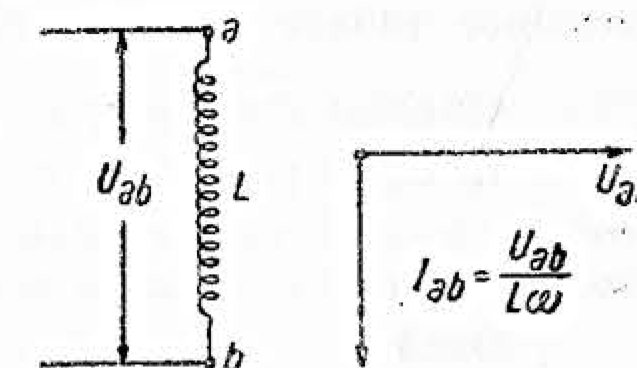


Fig. 117. — Curent în cuadratură.

Puterea reactivă absorbită fiind negativă, ea este echivalentă cu o *putere reactivă produsă* de valoarea:

$$Q = C\omega U^2.$$

272. Unităţi de putere. Puterea reală se măsoară prin unitatea practică W (watt) cu multiplii săi obişnuiţi, kilowaţi (kW), megawaţi (MW).

Se reaminteşte că puterile mecanice se mai măsoară cu unitatea încă tolerată: cal putere (CP) având valoarea: 1 CP = 736 W.

Puterea aparentă se măsoară prin unitatea voltamper (VA) cu multiplii săi uzuali, kilovoltamperi (kVA), megavoltamperi (MVA).

Puterea reactivă se măsoară prin unitatea Var cu multiplii săi: kilovar, etc.

Se reaminteşte că această din urmă unitate a fost adoptată pe baza propunerii Comitetului Electrotehnic Român.

Toate aceste unităţi, deşi măsoară mărimi de putere de natură diferită, sunt de aceeaşi dimensiune.

273. Diagrama puterilor instantanee. O sursă de curent fiind caracterizată prin forţa electromotoare e şi curentul i definiţi prin:

$$e = \sqrt{2}\,E\sin\omega t$$

şi

$$i = \sqrt{2}\,I\sin(\omega t - \varphi) \qquad (273.1)$$

produce o putere instantanee care, după cum s'a văzut, are expresia:

$$p = ei = EI\cos\varphi - EI\cos(2\omega t - \varphi). \qquad (273.2)$$

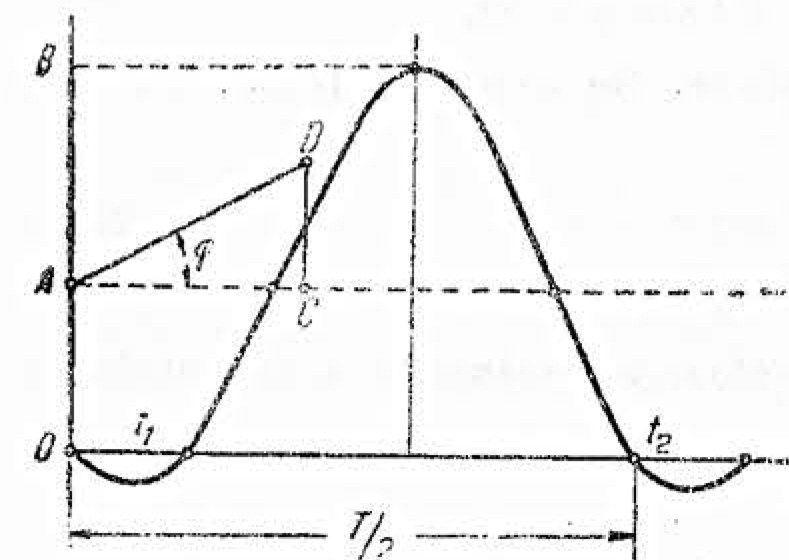


Fig. 118. — Diagrama puterilor instantanee.

În fig. 118 este reprezentată diagrama acestei puteri instantanee, în funcţie de timpul t.

Cunoscând această digramă, se deduc toate expresiile de putere. Astfel $\overline{OA} = EI\cos\varphi$ este puterea reală. Această ordonată este media puterilor instantanee în timpul $\frac{T}{2}$. Segmentul $\overline{AB} = EI$ reprezintă puterea aparentă. Aceasta este amplitudinea sinusoidei de valoarea

maximă $S = EI$ şi de o pulsaţie 2ω, exprimată în raport cu ordonata $\overline{OA}$ a puterii medii.

Se construeşte apoi triunghiul dreptunghi ACD în care

$$\overline{AC} = \overline{AO} \quad \text{şi} \quad \overline{AD} = \overline{AB}.$$

Cateta $\overline{CD} = Q = \sqrt{S^2 - P^2}$ este puterea reactivă.

In intervalul Ot_1, sursa primeşte putere instantanee iar în intervalul $t_1 t_2$ sursa produce putere instantanee.

Unghiul $\widehat{DAC} = \varphi$ este defazajul dintre E şi I.

In cazul particular $\varphi = 0$, $\overline{AO} = \overline{AB}$ şi deci $S = P$; sursa nu mai primeşte puteri instantanee, ci debitează în permanenţă o putere instantanee pozitivă; sursa debitează numai o putere reală.

Dacă $\varphi = \pi/2$, $\overline{AO} = 0$ iar $\overline{AB} = S = Q$, sursa nu debitează decât putere reactivă.

274. **Calculul puterilor prin reprezentarea vectorială.** Se exprimă vectorial tensiunea E şi curentul I, produse de o sursă electrică:

$$\overline{E} = E\,\underline{|-\alpha} = \overline{x}\,E\cos\alpha - \overline{y}\,E\sin\alpha; \qquad (274.1)$$

$$\overline{I} = I\,\underline{|-\beta} = \overline{x}\,I\cos\beta - \overline{y}\sin\beta; \qquad (274.2)$$

în care E şi I sunt valori eficace;

$\overline{x}$ şi $\overline{y}$ — vectorii unitate pe cele două axe rectangulare;

α şi β — unghiurile de defazaj socotite în urmă faţă de axa ox;

$\beta - \alpha = \varphi$ — unghiul de defazaj între E şi I.

Intrebuinţând aceste notaţii se obţine:

Puterea reală este produsul scalar al vectorilor E şi I:

$$\overline{E}\,\overline{I} = (\overline{x})^2 EI\cos\alpha\cos\beta + (\overline{y})^2 EI\sin\alpha\sin\beta = EI\cos(\alpha - \beta) = P. \qquad (274.3)$$

Puterea reactivă produsă este modulul produsului vectorial al aceloraşi vectori E şi I:

$$|\overline{E} \times \overline{I}| = EI\sin(\beta - \alpha) = EI\sin\varphi = Q. \qquad (274.4)$$

275. **Calculul puterilor prin mărimi complexe.** Se exprimă tensiunea E şi curentul I prin valorile lor complexe

$$\overline{E} = E\cos\alpha - j\,E\sin\alpha \qquad (275.1)$$

$$\overline{I} = I\cos\beta - j\,I\sin\beta \qquad (275.2)$$

Se multiplică expresia complexă E prin valoarea conjugată a curentului I:

$$\overline{I} = I\cos\beta + j\,I\sin\beta. \qquad (275.3)$$

Produsul EI dă:

$$\overline{E}\,\overline{I} = EI\cos(\beta - \alpha) + j\,EI\sin(\beta - \alpha) = P + j\,Q; \qquad (275.4)$$

α şi β reprezintă unghiurile de defazaj ale tensiunii şi ale curentului, presupuse în urmă faţă de axa valorilor reale.

Se obţine astfel regula următoare:

Pentru a găsi puterile unui sistem de tensiune şi de curent, exprimate prin mărimi complexe, se multiplică expresia complexă a tensiunii prin expresia complexă conjugată a curentului. Partea reală a produsului obţinut este puterea reală, iar partea imaginară puterea reactivă.

276. **Componente watate şi dewatate.** — Componenta tensiunii în fază cu curentul se numeşte componentă watată, iar componenta în cuadratură cu curentul se numeşte componentă dewatată.

Analog, curentul se poate descompune în două componente rectangulare şi anume una watată, în fază cu tensiunea, şi alta dewatată în cuadratură cu tensiunea.

277. **Energii reale şi reactive.** Integrala în timp a puterii instantanee [relaţia (265.3)] reprezintă energia instantanee furnizată de sursa reţelii. Expresia acestei energii are valori instantanee variabile dela un moment la altul. Ea are un caracter periodic şi este efectiv o *energie reală*.

Energia livrată în timp de o perioadă reiese astfel din relaţiile (265.3) şi (266.1):

$$W = \int_0^T p\,dt = P \times T, \qquad (277.1)$$

iar în timp de mai multe perioade: $W = \sum(PT)$.

In mod impropriu, dar cu o suficientă aproximaţie în practica industrială, energia reală într'un timp t se poate scrie

$$W = \int_0^t p\,dt \approx \int_0^t P\,dt. \qquad (277.2)$$

Riguros, energia reală este integrala în timp a puterii instantanee. Este însă mai comod a se introduce noţiunea de putere reală şi în acest caz, *cu o aproximaţie admisibilă, se poate spune că energia reală este integrala în timp a puterii reale.*

Această a doua formă devine însă riguroasă numai sub dubla condiţie, ca puterea reală să fie constantă în timpul jumătăţilor de perioadă şi timpul de integrare să fie un multiplu exact de jumătăţi de perioadă.

Acest al doilea fel de prezentare, mult mai comod, introduce o eventuală eroare care este cu totul minimă şi în orice caz cu mult inferioară erorilor de indicaţie ale aparatelor. Prin analogie cu energia reală şi cu aceeaşi minimă aproximaţie, integrala în timp a puterii reactive este:

$$W_r = \int_0^t Q\,dt \qquad (277.3)$$

şi se obişnueşte a se denumi *energie reactivă*.

Aceasta este mărimea pe care o măsoară contorii de energie reactivă sau var-oră-metri.

278. **Principiul conservării puterilor.** Intr'o reţea oarecare cu un număr s de laturi (fig. 119) se notează prin expresii de forma:

$$u = \sqrt{2}\,U\sin(\omega t - \alpha); \qquad (278.1)$$

$$i = \sqrt{2}\,I\sin(\omega t - \beta).$$

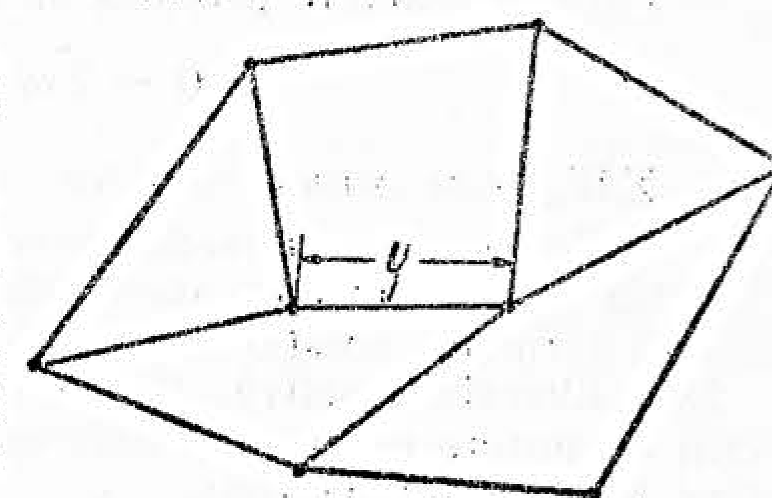


Fig. 119. — Reţea în curenţi alternativi.

tensiunea dintre nodurile adiacente ale fiecărei laturi şi curentul în latura respectivă.

Se scrie că atât legile lui Kirchhoff, aplicate la valorile instantanee ale lui u şi i, cât şi conservarea puterilor instantanee p trebue să fie valabile pentru întreaga reţea, oricare ar fi momentul t. Aceste proprietăţi ale mărimilor instantanee conduc la satisfacerea următoarelor condiţii

$$\Sigma_s\,UI\sin\alpha\cos\beta = 0 \quad ; \quad \Sigma_s\,UI\sin\alpha\sin\beta = 0; \qquad (278.2)$$

$$\Sigma_s\,UI\cos\alpha\sin\beta = 0 \quad ; \quad \Sigma_s\,UI\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Operaţia de însumare $\sum_s$ se aplică la totalitatea celor s laturi ale reţelei. Două câte două din aceste grupuri de relaţii dau:

$$\sum_s UI\cos(\alpha-\beta) = \sum_s UI\cos\varphi = \sum_s P = 0; \qquad (278.3)$$
$$\sum_s UI\sin(\alpha-\beta) = \sum_s UI\sin\varphi = \sum_s Q = 0.$$

Puterile reale P şi puterile reactive Q, simultan şi simetric, se supun principiului conservării pentru întreaga reţea.

Deci suma puterilor reale consumate într'o reţea trebue să fie egală cu suma puterilor reale produse pe aceeaşi reţea. Proprietatea este identică şi pentru puterile reactive consumate şi produse în reţeaua respectivă [1].

279. **Semnificaţia fizică a noţiunilor de puteri.** Expresiile matematice, atât ale puterilor reale cât şi ale celor reactive, corespund unor proprietăţi fizice:

α) *Puterea reală.*

— Ea este media puterilor instantanee.

— Integrarea în timp a puterii reale dă energia reală a sistemului.

Puterea reală se conservă într'o reţea. Ea se transportă pe reţea între locul de producere şi acela de consumaţie şi se transferă de pe o reţea pe alta.

— Producerea puterii reale se obţine prin consumaţie şi deci prin transformarea unei energii de o altă natură: mecanică, hidraulică, chimică, etc.

β) *Puterea reactivă.*

— Puterea reactivă, în mod similar şi simetric cu puterea reală, se conservă atât într'o reţea cât şi în fenomenul de transfer de pe o reţea pe alta, atunci când au aceiaşi pulsaţie. Ea se transportă sau circulă de pe o reţea pe alta. Ea se transportă sau circulă pe reţea între locul de producere şi cel de consumaţie.

— Puterea reactivă, în mod similar şi simetric cu puterea reală, implică o majorare a puterii aparente şi deci reduce disponibilităţile instalaţiilor.

— Transportul de putere reactivă ca şi cel de putere reală, implică o consumaţie de putere reală în liniile de transport.

— Puterea reactivă implică o oscilaţie de energie între sursă şi câmpurile electrice şi magnetice.

— Puterea reactivă produsă de o sursă este egală cu:

$$Q = 2\omega\,(\sum W_m - \sum W_e), \qquad (279.1)$$

în care $\sum W_m$ este suma mediilor energiilor din câmpurile magnetice;
$\sum W_e$ — suma mediilor energiilor din câmpurile electrice;
2ω — pulsaţia de oscilaţie a acestor energii.

Toţi termenii acestei expresii sunt mărimi fizice.

280. **Energia reactivă.** Este o definiţie care corespunde integrării în timp a mărimii de putere reactivă şi care caracterizează deci manifestarea fenomenelor reactive într'un anume timp.

Când puterea reactivă este adoptată ca criteriu de tarifare, în calculele practice se introduce expresia energiei reactive în mod simetric cu energia reală.

281. **Diagrama vectorială a puterilor.** Proprietatea de conservare algebrică a puterilor reale şi reactive a condus la principiul de conservare vectorială a puterii aparente.

Se pot astfel reprezenta puterile într'o diagramă dreptunghiulară cu puterile reale în abscise şi puterile reactive în ordonate.

[1] Demonstraţia detaliată a principiului conservării puterilor reale şi reactive pe baza proprietăţilor mărimilor instantanee de tensiune, curent şi puteri a fost dată de Prof. Ing. C. Budeanu în anul 1928 (Bul. Nr. 1 al Politehnicei).

Fie două sisteme electrice vecine, în serie, sau paralel consumând (fig. 120):

Sistemul 1: $P_1 = \overline{OA}$ şi $Q_1 = \overline{AB}$;

Sistemul 2: $P_2 = \overline{AC}$ şi $Q_2 = \overline{ED}$.

Puterile reale şi reactive ale ambelor sisteme vor fi:

$$P = P_1 + P_2 \quad \text{şi} \quad Q = Q_1 + Q_2.$$

iar puterile aparente: $S_1 = \overline{OB}$; $S_2 = \overline{BD}$, astfel încât pentru ambele sisteme $S = \overline{OD}$, ceeace simbolic se poate scrie:

$$\overline{S} = \overline{S_1} + \overline{S_2}.$$

Fig. 120. — Diagrama vectorială a puterilor.

282. **Metoda separaţiei puterilor.** Principiul conservării puterilor reale şi reactive a condus la o metodă nouă de calcul indicată de P. Boucherot şi cunoscută sub numele de *metoda separaţiei puterilor.*

Cele două ecuaţii de conservare permit să se găsească două dintre necunoscutele problemei când celelalte elemente sunt cunoscute.

283. **Aplicaţie.** Fie circuitul din fig. 121, în care se montează în paralel rezistenţa R_1, impedanţa $Z_2 = R_2 + j\,L_2\omega$ şi capacitatea C supuse la tensiunea eficace U şi trebue să se determine curentul total I şi unghiul său de defazaj faţă de tensiunea U.

Puterile reale şi reactive în fiecare dintre acele trei aparate sunt:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = \frac{U^2}{R_1}; \quad P_2 = R_2 I_2^2 = R_2 \frac{U^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}; \quad P_3 = 0, \qquad (283.1)$$
$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = L_2\omega I_2^2 = L_2\omega \frac{U^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}; \quad Q_3 = -C\omega U^2,$$

principiul de conservare permite să se scrie:

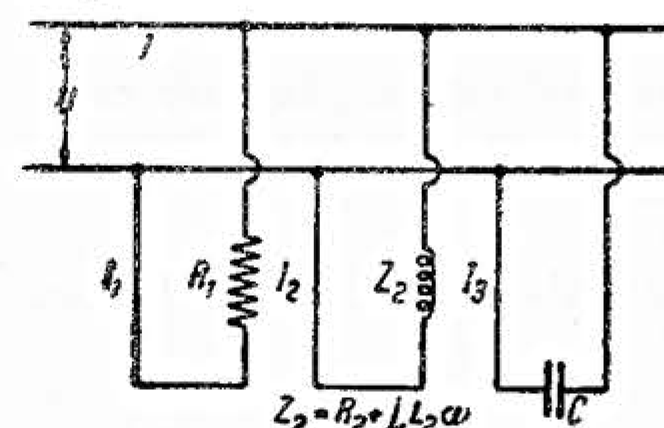


Fig. 121. — Aplicaţie la metoda separaţiei puterilor.

$$P = UI\cos\varphi = \frac{U^2}{R_1} + R_2 \frac{U^2}{R_2^2 + L^2\omega^2} \qquad (283.2)$$
$$Q = UI\sin\varphi = L_2\omega \frac{U^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2} - C\omega U^2.$$

Din aceste două ecuaţii se deduce I şi φ.

Deasemenea ultima expresie permite să se deducă imediat şi direct valoarea capacităţii C pentru ca factorul de putere total să fie 1. Pentru aceasta este suficient să se scrie $Q = 0$.

Se obţine astfel:

$$C = \frac{L_2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}.$$

O. Curenţi polifazaţi

284. **Generalităţi.** Curenţii alternativi se pot produce prin realizarea unei forţe electromotoare alternative într'un cadru care s'ar roti cu viteza ω într'un câmp uniform.

Dacă în loc de un cadru, s'ar roti n cadre regulat repartizate în jurul axei de rotaţie, ale căror plane ar forma prin urmare unghiuri $\theta = \frac{2\pi}{n}$ egale între ele,

se vor culege în aceste n cadre, n forţe electromotoare defazate între ele cu $\frac{2\pi}{n}$ (fig. 122):

$$e_1 = \sqrt{2}\, E \sin \omega t$$

$$e_2 = \sqrt{2}\, E \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$e_3 = \sqrt{2}\, E \sin \left(\omega t - 2\frac{2\pi}{n}\right) \qquad (284.1)$$

. . . .

. . . .

$$e_n = \sqrt{2}\, E \sin \left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right]$$

Aceste forţe electromotoare vor produce, în fiecare dintre circuitele identice unde ele se produc, curenţi identici, deci defazaţi cu acelaşi unghi în raport cu forţa electromotoare corespunzătoare şi constituind ei înşişi un sistem polifazat echilibrat.

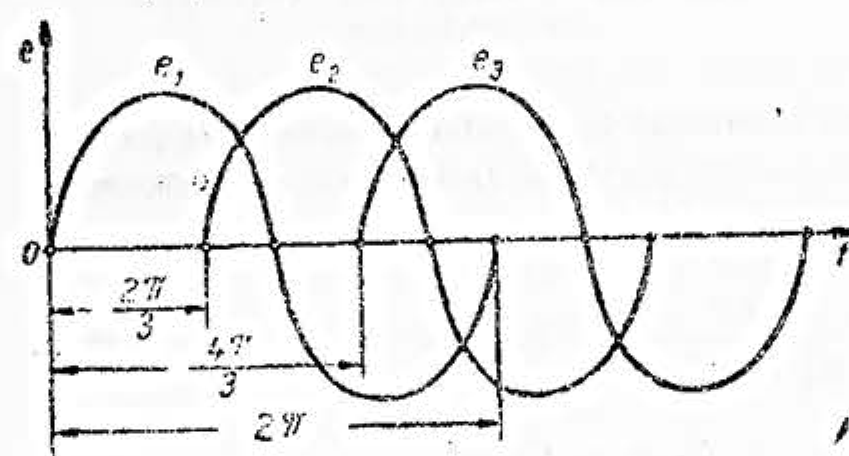


Fig. 122. — Sistem polifazat de forţe electromotoare.

Când forţele electromotoare sau tensiunile au aceleaşi valori eficace şi acelaşi defazaj între ele, se numesc sisteme polifazate echilibrate sau simetrice.

Dacă şi circuitele alimentate de fiecare forţă electromotoare a sistemului sunt identice, atunci şi curenţii vor fi polifazaţi simetric.

Sistemul polifazat echilibrat poate fi reprezentat prin n vectori de acelaşi modul, dar defazaţi unul faţă de altul cu $\frac{2\pi}{n}$.

Vectorii fiind liberi, pot fi grupaţi, fie având aceeaşi origine, în care caz ei formează o stea regulată, fie compunându-se în continuare, în care caz ei formează un poligon regulat.

In ambele cazuri rezultanta lor este nulă.

Suma curenţilor şi a tensiunilor tuturor fazelor unui sistem polifazat echilibrat este nulă în fiecare moment.

285. Ordinea de succesiune a fazelor într'un sistem polifazat. S'a presupus că faza numerotată cu 2 este în întârziere cu $\frac{2\pi}{n}$ faţă de prima; faza numerotată cu 3 este în întârziere cu $\frac{2\pi}{n}$ în raport cu a doua, etc.

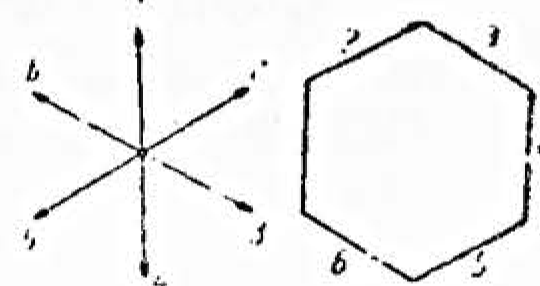


Fig. 123. — Vectori polifazaţi în stea şi în poligon.

Este evident că ordinea astfel fixată este arbitrară şi deci vectorii reprezentând tensiunile sau curenţii pot fi consideraţi şi altfel.

Fie sistemul de n vectori polifazaţi. Plecând dela un vector $\overline{A}$ considerat primul vector al sistemului şi urmând apoi într'un singur sens, în jurul stelei sau al poligonului, se vor întâlni succesiv ceilalţi vectori.

Se numeşte *sens direct* sensul de rotaţie al acelor unui ceasornic (sens negativ în trigonometrie) şi *sens invers* sensul contrar (sensul pozitiv în trigonometrie).

Dacă, urmând în sens direct, numerele de ordine ale vectorilor cresc regulat pe măsură ce sunt întâlniţi, astfel încât doi vectori $\overline{A}_p$ şi $\overline{A}_{p+1}$ să fie separaţi prin intervalul unghiular $\frac{2\pi}{n}$, sistemul se numeşte direct de ordinul 1 (fig. 124).

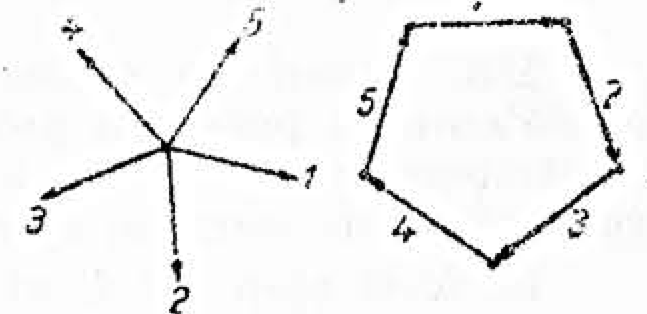


Fig. 124. — Sistem direct de ordinul 1.

Dacă, plecând dela vectorul $\overline{A}_1$ şi urmând în sens direct se întâlneşte vectorul $\overline{A}_2$ după două intervale unghiulare, adică $2 \times \frac{2\pi}{n}$, apoi vectorul 3 după alte două intervale unghiulare şi în general vectorii $\overline{A}_p$ şi $\overline{A}_{p+1}$ sunt separaţi prin două intervale unghiulare, se zice că sistemul este direct, de ordinul 2 (fig. 125).

In general, dacă plecând dela vectorul $\overline{A}_1$ şi urmând în sens direct, se întâlneşte vectorul $\overline{A}_2$ după intervale unghiulare egale cu $m \times \frac{2\pi}{n}$, se zice că sistemul este un sistem direct de ordinul m.

Dacă plecând, dela vectorul $\overline{A}_1$ şi urmând în sens invers, numerele de ordine

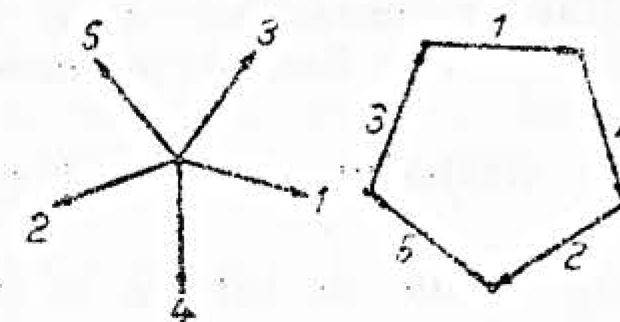


Fig. 125. — Sistem direct de ordin 2.

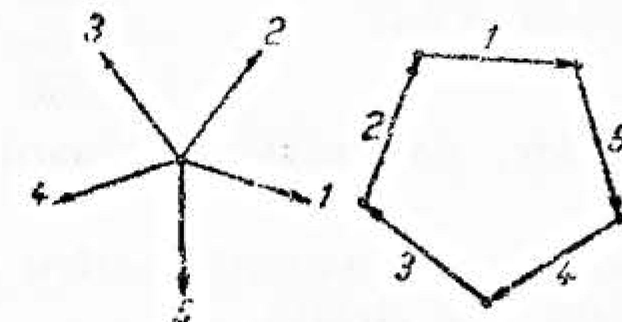


Fig. 126. — Sistem invers de ordinul 1.

cresc regulat pe măsură ce vectorii sunt întâlniţi, astfel încât doi vectori $\overline{A}_p$ şi $\overline{A}_{p+1}$ să fie separaţi prin intervalul unghiular $\frac{2\pi}{n}$, sistemul este invers de ordinul 1 (fig. 126).

In general, dacă plecând dela vectorul $\overline{A}_1$ şi urmând în sens invers, se întâlneşte vectorul A_2 după m intervale unghiulare sistemul se numeşte invers de ordinul m.

Urmează că un sistem direct de ordinul m este identic cu sistemul invers de ordinul $n - m$.

Dacă faza vectorului $\overline{A}_1$ este luată ca origine de fază, vectorii sistemului invers de ordinul m sunt conjugaţi vectorilor sistemului direct de ordinul m.

Dacă m este un număr prim, sunt posibile m—1 sisteme directe şi m—1 sisteme inverse, fiecare de ordinul 1, 2, 3,... m—1. Dar sistemele inverse sunt identice cu sistemele directe de ordinul m—1, m—2,...2, 1.

Când m nu este număr prim, există atâtea sisteme posibile câte numere prime sunt cu m. Spre exemplu: o stea cu şase ramuri; numerele 1, 5 sunt prime cu 6. Se pot deci forma:

— 1 sistem direct de ordinul 1;
— 1 sistem direct de ordinul 5.

Fiecare dintre aceste sisteme poate fi considerat ca sistem invers de ordinul:

$$(6-1)=5, \quad (6-5)=1.$$

286. Moduri de grupare a circuitelor polifazate. Deşi circuitele în care circulă curenţii polifazaţi pot fi în principiu independente, se evită în general să se întrebuinţeze cei doi conductori, care ar cere circuite independente şi se grupează aceste circuite, spre a se reduce la n numărul conductorilor.

In acest scop pot fi utilizate două moduri de grupare:

— gruparea în stea,
— gruparea în poligon.

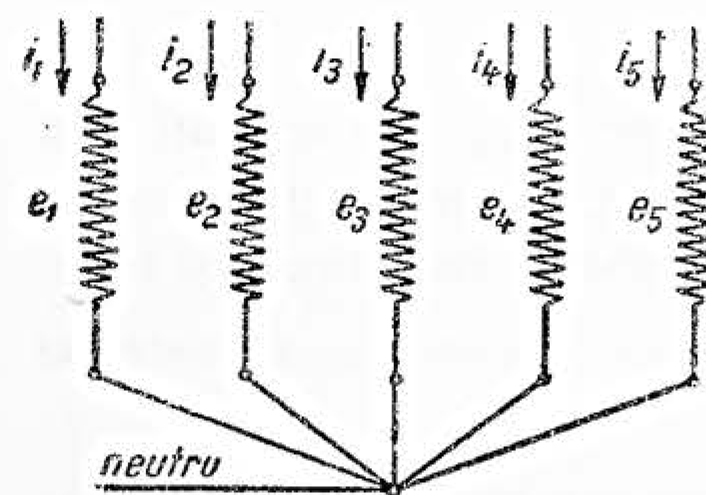


Fig. 127. — Montaje în stea de tensiuni pe fază.

α) *Gruparea în stea.* Circuitele generatoare sau de utilizare, în care se alege un sens spre a le defini, pentru fiecare din ele o intrare şi o ieşire, sunt reunite în acelaşi punct printr'una din extremităţile de acelaşi nume, de exemplu prin ieşirile lor (fig. 127).

Conductorii sunt legaţi la extremităţile rămase libere.

Cele n circuite au astfel ca retur comun un conductor neutru legat la centrul stelei.

In cazul curenţilor polifazaţi echilibraţi, suma intensităţilor curenţilor care străbat fazele sistemului în fiecare moment este nulă.

Prin urmare, conductorul neutru nu este străbătut de curent şi poate fi suprimat.

Tensiunea dintre punctul neutru şi fiecare bornă de intrare se numeşte tensiune pe fază sau stelată.

Tensiunea dintre două borne de intrare consecutive se numeşte tensiune compusă, sau tensiune între faze şi este egală cu diferenţa vectorială a celor două tensiuni stelate corespunzătoare aceloraşi borne.

Se presupune că sistemul tensiunilor stelate constitue un sistem direct de ordinul 1. Construcţia geometrică arată imediat că sistemul tensiunilor compuse U constitue şi el un sistem direct de ordinul 1 (fig. 128).

Argumentul ψ al vectorului U_{12} este egal cu unghiul la baza triunghiului isoscel OV_1V_2 şi prin urmare

$$\psi=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)=(n-2)\frac{\pi}{2n}. \qquad (286.1)$$

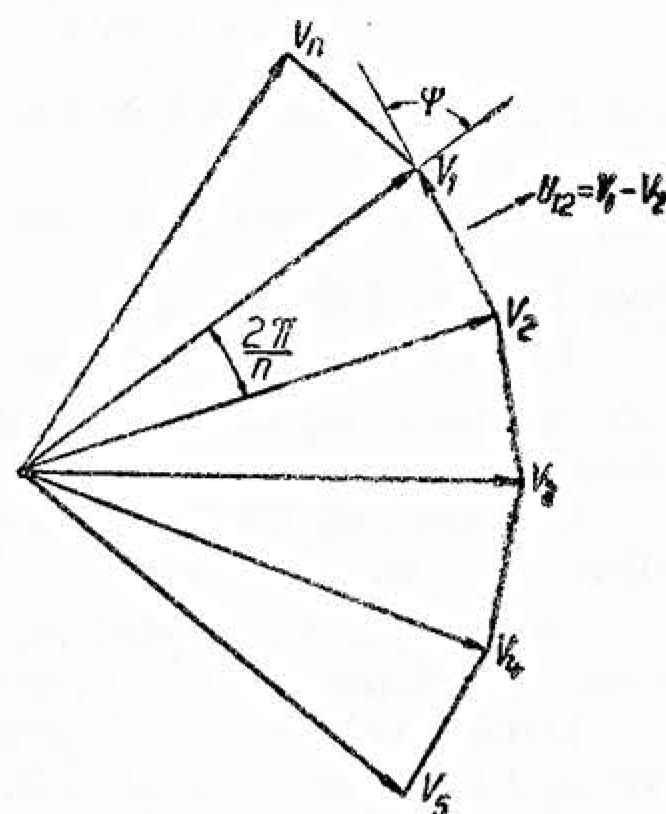


Fig. 128. — Sistem direct de tensiuni compuse.

Argumentul ψ reprezintă defazajul lui U_{12} faţă de V_1, a lui U_{23} faţă de V_2 şi al lui U_{n1} faţă de U_n.

Sistemul tensiunilor compuse U_{12}, U_{23}... este decalat înainte cu unghiul ψ în raport cu sistemul tensiunilor simple, V_1, V_2,...

Modulul tensiunii compuse se calculează din triunghiul OV_1V_2.

$$U_{12}^2=V_1^2+V_2^2-2V_1V_2\cos\frac{2\pi}{n}=2V_1^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) \qquad (286.2)$$

$$U_{12}^2=4V_1^2\sin^2\frac{\pi}{n}$$

de unde

$$U=2V\sin\frac{\pi}{n}.$$

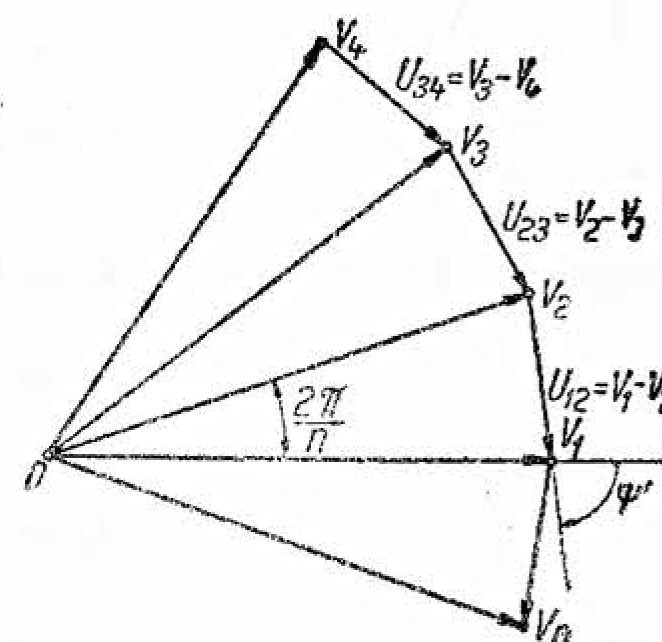


Fig. 129. — Sistem polifazat invers de tensiuni compuse.

Când sistemul tensiunilor stelate V constitue un sistem invers de ordinul 1, atunci şi tensiunile compuse vor constitui un sistem invers de ordinul 1 astfel încât argumentul ψ' al tensiunii U_{12} va fi (fig. 129):

$$\psi_2=(n-2)\frac{\pi}{2n}. \qquad (286.3)$$

Tensiunile compuse vor fi defazate în urmă faţă de tensiunile simple.

β) *Gruparea în poligon.* In această grupare fazele se dispun în serie astfel încât ieşirea uneia se leagă cu intrarea fazei următoare. Se obţin astfel $n+1$ legături exterioare. Suma tensiunilor în lungul fazelor fiind nulă, cele două extremităţi e_1 şi S_5 se pot lega împreună şi se obţin astfel n conductori exteriori (fig. 130).

Fiecare curent care circulă în legăturile exterioare este egal cu diferenţa curenţilor I care circulă în laturile adiacente ale poligonului:

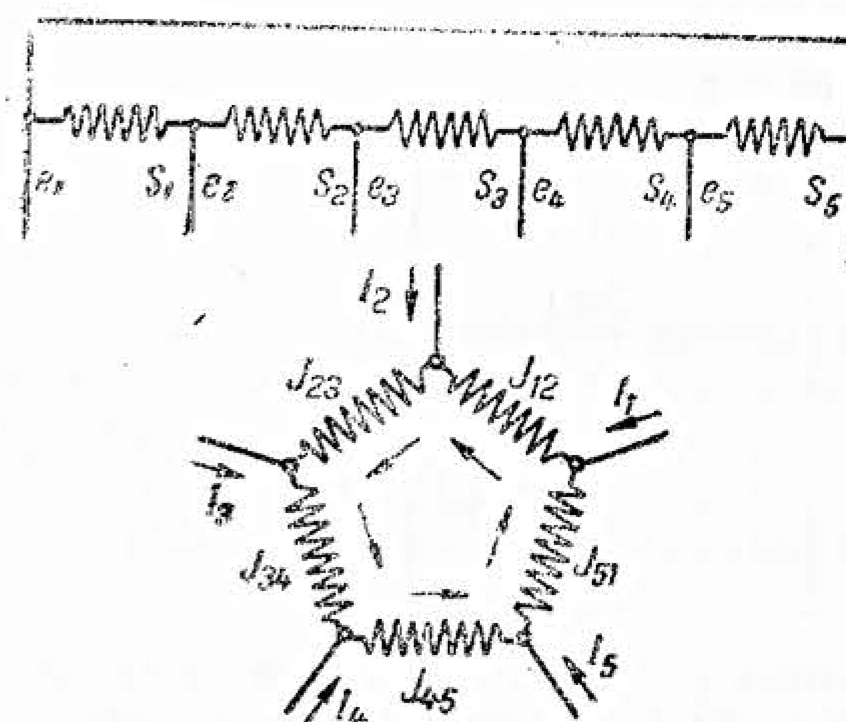


Fig. 130. — Gruparea în poligon.

$$I_1=J_{12}-J_{51}; \qquad I_2=J_{23}-J_{12}. \qquad (286.4)$$

Semnele curenţilor J_{12}, J_{23}... sunt arbitrare.

Raţionând la fel ca la gruparea în stea, se constată:

— modulul curenţilor pe linie este egal cu produsul curenţilor pe poligon prin $2\sin\frac{\pi}{n}$;

— ordinea de succesiune a curenţilor pe linie este aceeaşi ca şi a curenţilor în poligon;

— sistemul curenţilor pe linie este defazat faţă de curenţii poligonali cu $(n-2)\frac{\pi}{2n}$ în urmă dacă sistemul este direct de ordinul 1 şi înainte dacă sistemul este invers de ordinul 1.

287. Puteri în sisteme polifazate echilibrate. Fie sistemul polifazat echilibrat cu n faze:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2}V \sin \omega t; \\ v_2 &= \sqrt{2}V \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right); \\ v_3 &= \sqrt{2}V \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{n}\right); \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= \sqrt{2}V \sin\left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] \end{aligned} \tag{287.1}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2 &= \sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n} - \varphi\right) \\ i_3 &= \sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{n} - \varphi\right) \\ &\dots\dots\dots \\ i_n &= \sqrt{2}\, I \sin\left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n} - \varphi\right] \end{aligned} \tag{287.2}$$

Puterea instantanee a ansamblului va fi egală cu suma puterilor instantanee pe fiecare fază:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + \dots + v_n i_n, \tag{287.3}$$

în care fiecare produs este de forma:

$$\begin{aligned} v_1 i_1 &= VI\cos\varphi - VI\cos(2\omega t - \varphi); \\ v_2 i_2 &= VI\cos\varphi - VI\cos\left[2\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right) - \varphi\right]; \\ v_3 i_3 &= VI\cos\varphi - VI\cos\left[2\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{n}\right) - \varphi\right]; \\ &\dots\dots\dots \\ v_n i_n &= VI\cos\varphi - VI\cos\left[2\left(\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) - \varphi\right]. \end{aligned}$$

Suma celor de ai doilea termeni, fiind suma cosinusurilor arcelor crescând în progresie aritmetică, reprezintă rezultanta a n vectori egali cu VI care se rotesc cu viteza 2ω şi sunt defazaţi între ei cu $\frac{4\pi}{n}$. Această rezultantă este nulă şi deci:

$$p = nVI\cos\varphi. \tag{287.4}$$

Spre deosebire de curenţii alternativi monofazaţi, la curenţii polifazaţi puterea instantanee este constantă. Dispariţia puterii fluctuante constitue unul din avantajele curenţilor polifazaţi.

288. Reprezentarea sub formă complexă a sistemelor polifazate echilibrate. Fie a operatorul vectorial care, multiplicat cu expresia analitică a unui vector, determină un alt vector de acelaşi modul cu primul, dar defazat cu $\frac{2\pi}{n}$ în sens pozitiv.

Acest operator se poate scrie sub formele:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{n}}; \quad a = 1\underline{\left|\frac{2\pi}{n}\right.}; \quad a = \cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}. \tag{288.1}$$

Operatorul a verifică identitatea:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{(n-1)} = 0, \tag{288.2}$$

care reprezintă suma a n vectori ai unei stele regulate cu n ramuri având fiecare un modul egal cu unitatea.

Intr'un sistem direct de ordinul m, vectorii pot fi exprimaţi analitic după cum urmează:

$$\begin{aligned} \overline{A}_1 &= \overline{A}_1 \\ \overline{A}_2 &= a^{-m}\overline{A}_1 \\ \overline{A}_3 &= a^{-2m}\overline{A}_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \overline{A}_n &= a^{-(n-1)m}\overline{A}_1 = a^{m}\overline{A}_1. \end{aligned} \tag{288.3}$$

In sistemul invers de acelaşi ordin m; vectorii vor fi reprezentaţi prin:

$$\begin{aligned} \overline{A}_1 &= \overline{A}_1 \\ \overline{A}_2 &= a^{m}\overline{A}_1 \\ \overline{A}_3 &= a^{2m}\overline{A}_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \overline{A}_n &= a^{(n-1)m}\overline{A}_1 = a^{-m}A_1. \end{aligned} \tag{288.4}$$

289. Calculul puterilor reale, reactive şi aparente într'un sistem polifazat echilibrat. Fie un asftel de sistem cu n faze, având tensiunile pe fază (sau stelate) $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3, \dots,$ $\overline{V}_n$ şi curenţii cu fiecare fază $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3, \dots$ I_n.

Din cauza regimului echilibrat simetric, modulele sau valorile eficace ale diferitelor faze sunt egale şi anume:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 = V_3 = \dots = V_n = V; \\ I_1 &= I_2 = I_3 = \dots = I_n = I; \end{aligned} \tag{289.1}$$

Puterile reale şi reactive ale fiecărei faze sunt:

$$P = VI\cos\varphi = \overline{V}\,\overline{I} \tag{289.2}$$

$$Q = VI\sin\varphi = \overline{V} \times \overline{I} \tag{289.3}$$

în care φ este unghiul de defazaj al curentului I din una din fazele sistemului, faţă de tensiunea V a aceleiaşi faze.

Pe baza principiului conservării, puterile reale şi reactive totale vor fi:

$$\overline{P}_t = nP = n\,VI\cos\varphi = n\,\overline{V}\,\overline{I}\,; \qquad (289.4)$$

$$\overline{Q}_t = nQ = n\,VI\sin\varphi = n\,\overline{V}\times\overline{I}; \qquad (289.5)$$

iar puterea aparentă totală va fi:

$$\overline{S}_t = P_t + j\,Q_t = n\,VI\cos\varphi + j\,n\,VI\sin\varphi, \qquad (289.6)$$

având ca modul (sau putere aparentă);

$$|\overline{S}_t| = S_t = \sqrt{(n\,VI\cos\varphi)^2 + (n\,VI\sin\varphi)^2} = n\,VI. \qquad (289.7)$$

Se pot exprima aceleaşi mărimi în funcţie de tensiunea compusă (sau tensiunea între faze) U a aceluiaşi sistem.

Pentru un număr n de faze echilibrate, relaţia dintre U şi V este:

$$U = 2\,V\sin\frac{\pi}{n} \qquad (289.8)$$

şi deci:

— puterea reală pe fază ... $P = \dfrac{U}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}\,I\cos\varphi$;

— puterea reactivă pe fază ... $Q = \dfrac{U}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}\,I\sin\varphi$;

— puterea reală totală ... $P_t = \dfrac{nU}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}\,I\cos\varphi$;

— puterea reactivă totală ... $Q_t = \dfrac{nU}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}\,I\sin\varphi$;

— puterea aparentă totală ... $S_t = \dfrac{nU}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}\,I$.

Şi în acest caz unghiul φ are aceeaşi semnificaţie, adică unghiul de defazaj dintre tensiunea pe fază V şi curentul pe aceeaşi fază I.

După cum s'a spus, puterea fluctuantă, într'un regim echilibrat polifazat este nulă.

290. **Realizarea unui sistem polifazat echilibrat.** Un sistem echilibrat cere, ca atât tensiunile cât şi curenţii să fie echilibraţi.

In general echilibrarea forţelor electromotoare depinde de condiţiile constructive ale generatorilor. Echilibrarea tensiunilor într'un punct al reţelei implică, pe lângă echilibrarea forţelor electromotoare şi condiţia ca pe linie, căderile de tensiune să fie echilibrate ca valoare şi defazaj faţă de forţa electromotoare. Echilibrarea curenţilor implică, pe lângă echilibrarea tensiunilor şi condiţia ca aparatele de recepţie să fie echilibrat construite, adică să fie identic construite şi să aibă aceeaşi impedanţă de recepţie pe toate fazele reţelei.

In cazul unui regim echilibrat, dacă se introduc valorile inductanţelor de serviciu şi ale capacităţilor de serviciu, atunci fiecare fir al unei linii polifazate se calculează ca şi cum ar fi independent.

Se pot avea sisteme, în care forţele electromotare la origine să fie echilibrate, însă impedanţele de recepţie şi deci curenţii să fie desechilibraţi. Astfel de sisteme se mai numesc uneori şi semiechilibrate.

Aceasta este în general situaţia cea mai răspândită în practică.

291. **Regimul trifazat**

α) *Tensiunea simplă* (pe fază) *şi compusă* (între faze). Fie un sistem trifazat, având tensiunile pe fază echilibrate, V_1, V_2, V_3 constituind un sistem direct.

Tensiunile compuse (între faze) constitue tot un sistem trifazat simetric direct $\overline{U}_{12}$, $\overline{U}_{23}$, $\overline{U}_{31}$ (Fig. 131).

Valoarea eficace a tensiunii compuse este:

$$U = 2V\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,V. \qquad (291.1)$$

Vectorul tensiunii compuse $\overline{U}_{12}$ faţă de tensiunea pe fază $\overline{V}_1$ are expresia:

$$\overline{U}_{12} = \sqrt{3}\,\overline{V}_1 \underline{|\pi/6}. \qquad (291.2)$$

Tensiunea compusă U_{12} este deci defazată cu:

$$\psi = (3-2)\frac{\pi}{2\cdot 3} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \qquad (291.3)$$

înaintea tensiunii $\overline{V}_1$. Acelaşi decalaj îl are $\overline{U}_{23}$ faţă de $\overline{V}_2$. Tensiunile compuse $\overline{U}_{13}$, $\overline{U}_{21}$, $\overline{U}_{23}$, constitue tot un sistem direct cu aceeaşi valoare eficace, însă având expresia:

$$\overline{U}_{13} = \sqrt{3}\,\overline{V}_1 \underline{\Big|-\frac{\pi}{6}}. \qquad (291.4)$$

Acest sistem este deci defazat tot cu 30° faţă de sistemul $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$, însă în urmă. Dacă sistemul $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ este invers, atunci şi $\overline{U}_{12}$, $\overline{U}_{23}$, $\overline{U}_{31}$ este invers dar defazat cu 30° în urma celui dintâi.

Toate aceste concluzii se pot stabili şi pe cale vectorial geometrică.

β) *Montajul în stea şi în triunghi.* Forţele electromotoare alimentând un sistem trifazat sunt constituite din trei forţe electromotoare de valoare eficace E, montate în stea sau în triunghi.

In cazul montajului în stea, fiecare din forţele electromotoare E_1, E_2, E_3 sunt legate între faza respectivă şi punctul neutru O. Ele sunt deci echivalente cu tensiunea simplă (pe fază).

In cazul montajului în triunghi, fiecare din acele forţe electromotoare sunt montate între fazele 1—2, 2—3 şi 3—1.

Ele sunt echivalente cu tensiunea compusă (între faze).

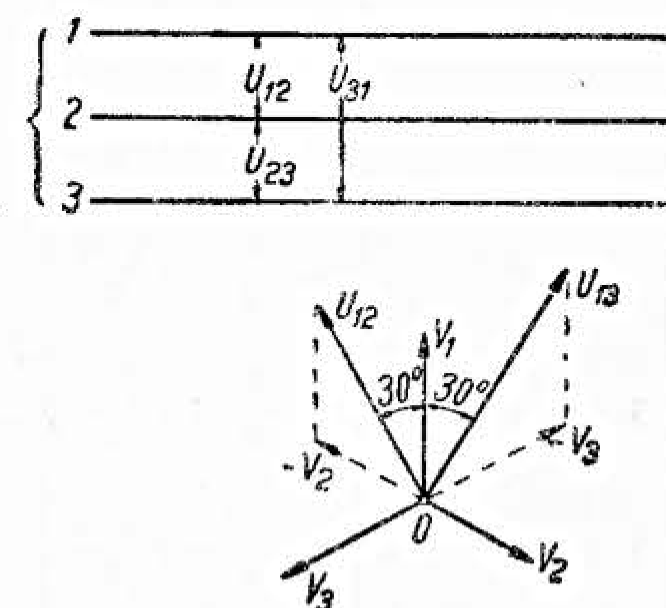


Fig. 131. — Tensiune simplă şi compusă de sistem trifazat simetric.

Când forţele electromotoare sunt montate în stea, ele produc o tensiune între faze: $U\sqrt{3}E$.

La extremitatea «utilizare», tensiunile aplicate receptorului respectiv, în concordanţă cu construcţia acelui receptor, deasemenea pot fi montate în stea

sau în triunghi. Forţele electromotoare la extremitatea « producere » şi tensiunile la extremitatea « utilizare » pot avea acelaşi montaj sau montaje diferite.

292. Operatorul a **în sisteme trifazate.** Operatorul a în sisteme trifazate are proprietatea de a roti vectorul, în sensul pozitiv, cu unghiul $\frac{2\pi}{3}$ (Fig. 132). El poate fi pus sub forma:

$$a = 1\underline{|2\pi/3} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{292.1}$$

Prin folosirea acestui operator, cele trei tensiuni pe fază $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ pot fi exprimate sub forma:

— In sistemul direct de ordinul 1:

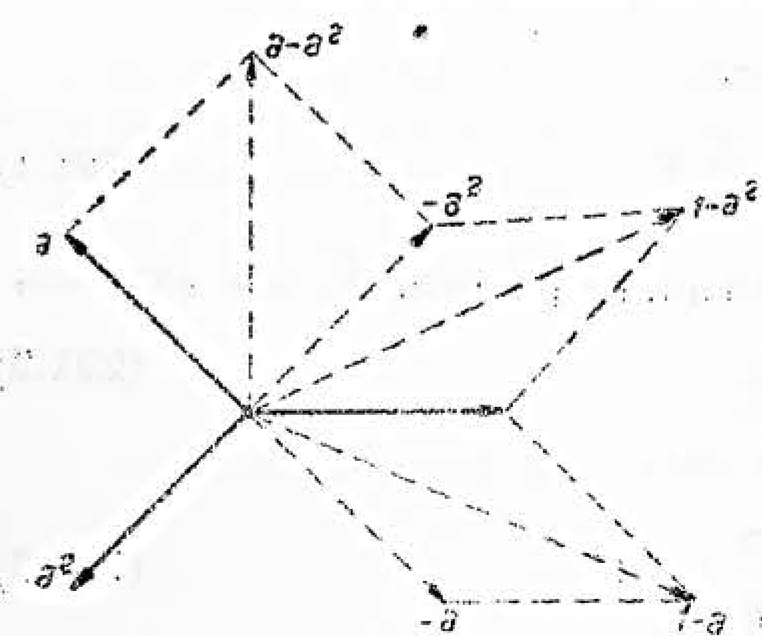


Fig. 132. — Operatorul a în sistemul trifazat.

$$\overline{V}_2 = a^2\overline{V}_1 \quad \text{şi} \quad \overline{V}_3 = a\overline{V}_1; \tag{291.2}$$

— In sistemul invers de ordinul 1:

$$\overline{V}_2 = a\overline{V}_1 \quad \text{şi} \quad \overline{V}_3 = a^2\overline{V}_1 \tag{292.3}$$

Principalele proprietăţi şi combinaţii în care intervine operatorul a în sistemul trifazat sunt:

$$a^2 = a \cdot a \tag{292.4}$$

reprezintă o rotaţie cu $2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ în sens pozitiv, sau cu $-\frac{2\pi}{3}$ în sens negativ.

$$a^0 = 1 \tag{292.5}$$

reprezintă operatorul care meţine vectorul în poziţia iniţială fără rotire. Suma celor trei vectori operatori a^0, a şi a^2 este nulă:

$$a^0 + a + a^2 = 0.$$

Tabela 3. Calculul cu operatorul a

Operaţia de calcul	Expresia sub formă complexă	Expresia sub formă polară	Operaţia de calcul	Expresia sub formă complexă	Expresia sub formă polară
a	$-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1\underline{\|2\pi/3}$	$1 - a^2$	$\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}\underline{\|\pi/6}$
a^2	$-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1\underline{\|-2\pi/3}$	$a - a^2$	$j\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\underline{\|\pi/2}$
$1 + a = -a^2$	$\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1\underline{\|\pi/3}$	$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a^2}{3}$	$\frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\|\pi/6}$
$1 + a^2 = -a$	$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1\underline{\|-\pi/3}$	$\frac{1}{1-a^2} = \frac{1-a}{3}$	$\frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\|-\pi/6}$
$a + a^2$	-1	$1\underline{\|\pi}$	$\frac{1}{a-a^2} = \frac{a^2-a}{3}$	$-j\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\|-\pi/2}$
$1 - a$	$\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}\underline{\|-\pi/6}$	a^0	1	$1\underline{\|0}$

293. Impedanţe echilibrate şi desechilibrate. Orice aparat receptor într'un sistem trifazat este echivalent cu un sistem de impedanţe, care la rândul lor pot fi echilibrate, sau desechilibrate.

Impedanţele sunt echilibrate, când toate cele trei laturi echivalente ale aparatului receptor sunt identic construite şi au aceeaşi expresie $\overline{Z}$, a impedanţei complexe. Impedanţele sunt desechilibrate, când expresiile celor trei impedanţe pe cele trei laturi au valori diferite $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$.

Pe de altă parte, cele trei impedanţe pot fi montate în stea sau în triunghi.

294. Curenţii pe linie şi în laturile unui dispozitiv trifazat. Fie un receptor trifazat, echivalent, după cum s'a văzut, cu trei impedanţe, constituind cele trei laturi ale sistemului.

In cazul când dispozitivul receptor este montat în stea şi racordat la o linie trifazată, atunci curenţii din laturile receptorului sunt egali şi în fază cu acei ai liniei respective.

Când dispozitivul este montat în triunghi, fiecare nod al triunghiului este legat la câte una din fazele liniei. Se notează prin $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$ vectorii curenţilor, din linie înspre dispozitivul receptor, iar prin $\overline{J}_{12}$, $\overline{J}_{23}$, $\overline{J}_{31}$ vectorii curenţilor in laturile 1—2, 2—3 şi 3—1 ale receptorului (fig. 133).

Modulul curenţilor pe linie sau valoarea lor eficace fiind I, iar accea din laturi J se obţine relaţia:

$$I = 2\sin\frac{\pi}{3}\,J = \sqrt{3}\,J. \tag{294.1}$$

Defazajul dintre curenţii de pe linie şi din laturi este:

$$\psi = (3-2)\frac{\pi}{2\cdot 3} = \frac{\pi}{6}. \tag{294.2}$$

Relaţia vectorială dintre curenţii de pe linie şi cei din laturi:

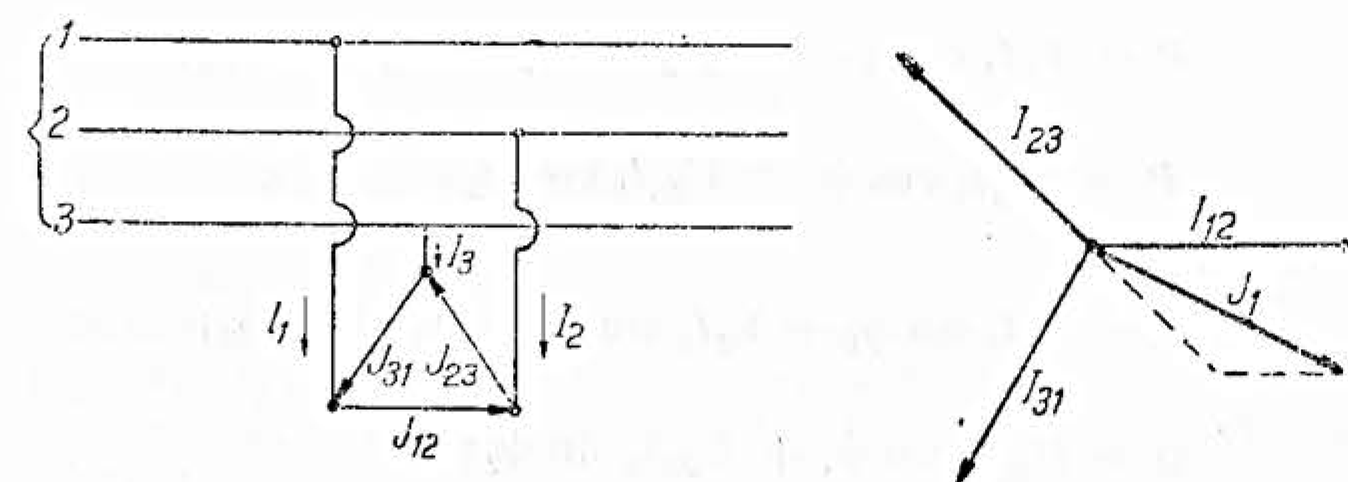


Fig. 133. — Schema şi diagrama curenţilor unui sistem receptor trifazat în triunghi.

— în sistemul direct: $$\overline{I}_1 = \sqrt{3}\,\overline{J}_{12}\,\underline{\Big|-\frac{\pi}{6}}; \tag{294.3}$$

— în sistemul invers: $$\overline{I}_1 = \sqrt{3}\,\overline{J}_{12}\,\underline{\Big|+\frac{\pi}{6}}. \tag{294.4}$$

Relaţii asemănătoare există între curenţii $\overline{I}_2$ (respectiv $\overline{I}_3$) faţă de $\overline{J}_{23}$ (respectiv $\overline{J}_{31}$).

In cazul unui sistem echilibrat, defazajele curenţilor pe linii $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$ faţă de tensiunile pe fază $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sunt egale între ele şi egale cu acelea dintre curenţii de pe laturi $\overline{J}_{12}$, $\overline{J}_{23}$, $\overline{J}_{31}$, faţă de tensiunile compuse $\overline{U}_{12}$, $\overline{U}_{23}$, $\overline{U}_{31}$.

295. Determinarea curenţilor pe linie. Fie mai mulţi receptori legaţi în paralel la aceeaşi linie trifazată, unii dintre ei montaţi în stea şi ceilalţi în triunghi (fig. 134).

Se calculează conform celor indicate mai sus, pentru fiecare dintre aceşti receptori, curenţii absorbiţi din linie şi defazajele respective, în raport cu tensiunea pe fază corespunzătoare.

Această determinare se face pentru una dintre faze, situaţia fiind identică pe toate fazele din cauza simetriei.

Se presupune că se găsesc curenţii absorbiţi din linie, de fiecare din receptori, sub forma: $I_1' \underline{|\varphi'}$, $I_1'' \underline{|\varphi''}$, $I_1''' \underline{|\varphi'''}$, ..., etc. Curentul total absorbit dela fază va fi deci:

$$I_1 \underline{|\varphi} = I_1' \underline{|\varphi'} + I_1'' \underline{|\varphi''} + I_1''' \underline{|\varphi'''} + \dots$$

Pe celelalte faze se va găsi aceeaşi valoare eficace I de curent şi acelaşi defazaj φ.

Curentul total $I \underline{|\varphi}$ este o sumă vectorială a curenţilor fiecărui receptor. Ei pot fi determinaţi printr'una din metodele: vectorială, geometrică, vectorial analitică, sau mărimi complexe.

Observaţie. In cazul când unul sau mai mulţi receptori sunt constituiţi din impedanţe desechilibrate, atunci determinarea trebue făcută pentru fiecare fază în parte.

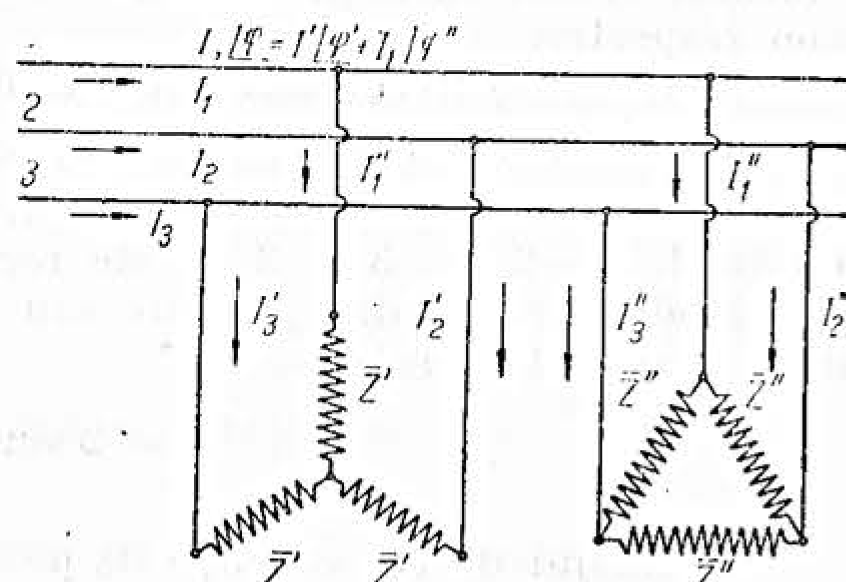


Fig. 134. — Schema unui sistem trifazat cu mai mulţi receptori în paralel.

296. Puterile reale şi reactive ale unui sistem trifazat. Se disting situaţiile:

α) *Cazul general al unui sistem desechilibrat şi ca tensiune şi ca curent.*

Putere reală:

$$P = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + V_3 I_3 \cos \varphi_3; \quad (296.1)$$

sau

$$P = U_{13} I_1 \cos \psi_1 + U_{23} I_2 \cos \psi_2 . \quad (296.2)$$

Putere reactivă:

$$Q = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2 + V_3 I_3 \sin \varphi_3; \quad (296.3)$$

sau

$$Q = U_{13} I_1 \sin \psi_1 + U_{23} I_2 \sin \psi_2; \quad (296.4)$$

în care V_1, V_2, V_3 sunt tensiunile fiecărei faze raportate la o aceeaşi origine oarecare;
I_1, I_2, I_3 —curenţii pe fiecare din faze;
φ_1, φ_2, φ_3 —defazajele curenţilor faţă de tensiunile fazei respective;
U_{13}, U_{23} —tensiunile între fazele 1—3 şi 2—3;
ψ_1, ψ_2 —defazajele curenţilor I_1 şi I_2 faţă de U_{13} şi respectiv U_{23}.

β) *Cazul unui sistem echilibrat ca tensiune şi desechilibrat ca curent.*

Putere reală:

$$P = V (I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + I_3 \cos \varphi_3); \quad (296.5)$$

sau

$$P = U (I_1 \cos \psi_1 + I_2 \cos \psi_2). \quad (296.6)$$

Putere reactivă:

$$Q = V (I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 + I_3 \sin \varphi_3); \quad (296.7)$$

sau

$$Q = U (I_1 \sin \psi_1 + I_2 \sin \psi_2);$$

sau

$$Q = \frac{U}{\sqrt{3}} (I_1 \cos \psi_{23} + I_2 \cos \psi_{31} + I_3 \cos \psi_{12});$$

în care V este tensiunea pe fază faţă de punctul neutru;
U — tensiunea compusă între faze;
I_1, I_2, I_3, φ_1, φ_2, φ_3 — aceleaşi semnificaţii ca la cazul α;
ψ_{23} — defazajul curentului I_1 faţă de tensiunea U_{23};
ψ_{31} — defazajul curentului I_1 faţă de tensiunea U_{31};
ψ_{12} — defazajul curentului I_3 faţă de U_{12}.

γ) *Cazul unui sistem echilibrat şi ca tensiune şi ca curent.*

Puterea reală:

$$P = 3 V I \cos \varphi$$

sau

$$P = \sqrt{3}\, U I \cos \varphi$$

Puterea reactivă:

$$Q = 3 V I \sin \varphi$$

sau

$$Q = \sqrt{3}\, U I \sin \varphi$$

sau

$$Q = \sqrt{3} (U_{13} I_1 \cos \psi_1 - U_{23} I_2 \cos \psi_2).$$

Putere aparentă:

$$S = 3 V I$$

sau

$$S = \sqrt{3}\, U I;$$

în care V este tensiunea pe fază faţă de punctul neutru;
U — tensiunea între faze;
I — curentul;
φ — defazajul între tensiunea pe fază şi curentul respectiv;
U_{13}, U_{23}, I_1, I_2, ψ_1 şi ψ_2 — aceleaşi semnificaţii ca în cazul α.

In orice regim desechilibrat sau echilibrat, puterea aparentă totală poate fi definită sub forma:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Observaţie. Expresiile din cazul α sunt valabile şi în cazurile β şi γ. Deasemenea expresiile din cazul β sunt valabile şi în cazul γ.

In cazul γ unghiul de defazaj φ poate fi determinat prin expresia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}\, \frac{U_{13} I_1 \cos \psi_1 - U_{23} I_2 \cos \psi_2}{U_{13} I_1 \cos \psi_1 + U_{23} I_2 \cos \psi_2}, \quad (296.8)$$

în care toţi termenii din membrul 2 au semnificaţiile indicate în cazul α.

Este de precizat că la calculul şi determinarea puterilor nu este necesar să se cunoască dacă linia trifazată este legată în stea sau în triunghi la extremităţi.

297. Operaţia compensării factorului de putere în regim trifazat. Intr'un regim trifazat echilibrat, factorul de putere se exprimă prin cos φ, în care φ este defazajul pe fază.

Operaţia compensării factorului de putere se rezolvă prin metodele: vectorială, geometrică sau analitică. In scopul compensării se montează în derivaţie pe linie un alt receptor, care să absoarbă un curent cunoscut J cu un defazaj propriu ψ, astfel încât să se obţină un curent rezultant I' cu un defazaj φ' care se cere atunci când pe linie se absoarbe, înainte de compensare, un curent I cu un defazaj φ.

Această condiţie se exprimă prin:

$$I'\,\underline{|\varphi'} = I\,\underline{|\varphi} + J\,\underline{|\psi}, \tag{297.1}$$

ceeace se poate exprima algebric prin sistemul de două ecuaţii:

$$I' \cos\varphi' = I\cos\varphi + J\cos\psi \;\; ; \;\; I'\sin\varphi' = I\sin\varphi + J\sin\psi. \tag{297.2}$$

Să se presupună de exemplu că se urmăreşte obţinerea unui factor de putere $\cos\varphi' = 1$ şi deci $\varphi' = 0$. Se va utiliza un receptor absorbind un curent J, sub un defazaj $\psi = \frac{\pi}{2}$. In acest caz sistemul de relaţii devine:

$$I' = I\cos\varphi \quad \text{şi} \quad J + I\sin\varphi = 0. \tag{297.3}$$

Se obţine astfel atât valoarea curentului total I', după compensare, cât şi valoarea curentului J pe care trebue s'o aibă sistemul compensator. Se observă deasemenea, că dacă defazajul φ era în urmă, sau de natură inductivă, defazajul curentului compensator J trebue să fie înainte.

Dispozitivul compensator va fi un sistem condensator.

298. **Metoda prin separaţia puterilor.** Factorul de putere are ca substrat fizic puterea reactivă. Cunoscând puterea reactivă absorbită de reţea, se va monta un dispozitiv compensator care să absoarbă o putere reactivă egală sau de sens invers, spre a se anula totalul puterii reactive de reţea.

Dacă, de exemplu, puterea reală iniţială este P sub un factor de putere $\cos\varphi$, se deduce puterea reactivă absorbită prin $Q = P\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Dacă această putere reactivă este de natură inductivă, se montează un sistem de trei condensatori, fiecare de capacitate C, în triunghi. Valoarea acestei capacităţi se determină prin:

$$3\,C\omega U^2 = Q = P\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{298.1}$$

de unde:

$$C = \frac{P\,\mathrm{tg}\,\varphi}{3\,\omega U^2} \tag{298.2}$$

Dacă nu este nevoie să se compenseze integral factorul de putere, ci numai să se reducă dela $\cos\varphi$ la $\cos\varphi'$, atunci valoarea capacităţii devine:

$$C = \frac{P\,(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi')}{3\,\omega U^2} \tag{298.3}$$

U fiind tensiunea dintre faze.

Dacă invers, defazajul iniţial φ este înaintea tensiunii, compensarea se face prin sistemul de trei inductanţe care, montate în triunghi, trebue să satisfacă condiţia:

$$3\,\frac{U^2}{L\omega} = Q = P\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{298.4}$$

de unde

$$L = \frac{3\,U^2}{P\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi}. \tag{298.5}$$

P. Câmpuri învârtitoare

299. **Maşini cu poli aparenţi şi maşini cu întrefier constant.** Din punct de vedere constructiv, maşinile electrice sunt de două tipuri: maşini cu poli aparenţi şi maşini cu întrefier constant.

La maşinile cu poli aparenţi, inductorul este totdeauna format dintr'o coloană de poli alternativi, nord şi sud, excitaţi prin bobine înfăşurate pe fiecare pol şi situate în exteriorul sau interiorul indusului (Fig. 135).

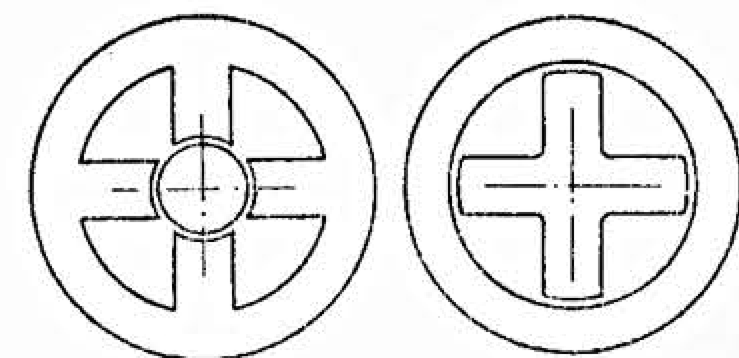


Fig. 135. — Maşini cu poli aparenţi.

A doua categorie are atât statorul cât şi rotorul de forma unor cilindri de revoluţie, concentrici, lăsând între ei un întrefier de o grosime constantă, suficientă pentru ca în timpul rotaţiei cele două armături să nu vină în contact.

300. **Câmpuri radiale.** Se va presupune în cele ce urmează că fierul este infinit permeabil faţă de aer, adică se vor neglija efectele saturaţiei magnetice.

In aceste condiţii, câmpul magnetic într'un întrefier constant trebue să fie normal la suprafeţele care-l delimitează.

Intre B şi H există relaţia:

$$B = \mu H \tag{300.1}$$

Dacă se presupune că inducţia B are o valoare bine determinată şi μ este foarte mare în fier, rezultă că H, câmpul magnetic în fier, este neglijabil şi că deci potenţialul magnetic este sensibil constant în toate regiunile cu fier ale maşinii şi prin urmare cele două suprafeţe ale armăturilor fiind echipotenţiale, liniile de forţă în întrefier sunt normale la aceste suprafeţe.

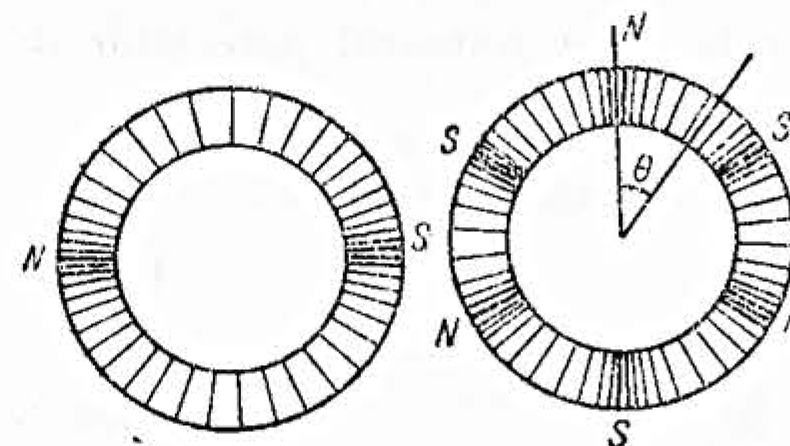


Fig. 136. — Câmp radial bipolar şi hexapolar.

Un astfel de câmp, a cărui direcţie este deci însăşi raza maşinii, se numeşte *« câmp radial »*.

Astfel de câmpuri pot fi bipolare şi multipolare (fig. 136).

Fie θ originea dela care se măsoară distanţele x în lungul circumferinţei (fig. 137).

La maşinile electrice, câmpul B în întrefier este o funcţie periodică de x. Noţiunea de funcţie periodică în spaţiu este analoagă funcţiei periodice de timp. Situaţia este asemănătoare pentru câmpul H.

Numărul de perioade al funcţiei B în lungul întrefierului este evident egal cu numărul p de perechi de poli.

Fie a distanţa care separă două puncte omoloage ale unui pol nord şi altul sud consecutiv. Perioada funcţiei B este $2a$ şi deci, dacă se schimbă x în $x + 2a$, $x + 4a$, etc., funcţia B recapătă aceleaşi valori.

In loc de a lua ca variabilă distanţa x la periferia indusului, se poate lua ca variabilă, unghiul la centru corespunzător, aceste două variabile fiind legate prin relaţia (fig. 137):

$$\theta = \frac{2x}{D},$$

în care D este diametrul rotorului. Se va nota cu Θ perioada corespunzând noii variabile şi deci:

$$\Theta = \frac{4a}{D}.$$

Intre perioada Θ şi numărul de perechi de poli există relaţia:

$$\Theta = \frac{2\pi}{p},$$

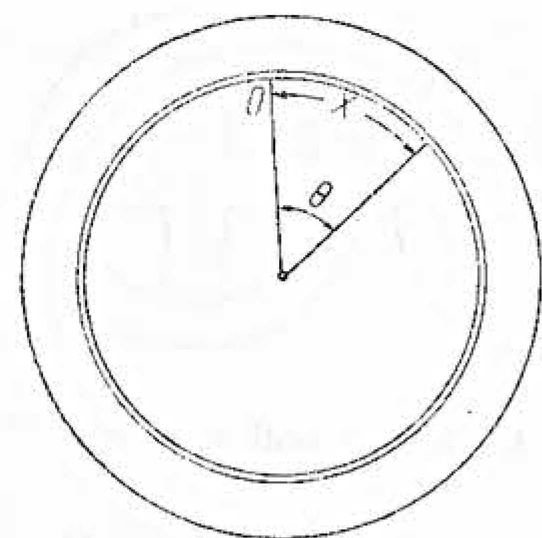


Fig. 137. – Repartiţia câmpurilor la periferia indusului.

Dacă funcţia periodică este sinusoidală;

$$B = b\cos 2\pi\frac{x}{2a} = b\cos\pi\frac{x}{a}, \tag{300.2}$$

în care s'a luat ca origine punctul în care câmpul este maxim, iar b este valoarea maximă.

Dacă se notează: $\frac{2\pi}{2a} = \alpha$,

atunci

$$B = b\cos\alpha x$$

şi prin analogie cu funcţiile sinusoidale în timp, se poate defini α ca fiind pulsaţia în spaţiu a funcţiei B.

Dacă se ia ca variabilă unghiul la centru θ,

$$B = b\cos 2\pi\frac{\theta}{\Theta} = b\cos p\,\theta. \tag{300.3}$$

In acest sistem pulsaţia corespunzătoare este chiar numărul perechilor de poli.

301. **Diferenţa de fază în spaţiu.** Fie y o funcţie periodică de distanţa x, măsurată în lungul întrefierului şi considerată dela o origine oarecare:

$$y_1 = A_1\cos\alpha x \tag{301.1}$$

şi o altă funcţie de aceeaşi perioadă:

$$y_2 = A_2\cos(\alpha x - \beta). \tag{301.2}$$

Asemănător funcţiilor periodice de timp, se defineşte cantitatea β ca fiind diferenţa de fază dintre funcţiile y_1 şi y_2, însă o diferenţă de fază în spaţiu.

Defazajul în spaţiu al funcţiei y_2 faţă de y_1 va fi deci:

$$\frac{\beta}{\alpha}.$$

Metoda de reprezentare grafică aplicată anterior funcţiilor periodice de timp poate fi folosită şi pentru funcţiile periodice în spaţiu.

Dacă y_1 este considerat ca origine de fază şi deci reprezentat prin vectorul $\overline{OA_1}$, funcţia y_2 se va prezenta prin vectorul $\overline{OA_2}$ făcând unghiul β în întârziere faţă de precedentul.

Funcţiile y_1 şi y_2 mai pot fi scrise sub forma:

$$y_1 = A_1\cos p\theta; \qquad y_2 = A_2\cos(p\theta - \beta)$$

în care:

$$\alpha x = p\theta.$$

Diferenţa de fază β este deci independentă de variabila folosită.

Dacă se notează cu φ decalajul geometric al funcţiilor, adică unghiul la centru care defineşte poziţiile când $y_1 = 0$ şi $y_2 = 0$, se obţine:

$$y_1 = A_1\cos p\theta; \tag{301.3}$$

$$y_2 = A_2\cos p(\theta - \varphi), \quad \text{unde} \quad \beta = p\varphi. \tag{301.4}$$

302. **Diagrama de spaţiu şi diagrama de timp.** Fie două funcţii periodice de x defazate în spaţiu cu β:

$$y_1 = f(\alpha x) \quad , \quad y_2 = f(\alpha x - \beta),$$

în care x creşte proporţional cu timpul: $x = vt$ şi deci,

$$y_1 = f(\alpha vt); \tag{302.1}$$

$$y_2 = f(\alpha vt - \beta). \tag{302.2}$$

Aceste două funcţii sunt acum funcţii periodice de timp, de pulsaţie αv (în timp de data aceasta), diferenţa de fază rămânând, ca valoare, aceeaşi.

Urmează deci, că orice diagramă construită ca diagramă de spaţiu poate fi transformată în diagramă de timp.

Astfel, într'un alternator al cărui indus se roteşte într'un câmp sinusoidal fix, forţa electromotoare indusă într'un conductor poate fi considerată ca o funcţie, fie de timp, fie de abscisa x (considerată în lungul întrefierului).

Pentru două spire (bare) oarecare, diferenţa de fază dintre forţele electromotoare induse va fi exprimată prin acelaşi unghi, indiferent dacă se ia ca variabilă x sau t.

303. **Câmp radial cu repartiţie sinusoidală.** Fie întrefierul considerat pentru simplificare rectiliniu, iar pânza de curenţi normali pe planul figurii, adică paralel cu axa maşinii. (fig. 138)

Fie conturul $ABCD$ infinit mic, constituit din paralelele $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$, precum şi perpendicularele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ pe direcţia întrefierului, îmbrăţişând o parte infinit mică dx din pânza de curenţi, adică:

$$\overline{BC} = dx.$$

H — este câmpul în întrefier în faţa lui A;
$H + dH$ — câmpul în întrefier în faţa lui D;
$\overline{J}\,dx$ — intensitatea în amperi a porţiunii de curent (dublu haşurată). Funcţia y care urmează să fie determinată este liniară cu x. Ea reprezintă densitatea liniară de curent.

Teorema circulaţiei câmpului magnetic aplicată conturului $ABCD$, ţinând seama că în fier câmpul este neglijabil, dă:

$$eH - e(H + dH) = \frac{4\pi}{10}\overline{J}\,dx, \tag{303.1}$$

de unde:

$$\overline{J} = -\frac{10\,e}{4\pi}\frac{dH}{dx} = \frac{10\,e}{4\pi}\alpha H_m\sin\alpha x = \overline{J}_0\sin\alpha x, \tag{303.2}$$

în care $\overline{J}$ şi $\overline{J}_0$ sunt exprimaţi în amperi pe centimetru, şi H în oerstezi.

Din relaţia (303.2), rezultă că intensitatea curentului trebue să fie nulă în elementul pânzei de curent plasată în faţa punctului unde câmpul este maxim

şi invers, intensitatea curentului trebue să fie maximă în faţa punctului în care câmpul este nul. Curentul şi câmpul sunt două funcţii în cuadratură în spaţiu.
In ce priveşte fluxul pe pol, el rezultă din:

$$\varphi = l\int_{-a/2}^{+a/2} B dx = lB_m \int_{-a/2}^{+a/2} \cos \pi \frac{x}{a} dx = \frac{2}{\pi} B_m S, \qquad (303.3)$$

în care l este lungimea polului;
S — luprafaţa lui, egală cu la;
φ — fluxul pe pol.

304. **Câmp învârtitor.** Cele arătate anterior presupun câmpul B sinusoidal în spaţiu, ca fiind produs de un sistem de curenţi constanţi şi imobili, prin urmare constant în timp.

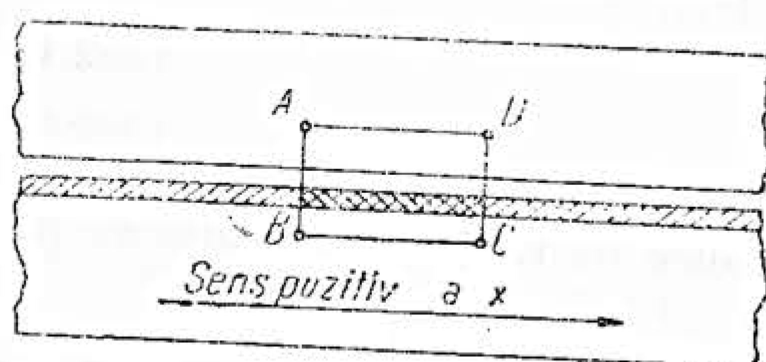


Fig. 138. — Câmp repartizat sinusoidal într'un întrefier rectilin.

Se consideră în cele ce urmează că, deşi ficşi în spaţiu, curenţii care produc câmpul, variază sinusoidal în timp şi deci expresia câmpului va fi:

$$B = B_m \sin \omega t \cos \alpha x = B_m \sin \omega t \cos p\theta. \quad (304.1)$$

Un astfel de câmp se numeşte *câmp alternativ cu repartiţie sinusoidală în spaţiu.* El este caracterizat prin proprietatea că la momentul t are aceeaşi fază în toate punctele întrefierului, dar amplitudinile $B_m \cos \alpha x$ variază după legea sinusoidală în funcţie de abscisa x a punctului considerat.

Se presupune că pe acelaşi întrefier se suprapune un număr oarecare de câmpuri alternative cu repartiţie sinusoidală în spaţiu şi defazate între ele cu aceiaşi fracţiune de perioadă, atât în spaţiu cât şi în timp.

Câmpul rezultant este un câmp constant în mărime, rotindu-se însă cu viteza $\Omega = \frac{\omega}{p}$.

305. **Câmp învârtitor bifazat multipolar.** Acest câmp se produce cu ajutorul curenţilor bifazaţi.

Fie:

$$B_1 = B_m \cos p\theta \sin \omega t \quad \text{şi} \quad B_2 = B_m \cos p\theta' \sin (\omega t - \varphi) \qquad (305.1)$$

cele două câmpuri produse de fiecare fază a curentului bifazat.

Pentru claritatea reprezentării, se vor considera două coroane concentrice, care însă în realitate se suprapun în acelaşi întrefier (fig. 139).

Faza întâi a curentului bifazat va produce câmpul multipolar alternativ şi fix în spaţiu reprezentat schematic la momentul t prin N_1S_1, N_1S_1, etc.

Faza a doua a curentului bifazat va produce câmpul multipolar alternativ şi fix în spaţiu reprezentat schematic la momentul t prin N_2S_2, N_2S_2, etc.

Intre axa ox şi ox' există relaţiile:

$$\theta' = \theta - xox' = \theta - \frac{2\pi}{4p} = \theta - \frac{\pi}{2p} \qquad (305.2)$$

şi deci expresiile câmpurilor vor fi:

$$B_1 = B_m \cos p\theta \sin \omega t,$$
$$B_2 = B_m \sin p\theta \cos \omega t, \qquad (305.3)$$

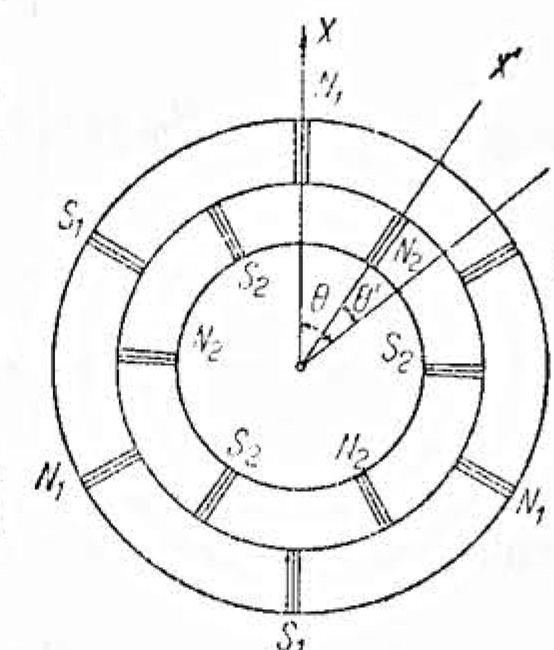
în care $\varphi = \frac{\pi}{2}$ iar faza câmpului B_1 este luată ca origine de fază.

Câmpul radial rezultant va fi:

$$B = B_1 + B_2 = B_m (\cos p\theta \sin \omega t - \sin p\theta \cos \omega t) = B_m \sin (\omega t - p\theta).$$

Intr'un punct dat, corespunzând unui unghi θ, câmpul magnetic radial este o funcţie sinusoidală de timp de aceeaşi perioadă ca şi curentul.

Viteza de rotaţie a câmpului învârtitor rezultă determinând noua poziţie θ_1 pentru care câmpul este maxim.


Fig. 139. Câmp învârtitor bifazat.

Făcând $B = B_m$ rezultă:

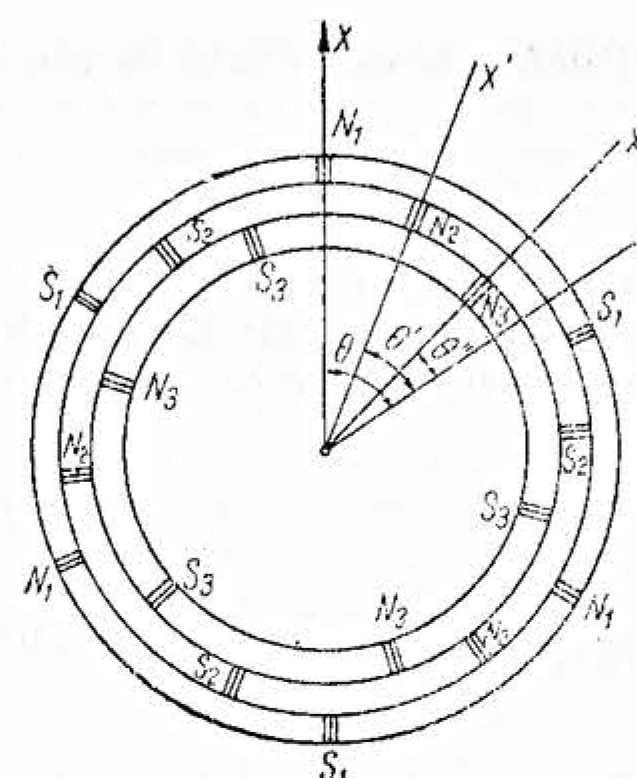
$$\omega t - p\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{şi deci} \quad \theta_1 = \frac{\omega}{p} t - \frac{\pi}{2p} \cdot \qquad (305.4)$$

Unghiul θ_1 care defineşte poziţia ulterioară de deplasare a maximului de câmp B_m creşte proporţional cu timpul.

Viteza de rotaţie este deci $\frac{\omega}{p}$.

306. **Câmp învârtitor trifazat multipolar.** Câmpul învârtitor trifazat este produs de curenţii trifazaţi.

Prima fază va produce N_1S_1, N_1S_1, etc., a doua fază N_2S_2, N_2S_2, etc., a treia fază N_3S_3, N_3S_3, etc. astfel încât sistemul de poli este defazat unul de altul cu o treime din unghiul care separă doi poli de acelaşi nume, consecutivi. (fig. 140)


Fig. 140. — Câmp învârtitor trifazat.

Pentru claritatea reprezentării, câmpurile s'au reprezentat separat; în realitate însă se suprapun în acelaşi întrefier (fig. 140).

Valorile câmpurilor vor fi:

$$B_1 = B_m \sin \omega t \cos p\theta;$$

$$B_2 = B_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right); \quad (306.1)$$

$$B_3 = B_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(p\theta - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Câmpul rezultant va fi:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = B_m \left[\sin \omega t \cos p\theta + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \right. \qquad (306.2)$$
$$\left. + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(p\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t - p\theta).$$

Acest câmp se roteşte în sensul de succesiune a fazelor, cu viteza $\frac{\omega}{p}$.

307. **Câmpul polifazat multipolar.** Să se presupună că în acelaşi întrefier se suprapun n câmpuri alternative radiale, defazate în timp şi în spaţiu cu $\frac{1}{n}$ din perioadă.

Câmpurile componente vor fi deci de forma:

$$B_1 = B_m \sin \omega t \cos p\theta;$$

$$B_2 = B_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{n}\right);$$

$$B_3 = B_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{n}\right)\cos\left(p\theta - \frac{4\pi}{n}\right); \qquad (307.1)$$

. . . .

. . . .

$$B_n = B_m \sin\left[\omega t - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right]\cos\left[p\theta - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right].$$

Ca şi în cazul sistemului trifazat şi de data aceasta în fiecare punct al întrefierului câmpul rezultant este suma câmpurilor componente, obţinându-se astfel:

$$B = \Sigma B_n = \frac{n}{2} B_m \sin(\omega t - p\theta). \qquad (307.2)$$

Dacă n este impar, concluziile de mai sus rămân valabile. Dacă însă n este par, câmpurile de întrefier sunt două câte două egale şi de acelaşi semn.

In acest caz, un sistem cu un număr n (par) de faze este echivalent cu un sistem incomplect cu $\frac{n}{2}$ faze, în care câmpurile ar fi defazate unele faţă de altele cu $\frac{2\pi}{n}$.

Sistemul bifazat, compus din două câmpuri de valoare maximă B_m şi defazate între ele cu un sfert de perioadă, constitue un sistem incomplect, echivalent cu un sistem complect tetrafazat, în care fiecare câmp component ar avea o valoare maximă:

$$B'_m = \frac{B_m}{2}. \qquad (307.3)$$

Atunci, valoarea maximă a câmpului învârtitor rezultant se poate stabili după formula generală:

$$\frac{n}{2} B'_m = \frac{4}{2}\frac{B_m}{2} = B_m. \qquad (307.4)$$

308. **Câmpuri alternative de spaţiu şi timp şi câmpuri învârtitoare.** Un câmp alternativ de spaţiu şi timp este de forma:

$$B = KB_m \sin \omega t \cos p\theta,$$

pe când câmpul învârtitor este de forma:

$$B = KB_m \sin(\omega t - p\theta).$$

Deosebirea între ele este esenţială.

Câmpul alternativ are în orice punct din întrefier aceeaşi fază de timp dar amplitudinea variabilă: $KB_m \cos p\theta$, după poziţia definită prin θ. Al doilea are în toate punctele întrefierului aceeaşi amplitudine, dar cu faza de timp variabilă.

Primul este un câmp fix în spaţiu, dar cu amplitudine variabilă, cel de al doilea cu amplitudine fixă dar rotindu-se în spaţiu.

Suprapunerea unui număr simetric de câmpuri alternative decalate în spaţiu şi defazate în timp cu acelaşi unghi produce acelaşi efect ca acela produs de un câmp învârtitor.

309. **Descompunerea unui câmp alternativ în două câmpuri învârtitoare în sens contrar.** Un câmp alternativ fix se poate pune sub forma:

$$B = KB_m \cos p\theta \sin \omega t = K\frac{B_m}{2}\sin(\omega t - p\theta) + K\frac{B_m}{2}\sin(\omega t + p\theta). \qquad (309.1)$$

Deci un câmp alternativ fix de amplitudinea maximă B produce acelaşi efect ca şi cum ar fi vorba de două câmpuri de amplitudine maximă $\frac{B_m}{2}$, rotindu-se cu aceeaşi viteză dar de semn contrar $\Omega = \pm\frac{\omega}{p}$.

310. **Aplicaţiile câmpurilor învârtitoare** sunt numeroase. Ele fac parte integrantă din principiul de funcţionare a maşinilor atât a celor sincrone cât şi a celor asincrone.

Q. Câmpul electromagnetic

311. **Observaţie preliminară.** Principiul acţiunilor la distanţă şi transmisiunilor instantanee implică din punct de vedere fizic aproximaţii, care uneori sunt admisibile, mai ales la frecvenţe industriale, cum este de exemplu cazul transferului între primarul şi secundarul unui transformator.

In cazul însă al fenomenelor de propagare, ceeace implică studiul acţiunilor din aproape în aproape în spaţiul sau mediul dintre cauză şi efect, principiul acţiunilor directe şi instantanee la distanţă nu mai este satisfăcător. In acest caz este necesar a folosi prezentarea legilor electromagnetismului sub forma locală sau diferenţială.

Totuşi în unele aspecte ale problemei propagării pentru claritatea expunerii se va folosi simultan, acolo unde va fi cazul, şi prezentarea clasică a legilor electromagnetismului sub forma integrală sau globală.

312. **Deplasarea electrică.** Spaţiul dintre doi conductori A şi B care poartă sarcinile electrice Q şi $-Q$, este sediul unui câmp electric datorit diferenţei de potenţial U şi a unui câmp de inducţie electrică D, datorit sarcinilor Q.

In studiul acestor fenomene, Maxwell a introdus noţiunea de câmp de deplasare scrisă în regim clasic sub forma $\frac{1}{4\pi}\varepsilon E$. In consecinţă în regim raţionalizat deplasarea devine identică cu inducţia $D' = \varepsilon' E$. Se observă totodată că pe când valorile inducţiilor $D = \varepsilon E$ şi $D' = \varepsilon' E$ sunt diferite în cele două regimuri clasic şi raţonalizat, deplasarea electrică are aceiaşi valoare în ambele regimuri.

Câmpul electric este dat sub forma locală:

$$\overline{E} = -\operatorname{grad} V$$

corespunzătoare ecuaţiei integrale:

$$V = \int_{AB} E_s \, ds.$$

Potenţialul scalar V se datoreşte sarcinilor. Când aceste sarcini sunt distribuite în volum cu densitatea ρ şi în suprafaţă cu densitatea σ, expresia potenţialului scalar este:

$$\left.\begin{aligned} &\text{clasic} \quad V = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{\varepsilon}\int_S \frac{\sigma dS}{r} \\ &\text{raţionalizat} \quad V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\int_V \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\int_S \frac{\sigma dS}{r} \end{aligned}\right\} \quad (312.1)$$

Fluxul câmpului electric de inducţie printr'o suprafaţă închisă S, produs de sarcinile $\sum Q$ care se găsesc în interiorul acestei suprafeţe, este, după teorema lui Gauss:

$$\left.\begin{aligned} &\text{clasic} \quad \Psi = \int_S D_n \, dS = 4\pi\sum Q \\ &\text{raţionalizat} \quad \Psi' = \int_S D_n' \, dS = \sum Q \end{aligned}\right\} \quad (312.2)$$

D_n şi D_n' sunt componentele normale ale inducţiei pe elementul de suprafaţă dS.

Forma locală a acestei legi este:

clasic $\quad \operatorname{div} \overline{D} = 4\pi\rho; \quad$ raţionalizat $\quad \operatorname{div} \overline{D'} = \rho,$

unde ρ este densitatea sarcinilor în punctul în care deplasarea este $\overline{D}$ sau $\overline{D'}$.

Intre sarcina Q şi diferenţa de potenţial U există relaţia

$$Q = CU$$

în care C este capacitatea condensatorului format de cei doi conductori A şi B.

Ecuaţia locală corespunzătoare este:

$$\overline{D} = \varepsilon\overline{E} \qquad \overline{D'} = \varepsilon'\overline{E}$$

în care ε şi ε' sunt constantele dielectrice, deci capacitatea pe unitatea de lungime a mediului dielectric.

Inducţia $\overline{D}$ respectiv $\overline{D'}$, fiind densitatea fluxului Ψ sau Ψ', în unul din punctele dielectricului, teorema lui Gauss se mai poate scrie:

$$\frac{D}{4\pi} = D' = \frac{dQ}{dS},$$

în care dQ este sarcina corespunzătoare tubului de inducţie care are secţiunea dS.

In concordanţă cu cele expuse mai sus fluxul deplasării prin o suprafaţă închisă are aceiaşi valoare în ambele regimuri prin aplicarea teoremei Gauss; în acest caz:

$$\left.\begin{aligned} &\text{clasic:} \quad \int_S \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon\overline{E}d\overline{S} = \frac{1}{4\pi}\,4\pi\sum Q = \sum Q \\ &\text{raţionalizat} \quad \int_S \varepsilon'\overline{E}d\overline{S} = \sum Q \end{aligned}\right\} \quad (312.3)$$

313. **Curentul de deplasare.** Când fluxul de inducţie variază, dielectricul este sediul unui curent de deplasare. Acesta, după Maxwell, este continuarea curentului de conducţie care aduce sarcini pe cele două armături ale condensatorului format de conductorii A şi B.

Expresia acestui curent este:

clasic $\quad I = \lim\limits_{\Delta t=0} \frac{1}{4\pi}\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}; \quad$ raţionalizat $\quad I = \lim\limits_{\Delta t=0} \frac{\Delta\Psi'}{\Delta t}.$

Densitatea curentului de deplasare este:

$$\overline{J}_D = \frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{D}}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{d\overline{D'}}{dt} = \varepsilon'\frac{d\overline{E}}{dt}.$$

având deci o aceiaşi valoare în ambele regimuri.

In regim permanent deplasarea este constantă şi curentul de deplasare este nul.

Experienţa arată că curentul de deplasare dă naştere unui câmp magnetic, ca şi curentul de conducţie.

Intr'un dielectric imperfect va exista pe lângă curentul de deplasare şi un *curent de conducţie*, a cărui densitate este:

$$\overline{J} = \gamma\overline{E},$$

în care γ este conductivitatea dielectricului. Paralel cu curentul de conducţie dintr'un conductor imperfect poate exista deasemenea şi un curent de deplasare.

In aceste condiţii, densitatea curentului total va fi:

$$\overline{J} = \gamma\overline{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\overline{E}}{dt} = \gamma\overline{E} + \varepsilon'\frac{d\overline{E}}{dt}. \quad (313.1)$$

Acest curent este prin definiţie conservativ. Prin urmare:

$$\operatorname{div} \overline{J} = 0.$$

Ţinând seamă şi de relaţia $\operatorname{div} D = 4\pi\rho$, rezultă relaţiile importante:

$$\operatorname{div} \overline{J} = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Divergenţa superficială a curentului de conducţie pe suprafaţa de separaţie a două medii va fi:

$$\operatorname{div} \overline{J} = -\frac{d\sigma}{dt},$$

în care σ este densitatea superficială a sarcinilor de pe acea suprafaţă.

In sfârşit, divergenţa liniară a unui curent filamentar este:

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{dq}{dt}$$

în care q este sarcina pe unitatea de lungime a curentului.

314. **Energia câmpului electric.** Energia potenţială înmagazinată în dielectricul unui condensator este:

$$W = \frac{1}{2}\,CU^2.$$

Densitatea de volum a acestei energii este:

$$W_s = \frac{1}{8\pi}\,\varepsilon\overline{E}^2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon'\,\overline{E}^2. \quad (314.1)$$

Se vede că energia electrică nu este localizată acolo unde sunt sarcinile, ci acolo unde se găseşte câmpul electric. Deci energia nu se găseşte în conductori ci în dielectricul dintre ei.

Sub acţiunea câmpului, dielectricul sau chiar spaţiul vid suferă o modificare care-i permite să înmagazineze energie sub formă potenţială. Această energie poate fi integral restituită când condensatorul este pus la descărcare.

Maxwell a demonstrat că secţiunea dreaptă a unui tub de forţe electrice suferă o tracţiune, în sensul acestor linii, numeric egală cu densitatea energiei în punctul considerat. Deasemenea şi pereţii tubului suferă o presiune normală, având aceeaşi valoare numerică.

Datorită acestor forţe şi presiuni, tuburile de forţă au tendinţa de a se contracta în sensul lungimii lor şi de a se dilata în sensul secţiunii lor.

Aceeaşi proprietate se constată şi la tuburile de forţă magnetice.

315. **Inducţie magnetică.** Fluxul magnetic produs de o bobină parcursă de curentul I este dat de:

$$\Phi = LI.$$

Ecuaţia sub formă locală corespunzătoare este:

$$\overline{B} = \mu\, \overline{H} = \mu'\, \overline{H'}$$

în care $\overline{B}$ este densitatea fluxului magnetic Φ, adică inducţia magnetică;
μ — permeabilitatea mediului şi
$\overline{H}$ — câmpul magnetic.

316. **Potenţialul vectorial.** Liniile de inducţie magnetică sunt totdeauna închise fiindcă nu există ca în electrostatică sarcini magnetice libere.

In aceste condiţii:

$$\operatorname{div} \overline{B} = 0.$$

Aceasta înseamnă că se poate scrie:

$$\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A},$$

în care $\overline{A}$ este un nou vector, numit potenţialul vectorial.

Expresia acestui potenţial este:

$$\overline{A} = \mu \int_V \frac{\overline{J}\, dv}{r} = \frac{\mu'}{4\pi} \int_V \frac{\overline{J}\, dv}{r}, \qquad (316.1)$$

în care $\overline{J}$ este densitatea curentului total care trece prin elementul de volum dv situat la distanţa r, de punctul unde se măsoară potenţialul vectorial $\overline{A}$.

Fluxul vectorului $\overline{B}$ prin suprafaţa S limitată de conturul C este dat de relaţia:

$$\Phi = \int_S B_n\, dS = \int_S (\operatorname{rot} \overline{A})_n\, dS = \oint \overline{A}\, d\overline{s}. \qquad (316.2)$$

Prin urmare, circulaţia vectorului $\overline{A}$, dealungul conturului C este egală cu fluxul vectorului $\overline{B}$ prin suprafaţa S limitată de conturul C.

317. **Energia câmpului magnetic.** Energia totală înmagazinată în câmpul magnetic al unui solenoid parcurs de curentul I este:

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

Densitatea de volum a acestei energii este:

$$W_s = \frac{1}{8\pi}\, \mu \overline{H}^2 = \frac{1}{2}\, \mu'\, \overline{H'}^2. \qquad (317.1)$$

Ca şi în cazul energiei electrice, partea principală a energiei magnetice se găseşte în mediul exterior, nu în conductorii străbătuţi de curent.

318. **Ecuaţiile lui Maxwell.** S'a văzut că atât curentul de conducţie cât şi cel de deplasare dau naştere unui câmp magnetic, închis în jurul lor. Dacă deci curentul:

$$I = \int_S J_n\, dS$$

străbate suprafaţa S limitată de conturul C, legea câmpului magnetic (Ampère) spune că acest curent este egal cu circulaţia vectorului $\overline{H} = 4\pi \overline{H'}$ dealungul acestui contur.

Deci:

$$\oint \overline{H}\, d\overline{s} = 4\pi \int_S J_n\, dS, \qquad (318.1)$$

în care după (313.1):

$$\overline{J} = \gamma \overline{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}.$$

Deasemenea, dacă prin suprafaţa S limitată de conturul C trece fluxul magnetic variabil Φ, legea inducţiei (Faraday) spune că în conturul C ia naştere o forţă electromotoare:

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

care se mai poate scrie:

$$\oint E_s\, d\overline{s} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dS. \qquad (318.2)$$

Exprimând sub formă locală relaţiile (318.1) şi (318.2) se găsesc ecuaţiile lui Maxwell:

clasic

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{H} &= 4\pi \gamma \overline{E} + \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \overline{E} &= -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (318.3)$$

raţionalizat

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{H'} &= \gamma \overline{E} + \varepsilon' \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \overline{E} &= -\mu' \frac{\partial \overline{H'}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (318.4)$$

Ecuaţiile precedente sunt valabile în orice sistem coerent de unităţi.

Se reaminteşte aci că $\varepsilon = \varepsilon_r\, \varepsilon_0$ şi $\mu = \mu_r\, \mu_0$, în care ε_r, μ_r sunt respectiv valorile relative ale constantei dielectrice şi ale permeabilităţii, iar ε_0, μ_0 sunt respectiv constanta dielectrică a vidului şi permeabilitatea vidului.

319. **Constantele mediului în diferite sisteme de unităţi.** Se reamintesc valorile constantelor mediului electromagnetic în diferite sisteme de unităţi.

In sistemul CGS electrostatic:

$$\varepsilon_0 = 1, \ \mu_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}.$$

In sistemul CGS electromagnetic:

$$\mu_0 = 1, \ \varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}.$$

In sfârşit, în sistemul practic MKS raţionalizat:

$$\varepsilon_0' = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9} \quad \text{şi} \quad \mu_0' = 4\pi 10^{-7}$$

iar în sistemul MKS clasic:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \quad \text{şi} \quad \mu_0 = 10^{-7}.$$

In sistemul MKS raţionalizat mărimile ε_0' şi μ_0' se exprimă respectiv prin F/m şi H/m.

După cum s'a mai arătat, se întrebuinţează uneori sistemul mixt de unităţi, denumit sistemul lui Gauss, în care mărimile electrice sunt măsurate în unităţi electrostatice CGS, iar mărimile magnetice în unităţi electromagnetice CGS.

In acest sistem de unităţi, ecuaţiile lui Maxwell devin:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\,\overline{H} &= \frac{4\pi}{c}\gamma\overline{E} + \frac{\varepsilon_r}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}, \\ \text{rot}\,\overline{E} &= -\frac{\mu_r}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (319.1)$$

In care c reprezintă raportul între unităţile de sarcină electrică, scrise în sistemul CGS em şi es. In mod experimental s'a constatat că acest raport este numeric egal cu valoarea vitezii luminii în vid, scrisă tot în CGS. In consecinţă valoarea numerică a factorului c, folosit în acest sistem de unităţi, devine $c = 3 \cdot 10^{10}$.

320. **Cazuri particulare.** In punctele din masa conductorilor, curentul de deplasare este neglijabil faţă de cel de conducţie şi atunci ecuaţiile (318.3) la care se va limita de aici înainte prezentul manual, devin:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\,\overline{H} &= 4\pi\gamma\overline{E}; \\ \text{rot}\,\overline{E} &= -\mu\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (320.1)$$

In dielectricele perfecte sau în spaţiul vid, curentul de conducţie este nul şi atunci ecuaţiile (318.3) se reduc la:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\,\overline{H} &= \varepsilon\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}, \\ \text{rot}\,\overline{E} &= -\mu\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (320.2)$$

Atât câmpul electric cât şi cel magnetic se deplasează lateral cu aceeaşi viteză şi corelaţia dintre ele este atât de strânsă, încât ele pot fi privite ca două aspecte ale aceluiaşi fenomen.

In cazul curentului continuu $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ nu variază cu timpul şi atunci în exteriorul conductorului ecuaţiile lui Maxwell se reduc la:

$$\text{rot}\,\overline{H} = 0 \quad ; \quad \text{rot}\,\overline{E} = 0.$$

Prin urmare, atât $\overline{E}$ cât şi $\overline{H}$ sunt câmpuri care derivă dintr'un potenţial.

Considerând că $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ sunt funcţii armonice şi scriind ecuaţiile (318.3) în coordonate carteziene, va rezulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu H_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z, \end{aligned}\right\} (320.3) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= (4\pi\gamma + j\omega\varepsilon) E_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= (4\pi\gamma + j\omega\varepsilon) E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= (4\pi\gamma + j\omega\varepsilon) E_z. \end{aligned}\right\} (320.4)$$

Luând axele de coordonate astfel încât:

$$-H_x = -H \quad \text{şi} \quad E_y = E, \quad \text{rezultă} \quad H_y = H_z = 0 \quad \text{şi} \quad E_x = E_z = 0.$$

Sistemul de ecuaţii (320.3), (320.4) se reduce la:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = (4\pi\gamma + j\omega\varepsilon) E_y,$$

ecuaţii similare cu ecuaţiile (331.4) ale propagării pe o linie de transmisie.

321. **Constantele de propagare.** Urmând analogia cu liniile de transmisie, se va nota, în sistemul clasic

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{j\omega\mu\,(4\pi\gamma + j\omega\varepsilon)}, \\ \eta &= 4\pi\frac{E_y}{H_x} = 4\pi\sqrt{\frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma + j\omega\varepsilon}}, \end{aligned}\right\} \qquad (321.1)$$

sau în sistem raţionalizat:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{j\omega\mu'\,(\gamma + j\omega\varepsilon')}, \\ \eta &= \frac{E_y}{H_x'} = \sqrt{\frac{j\omega\mu'}{\gamma + j\omega\varepsilon'}}. \end{aligned}\right\} \qquad (321.2)$$

Mărimea σ poartă numele de constantă intrinsecă de propagare, iar mărimea η este numită impedanţa intrinsecă a mediului.

In cazul unui dielectric perfect $\gamma = 0$ şi atunci:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = j\omega\sqrt{\varepsilon'\mu'}, \\ \eta &= 4\pi\sqrt{\mu/\varepsilon} = \sqrt{\mu'/\varepsilon'} = 4\pi\frac{E_y}{H_x} = \frac{E_y}{H_x'}, \end{aligned}\right\} \qquad (321.3)$$

Ultima relaţie arată că într'un câmp liber, energia câmpului electric (314.1) este egală cu energia câmpului magnetic (317.1). Tot de aici se deduc relaţiile importante:

$$\eta H_x = 4\pi E_y \quad \text{şi} \quad \eta H'_x = E_y .$$

In toate aceste relaţii:

$$\eta = 120\,\pi = 377\,\Omega,$$

după cum rezultă din (319) şi din relaţia

$$1 \text{ ohm} = 10^9 \text{ u } e\, m, \text{ de rezistenţă.}$$

322. **Ecuaţia undelor.** Intr'un spaţiu omogen şi liber de sarcini electrice şi magnetice, există următoarele relaţii:

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \quad \text{şi} \quad \operatorname{div} \bar{H} = 0.$$

In aceste condiţii, dacă se elimină una din mărimile $\bar{E}$ sau $\bar{H}$ din ecuaţiile (318.3) lui Maxwell, se găseşte ecuaţia undelor:

$$\Delta u = 4\pi\mu\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{322.1}$$

în care, pentru simplificare, u ţine locul lui E sau a lui H, iar Δ este operatorul lui Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

iar

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

este laplacianul lui u.

In cazul unui dielectric perfect, conductivitatea $\gamma = 0$ şi ecuaţia undelor se reduce la:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \Delta u.$$

In coordonate carteziene, această ecuaţie devine:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \tag{322.2}$$

şi încă două ecuaţii similare pentru u_y şi u_z.

Se vor lua atunci axele astfel încât:

$$u_x = -H_x = -H,$$

$$u_y = E_y = E.$$

In aceste condiţii:

$$H_y = H_z = 0 \quad \text{şi} \quad E_x = E_z = 0.$$

In acest caz E şi H sunt funcţii numai de z şi t. Prin aceasta s'a făcut o limitare, la unda plană uniformă, care se propagă în direcţia axei Oz. De fapt astfel de unde nu există în natură, însă o mică porţiune din suprafaţa undei, normală pe direcţia propagării, poate fi considerată ca undă plană şi atunci rezultatele găsite pentru o undă plană servesc şi pentru acea porţiune de undă.

Cu aceste precizări, sistemul (322.2) se reduce la:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\partial H_x}{\partial z^2}.$$

Ecuaţiile acestea sunt de forma ecuaţiei coardelor vibrante şi admit o soluţie de forma:

$$\eta H_x = 4\pi E_y = \mathrm{f}\left(z - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, t\right) + \mathrm{g}\left(z + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, t\right), \tag{322.3}$$

în care f şi g sunt funcţii arbitrare.

323. **Viteza de propagare.** Din (322.3) se vede că f este o undă care se deplasează în sensul axei Oz cu viteza:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{323.1}$$

iar g este o undă retrogradă care se propagă dealungul aceluiaşi ax cu aceeaşi viteză, însă în sens invers. Formula (323.1) este valabilă în orice sistem coerent de unităţi.

Unda retrogradă există numai dacă unda directă întâlneşte un obstacol conductor care o reflectă înapoi.

Direcţiile relative ale vectorilor E, H şi v pentru unda directă se văd în fig. 141.

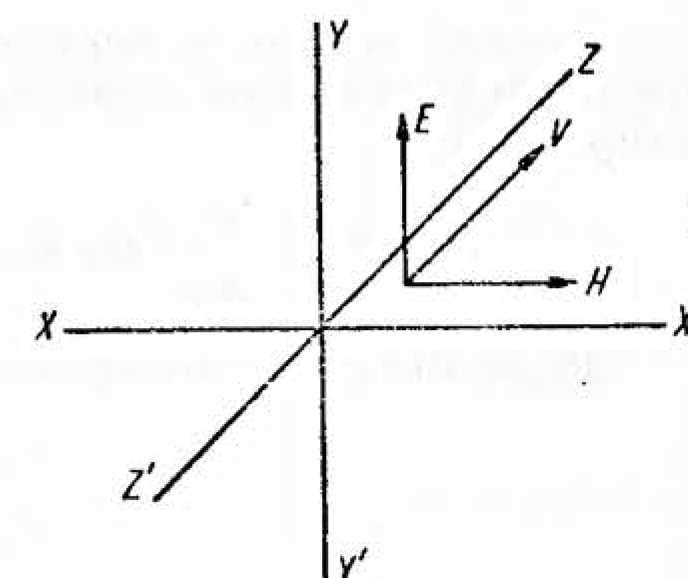


Fig. 141. — Direcţiile relative ale vectorilor E, H şi v.

Formula (323,1), după cum a arătat Maxwell reprezintă viteza de propagare a undelor electromagnetice. Ea este valabilă în orice sistem coerent de unităţi. In mod experimental s'a putut stabili apoi că această viteză a undelor electromagnetice este egală cu aceea a luminii, în acelaşi mediu. Pe de altă parte se ştie că viteza luminii în vid este $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s.

In consecinţă relaţia (323.1) scrisă în particular pentru vid (sau aer), fie în sistemul CGS *es*, fie în CGS *em*, devine

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 (es)\, \mu_0 (es)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 (em)\, \mu_0 (em)}} = c = 3 \cdot 10^{10} \text{cm/s}.$$

In un alt mediu viteza de propagare a undelor electromagnetice are deci expresia

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}.$$

Formula (323.1) este deasemeni valabilă şi în sistemul practic, atât sub forma clasică, cât şi raţionalizată. In consecinţă, ţinând seama de valorile constantelor mediului (§ 319) se găseşte în sistemul practic viteza undelor electromagnetice în vid (ori aer)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_0 \mu'_0}} = 3.10^8 \text{ m/s}$$

adică tocmai viteza luminii scrisă în sistemul practic.

In cazul unei unde periodice, spaţiul parcurs de undă în timpul unei perioade se numeşte lungimea de undă şi are ca expresie:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}.$$

In vid $\lambda = \frac{c}{f}$.

324. Vectorul Umov-Poynting [1]. După cum s'a văzut în (314.1) şi (317.1) energia cuprinsă într'un cub unitate, având laturile paralele cu Ox, Oy, Oz, are ca expresie:

$$W = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon \overline{E}^2 + \mu \overline{H}^2) = \frac{1}{2}(\varepsilon' \overline{E}^2 + \mu' \overline{H}'^2),$$

iar dacă câmpul electric are direcţia lui Oy şi cel magnetic direcţia lui Ox:

$$W = \frac{1}{8\pi}(D_y E_y + B_x H_x) = \frac{1}{2}(D'_y E_y + B_x H'_x).$$

Această energie se deplasează în sensul axei Oz cu viteza $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Prin urmare, în timpul unei secunde, trece prin faţa unui punct dat puterea pe unitatea de suprafaţă:

$$P_z = \frac{v}{8\pi}(D_y E_y + B_x H_x) = \frac{v}{2}(D'_y E_y + B_x H'_x).$$

Pe de altă parte, din relaţia (321.3) se scoate relaţia valabilă la orice frecvenţă:

$$\frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \mu v = \frac{1}{\varepsilon v},$$

în care $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Prin urmare:

$$B_x = \frac{E_y}{v} \quad \text{şi} \quad D_y = \frac{H_x}{v}.$$

Făcând mai sus aceste înlocuiri rezultă:

$$P_z = \frac{1}{4\pi} E_y H_x = E_y H'_x.$$

Intrucât în sistemul de axe considerat, $E_y = \overline{E}$ şi $H_x = \overline{H}$, se poate adopta notaţia vectorială şi se va scrie:

$$\overline{S} = \frac{1}{4\pi}(\overline{E} \times \overline{H}) = \overline{E} \times \overline{H}'.$$

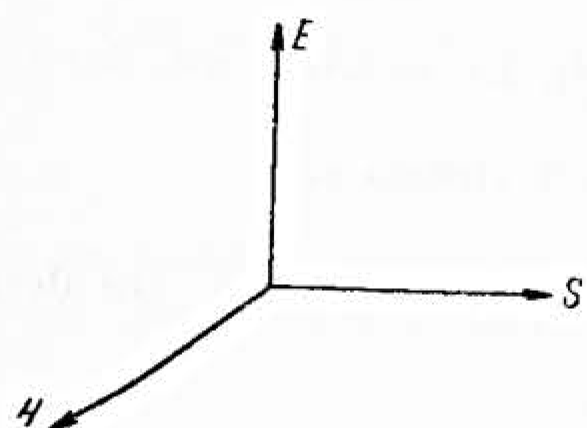


Fig. 142. — Direcţiile pozitive ale vectorilor E, H şi S.

Acesta este vectorul lui Umov-Poynting sau vectorul radiant. El reprezintă fluxul de energie care trece normal prin unitatea de suprafaţă în unitatea de timp.

In fig. 142 se văd direcţiile pozitive ale vectorilor $\overline{E}$, $\overline{H}$ şi $\overline{S}$.

[1] Noţiunea curentului de energie a fost introdusă în elasticitate de N. A. Umov în 1874. Poynting a introdus ulterior fluxul de energie electromagnetică radiantă.

325. Aplicaţii Cu ajutorul lui $\overline{S}$ se poate calcula energia radiată de o antenă sau de un element de curent, energia care trece dealungul unei linii de transmisie, precum şi energia care pătrunde în conductori din câmpul exterior.

Astfel, în vecinătatea conductorului câmpul este înclinat pe direcţia propagării când conductorul nu este perfect (fig. 143).

El are deci o componentă normală E_n pe direcţia propagării şi o componentă longitudinală E_z în sensul propagării. Componenta normală E_n împreună cu câmpul $\overline{H}$ dă vectorul

$$\overline{S}_z = \frac{1}{4\pi}(\overline{E}_n \times \overline{H}) = \overline{E}_n \times \overline{H}',$$

dirijat în sensul propagării.

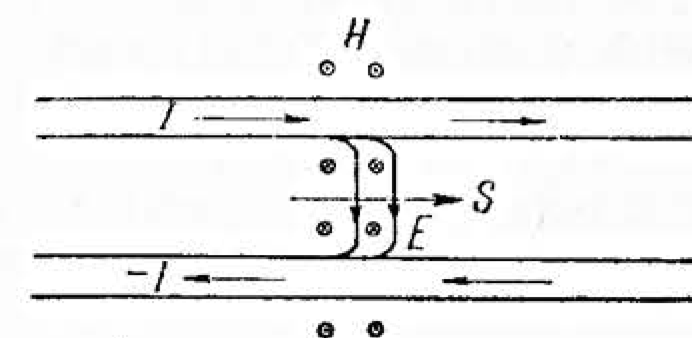


Fig. 143. — Câmpul electromagnetic al unui circuit de transmisie.

Luând un element de suprafaţă dS normal pe direcţia propagării, puterea totală care se progagă în sensul propagării va fi:

$$\int_S \overline{S}_z \, d\overline{S} = UI.$$

Integrala fiind întinsă dealungul întregului plan S, normal pe direcţia propagării, I este curentul, iar U este diferenţa de potenţial dintre cele două fire în punctul considerat.

Prin urmare puterea UI transmisă de linie are o valoare identică cu fluxul vectorului S_z dealungul planului S.

Se mai poate demonstra că jumătate din fluxul considerat se referă la suprafaţa formată din cercul descris pe distanţa dintre fire ca diametru, (fig. 144) iar jumătate la spaţiul exterior acestui cerc.

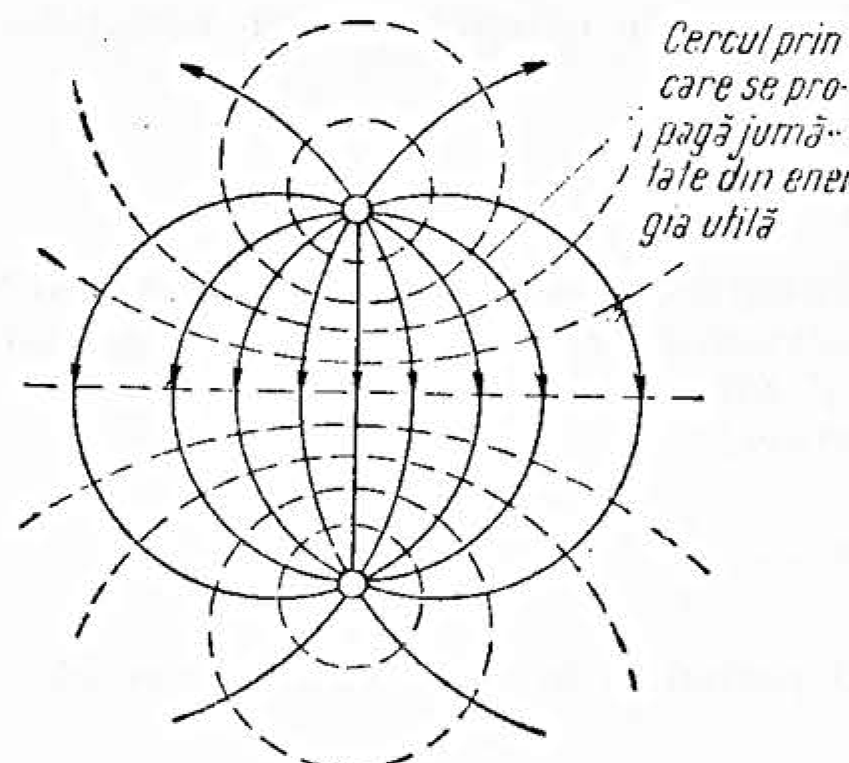


Fig. 144. — Câmpul electric (linii pline) şi câmpul magnetic (linii punctate) dintre cei doi conductori ai unei linii de transmisie.

Componenta longitudinală E_z, împreună cu câmpul $\overline{H}$ dela suprafaţa conductorului dă vectorul:

$$\overline{S}_r = \frac{1}{4\pi}(\overline{E}_z \times \overline{H}) = \overline{E}_z \times \overline{H}',$$

dirijat spre axul conductorului.

Insemnând cu R rezistenţa conductorului pe unitatea de lungime şi cu I curentul:

$$E_z = RI.$$

Câmpul H' la suprafaţa conductorului este:

$$H' = \frac{I}{2\pi a} = \frac{I}{A},$$

în care a este raza conductorului, iar A este suprafaţa laterală a conductorului pe unitatea de lungime.

Mărimea vectorului dirijat spre centrul conductorului va fi:

$$S_r = R_z \times H' = RI \frac{I}{2\pi a} = \frac{RI^2}{A}.$$

Se vede că valoarea fluxului vectorului S_r prin suprafaţa A este egală cu valoarea puterii care se transformă în căldură prin efect Joule în conductor.

326. Presiunea energiei radiante. Atât teoretic cât şi experimental s'a stabilit că o energie radiantă când întâlneşte o suprafaţă conductoare exercită asupra acestei suprafeţe o presiune mecanică:

$$p = \frac{S}{v},$$

în care S este valoarea mijlocie a vectorului radiant, iar v este viteza energiei. Dacă S este exprimat în watt/m² şi v în m/s, presiunea p va fi exprimată în: newton/m². Energia se comportă deci ca o masă materială în mişcare. Undele

electromagnetice, cele calorice și cele luminoase exercită o presiune asupra corpurilor pe care le întâlnesc în drum.

Experiențe strălucite în acest sens au fost efectuate de vestitul fizician rus P. N. Lebedev, care a demonstrat experimental presiunea luminii asupra corpurilor solide și gazoase. Tot el a explicat deviația cozii cometelor în direcția opusă soarelui.

327. **Câmpul electric în funcție de sarcini și curenți.** Cunoscând distribuția în spațiu a sarcinilor și curenților, relațiile (312.1) și (316.1) dau potențialul scalar V și potențialul vectorial $\bar{A}$. Din potențialul scalar se scoate câmpul electric datorit sarcinilor mobile sau imobile:

$$\bar{E}_q = -\text{grad } V.$$

Ținând seamă de (316.2) legea inducției:

$$e_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

se află relația:

$$\oint \bar{E}_i \, d\bar{s} = -\oint \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} d\bar{s}.$$

Prin urmare, din potențialul vectorial se scoate câmpul datorit variațiilor de curenți:

$$\bar{E}_i = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.$$

In unele puncte mai poate exista și un câmp electromotor aplicat E_0, datorit forțelor electromotoare aplicate (de natură galvanică, termică, piezoelectrică), sau forțelor electromotoare de inducție, proprii și mutuale.

Câmpul total într'un punct dat va fi atunci:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 - \text{grad } V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.$$

328. **Unde periodice în general.** O undă periodică în timp va fi periodică și în spațiu, perioadele fiind respectiv T și λ.

Scriind:

$$u = U \, e^{j\omega t}$$

ecuația undelor (322.1) devine:

$$\Delta u = \sigma^2 u,$$

în care:

$$\sigma^2 = j\,\omega\,\mu'\,\gamma - \omega^2\varepsilon'\mu' = 4\,\pi\,j\,\omega\,\mu\,\gamma - \omega^2\varepsilon\,\mu$$

Aci σ este cantitatea complexă definită de (321.1) și (321.2).

329. **Unde plane.** Când unda este plană și axele sunt luate astfel încât Oz să coincidă cu direcția propagării, ecuația undelor devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sigma^2 u.$$

Soluția pentru unda directă, fără undă retrogradă, este:

$$u = u_0 \, e^{-\sigma x} = U_0 \, e^{j\omega t} \, e^{-\sigma x}.$$

Punând $\sigma = \alpha + j\beta$ rezultă:

$$u = U_0 \, e^{-\alpha x} \, e^{j(\omega t - \beta x)}.$$

Primul factor exponențial arată că amplitudinea U_0 a undei descrește exponențial cu distanța.

Deaceea factorul α al exponentului se numește *constanta de atenuare.*

Faza amplitudinii în diferitele puncte ale liniei este definită de valoarea operatorului de rotație $e^{-j\beta x}$ în acele puncte.

Acest operator este o funcție periodică în spațiu și se reproduce când se înlocuește x cu:

$$x + \frac{2\pi}{\beta}.$$

Lungimea:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

după care faza undei se reproduce, se numește lungime de undă, iar factorul β al exponentului se numește *constanta de fază* sau *de lungime de undă.*

O anumită fază se găsește în punctul x la momentul t și în punctul $(x+dx)$ la momentul $t + dt$.

Rezultă că:

$$\omega t - \beta x = \omega(t + dt) - \beta(x + dx).$$

Viteza de propagare a fazei este deci:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

In cazul când mediul este un dielectric perfect,

$$\gamma = 0 \quad \text{și} \quad \sigma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = j\beta.$$

Deci

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Viteza de propagare a fazei devine atunci:

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

care coincide cu viteza de propagare a unei unde de o formă oarecare, găsită în (323.1). Dacă însă mediul nu este un dielectric perfect, viteza fazei nu mai coincide cu $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

330. **Unde sferice.** Un element de curent al cărui moment este Il produce în spațiul liber un câmp electromagnetic de simetrie aproape sferică.

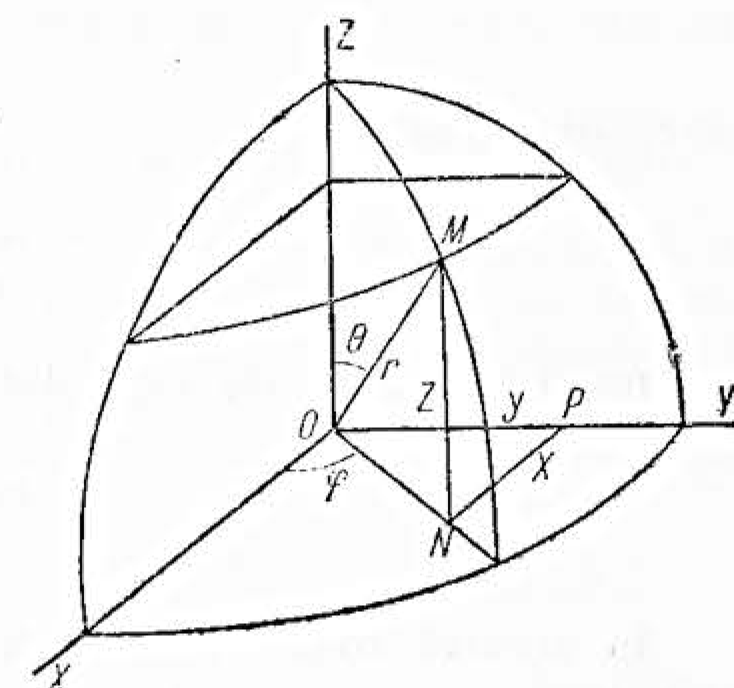


Fig. 145. — Coordonatele sferice r, θ, φ.

Pornind dela expresia potențialului lui Hertz:

$$A_z = \frac{Il \, e^{-\sigma r}}{4\pi r}$$

scris în unități raționalizate și punând:

$$\sigma = j\omega\sqrt{\varepsilon'\mu'} = j\beta;$$

$$\eta = \sqrt{\mu'/\varepsilon'};$$

componentele câmpului electromagnetic în coordonate sferice (r, θ, φ)

vor fi:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{\eta Il}{2\pi r^2}\left(1+\frac{1}{j\beta r}\right)e^{-j\beta r}\cos\theta \\ E_\theta &= \frac{j\eta Il}{2\lambda r}\left(1+\frac{1}{j\beta r}-\frac{1}{\beta^2 r^2}\right)e^{-j\beta r}\sin\theta \\ H'_\varphi &= \frac{jIl}{2\lambda r}\left(1+\frac{1}{j\beta r}\right)e^{-j\beta r}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (330.1)$$

La mică distanţă, aceste ecuaţii devin:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{j\omega\varepsilon'}\,\frac{Il\cos\theta}{2\pi r^3} \\ E_\theta &= \frac{1}{j\omega\varepsilon'}\,\frac{Il\sin\theta}{4\pi r^3} \\ H'_\varphi &= \frac{Il\sin\theta}{4\pi r^2} \end{aligned}\right\} \quad (330.2)$$

Aci este vorba de aşa zisa zonă electrostatică, deoarece câmpul electric derivă din potenţialul:

$$V = \frac{Il\cos\theta}{\varepsilon' 4\pi r^2}\,.$$

al sarcinilor punctuale:

$$q_A = -\frac{I}{j\omega} \quad \text{şi} \quad q_B = \frac{I}{j\omega},$$

iar câmpul magnetic H_φ este dat de legea lui Biot-Savart:

$$H'_\varphi = \frac{Il\sin\theta}{4\pi r^2}\,.$$

In această zonă, câmpul electric este în cuadratură de fază cu câmpul magnetic.

La mare diatanţă:

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = \eta H'_\varphi$$

$$H'_\varphi = \frac{jIl}{2\lambda r}e^{-j\beta r}\sin\theta$$

In aceste formule, factorul de timp $e^{j\omega t}$ a fost lăsat la o parte. Pentru a găsi valori reale pentru E_θ şi H'_φ se va schimba faza curentului şi se va scrie:

$$I = j\,I\,e^{j\omega t}.$$

Partea reală a câmpului electromagnetic la mare distanţă va fi atunci:

$$E_\theta = \eta\frac{\dot{I}l}{2\lambda r}\cos(\omega t-\beta r)\sin\theta$$

$$H'_\varphi = \frac{\dot{I}l}{2\lambda r}\cos(\omega t-\beta r)\sin\theta.$$

La mare distanţă câmpul electric E_θ este în fază cu câmpul magnetic H_φ şi raportul lor este:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} = \frac{E_\theta}{H'_\varphi} = 120\,\pi = 377\,\Omega,$$

care este impedanţa intrinsecă a spaţiului liber.

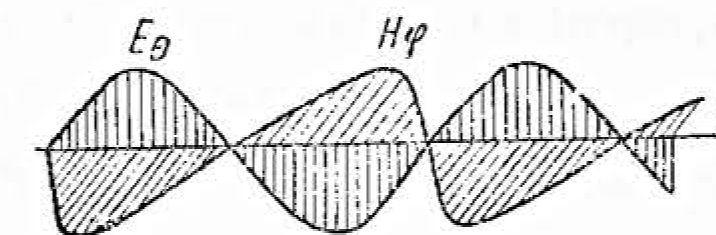


Fig. 146. — Câmpul electromagnetic la mare distanţă.

Valoarea η s'a obţinut mai sus printr'un raţionament făcut în regim raţionalizat. Ţinând însă seama de relaţiile (321.1) şi (322.2), se observă că pe când $\frac{E}{H}$ are valori diferite în regimurile clasic şi raţionalizat, valoarea η rămâne aceiaşi în ambele regimuri

$$\eta = 4\pi\frac{E}{H} = \frac{E}{H'} = 377\,\Omega.$$

In fig. 146 se vede aspectul unei unde electromagnetice la mare distanţă.

R. Propagarea curentului şi a tensiunii pe o linie de transmisie

331. **Ecuaţiile propagării.** O linie monofazată de energie este constituită din două fire paralele având dealungul lor o rezistenţă R şi o inductanţă L, pe unitatea de lungime, iar între ele o conductanţă G şi o capacitanţă C tot pe unitatea de lungime. In cazul unei linii trifazate, parametrii precedenţi se referă la unul din firele de fază, cel de al doilea fiind presupus a fi un neutru cu rezistenţă nulă.

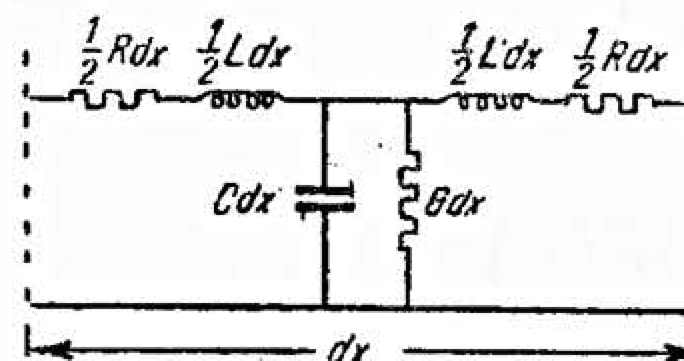


Fig. 147. — Parametrii unui element de lungime al liniei de transmisie.

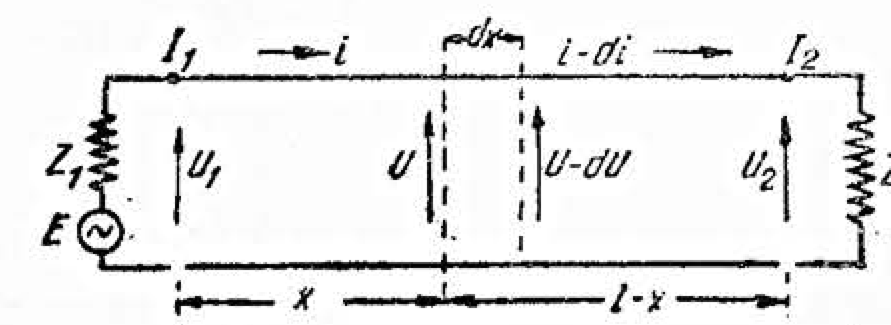


Fig. 148. — Tensiunile şi curenţii pe o linie de transmisie şi pe un element de lungime.

Pe o linie lungă, legile curenţilor şi ale tensiunilor nu mai pot fi aplicate pe întreaga ei lungime, fiindcă din cauza derivaţiilor laterale curentul nu mai are aceeaşi valoare în toate punctele circuitului şi tensiunea între fire nu mai scade proporţional cu lungimea.

Se va însemna cu u şi i valorile instantanee ale tensiunii între fire şi ale curentului, în punctul situat la distanţa x de o origine oarecare şi cu $u-du$, $i-di$, tensiunea şi curentul în punctul $x+dx$ (fig. 148).

Aplicând legile lui Kirchhoff unei lungimi de linie egală cu unitatea, se găseşte sistemul de ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (331.1)$$

Derivând aceste ecuaţii în raport cu x şi apoi cu t şi eliminând derivatele în raport cu ambele variabile se găsesc ecuaţiile telegrafiştilor:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi. \end{aligned}\right\} \qquad (331.2)$$

Soluţia generală a acestui sistem în cazul când u şi i sunt funcţii arbitrare de timp rămâne să fie tratată în alt capitol. Aci se va studia numai cazul când u şi i sunt funcţii periodice de timp. Pentru a simplifica calculele, aceste funcţii vor fi considerate sub formă exponenţială:

$$u = U\,e^{j\omega t}\quad,\quad i = I\,e^{j\omega t}, \qquad (331.3)$$

în care U şi I sunt amplitudinile tensiunii şi curentului, iar

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

este funcţia periodică complexă.

Când va fi nevoie de expresia reală a curentului sau a tensiunii se va lua din rezultat numai partea reală.

Folosind expresiile (331.3) ecuaţiile (331.1) devin:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} &= (R + j\omega L)\,I \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= (G + j\omega C)\,U. \end{aligned}\right\} \qquad (331.4)$$

Dacă:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\ Z_c &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \end{aligned}\right\} \qquad (331.4')$$

ecuaţiile (331.4) se mai pot scrie:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} &= \gamma Z_c\,I, \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= \frac{\gamma}{Z_c}\,U. \end{aligned}\right\} \qquad (331.5)$$

In sfârşit, dacă se derivă aceste ecuaţii în raport cu x şi se elimină derivatele de ordinul întâi, rezultă:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \gamma^2\,U \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= \gamma^2\,I. \end{aligned}\right\} \qquad (331.6)$$

Notând cu U_1 şi I_1 amplitudinea tensiunii şi a curentului în punctul iniţial $x = 0$, soluţia sistemului (331.6) va fi:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{U_1 + Z_c I_1}{2}\,e^{-\gamma x} + \frac{U_1 - Z_c I_1}{2}\,e^{\gamma x}, \\ I &= \frac{U_1 + Z_c I_1}{2\,Z_c}\,e^{-\gamma x} - \frac{U_1 - Z_c I_1}{2\,Z_c}\,e^{\gamma x}. \end{aligned}\right\} \qquad (331.7)$$

Se vede de aci că atât tensiunea cât şi curentul se compun din două unde:

1) Unda directă sau progresivă, reprezentată prin primul termen; ea se propagă dela sursă spre sarcină;

2) Unda inversă sau retrogradă, reprezentată prin ultimul termen; fiind undă reflectată, ea se propagă dela sarcină spre sursă.

Aceasta este soluţia prin unde electromotoare naturale.

Grupând la un loc termenii care conţin pe U_1 şi cei care conţin pe I_1, se găseşte soluţia prin funcţii hiperbolice:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_1\,\mathrm{ch}\gamma\,x - Z_c\,I_1\,\mathrm{sh}\gamma\,x, \\ I &= -\frac{U_1}{Z_c}\,\mathrm{sh}\gamma x + I_1\,\mathrm{ch}\gamma x. \end{aligned}\right\} \qquad (331.8)$$

Dacă însă spre diferenţă de situaţia la care se referă formulele de mai sus, se cunosc tensiunea U_2 şi curentul I_2 la extremitatea finală a liniei, iar distanţa x se măsoară nu de la începutul liniei ci de la sfârşitul ei, se obţine tensiunea U şi curentul I în un punct al liniei în funcţia de tensiune U_2 şi I_2 sub forma:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_2\,\mathrm{ch}\,\gamma x + Z_c I_2\,\mathrm{sh}\,\gamma x \\ I &= \frac{U_2}{Z_c}\,\mathrm{sh}\,\gamma x + I_2\,\mathrm{ch}\,\gamma x \end{aligned}\right\} \qquad (331.9)$$

Dealtfel relaţiile (331.8) şi (331.9) se pot deduce reciproc unele din celelalte.

In cazul când linia este de lungime infinită, unda retrogradă nu mai poate exista. Deaceea în (331.7) trebue ca:

$$U_1 - Z_c\,I_1 = 0.$$

In acest caz ecuaţile (331.7) şi (331.8) se reduc la forma simplă:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_1\,e^{-\gamma x}, \\ I &= \frac{U_1}{Z_c}\,e^{-\gamma x}, \end{aligned}\right\} \qquad (331.10)$$

valabilă pentru linia infinită.

332. Semnificaţia parametrilor Z_c şi γ. Din (331.10) se vede că în orice punct al unei linii infinit lungi, există raportul:

$$\frac{U}{I} = \frac{U_1}{I_1} = Z_c .$$

Mărimea Z_c este astfel *impedanţa caracteristică* a liniei.

Se poate vedea că şi o linie finită se comportă ca o linie infinită, dacă este terminată prin impedanţa sa caracteristică, adică dacă $Z_2 = Z_c$ (fig. 148)

Mărimea:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \qquad (332.1)$$

este *constanta de propagare* a liniei; fiind o cantitate complexă, este de forma:

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad (332.2)$$

în care:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(RG - \omega^2 LC) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(-RG + \omega^2 LC) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \qquad (332.3)$$

333. Semnificaţia constantelor α şi β rezultă tot din ecuaţiile 331.10 complectate cu factorul $e^{j\omega t}$, care a dispărut din (331.4) şi următoarele.

In acest caz, tensiunea U devine:

$$u = U_1\, e^{-\alpha x}\, e^{j(\omega t - \beta x)}.$$

O ecuaţie similară se poate scrie şi pentru curent.

Când x creşte, funcţia $e^{-\alpha x}$ arată că amplitudinea U_1 scade dealungul liniei după o lege exponenţială.

Pentru acest motiv, factorul α dela exponent se numeşte *constanta de atenuare* a circuitului.

Dacă se ia ca origine a fazelor, faza lui U_1 atunci faza tensiunii u, în momentul t şi în punctul x, va fi $(\omega t - \beta x)$.

Funcţia $e^{j(\omega t - \beta x)}$ arată că tensiunea u este o funcţie dublu periodică, având perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (333.1)$$

în raport cu timpul şi

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad (333.2)$$

în raport cu spaţiul x.

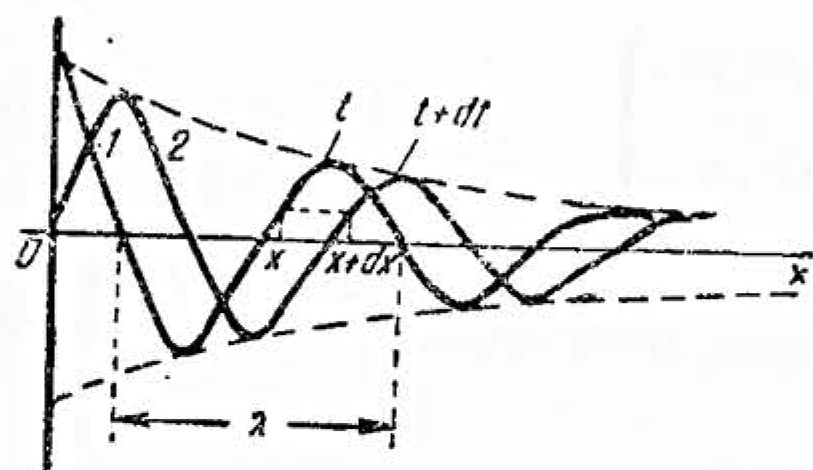


Fig. 149. — Distribuţia tensiunii sau a curentului de-a-lungul liniei.

In fiecare punct x, funcţia u se reproduce după intervalul de timp T şi în fiecare moment t faza tensiunii se reproduce după distanţa λ, numită *lungime de undă*.

Aceasta arată că distribuţia tensiunii dealungul linii într'un moment dat t, va fi reprezentată prin curba 1 din fig. 149.

In momentul următor $(t + dt)$ faza tensiunii în fiecare punct x a devenit $\omega(t + dt) - \beta x$ şi atunci distribuţia tensiunii dealungul linii în acest moment va fi aceea reprezentată prin curba 2 (fig. 149).

Identificând faza $(\omega t - \beta x)$ cu faza $\omega(t + dt) - \beta(x + dx)$ (fig. 149) se deduce:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = v. \qquad (333.3)$$

Rezultă de aci că faza considerată se deplasează dela sursă la sarcină cu viteza v, care poartă numele de viteza de propagare a fazei. Din (333.2) şi (333.3) se deduce:

$$v = \lambda f$$

$$\omega T = \beta\lambda = 2\pi.$$

Prin urmare, printr'un punct dat trec în fiecare secundă f lungimi de undă. Faza tensiunii se schimbă pe fiecare unitate de lungime cu unghiul β. Pentru acest motiv, unghiul β se numeşte *constanta de fază* sau de *lungime de undă*.

Rezultatele precedente sunt identice cu cele care au fost obţinute la undele electromagnetice în spaţiul liber. Dealtfel şi aici este vorba tot de o undă electromagnetică, fiindcă tensiunea este integrala câmpului electric dintre fire, iar curentul este integrala câmpului magnetic dealungul unui contur închis în jurul conductorului (fig. 143).

Singura diferenţă este că într'un caz unda se propagă în spaţiul liber, nefiind legată de sarcini, iar în al doilea caz unda este ghidată dealungul conductorilor, fiind legată de sarcinile mobile de pe aceştia.

In acest din urmă caz, viteza de propagare a fazei coincide cu viteza undelor electromagnetice numai dacă, atât conductorul cât şi dielectricul sunt perfecţi: $R = 0$; $G = 0$.

Se va vedea mai departe ce se petrece în caz contrariu.

334. Soluţia ecuaţiilor de propagare sub formă reală. S'a văzut în (331.7) că unda directă care merge dela sursă la sarcină are în punctul $x = 0$ expresia:

$$U' = \frac{U_1 + Z_c I_1}{2},$$

în care U_1 şi I_1 sunt tensiunea şi curentul în punctul $x = 0$.

Unda retrogradă, adică aceea care se reflectă dela sarcină spre sursă, va avea în punctul $x = l$, adică la bornele sarcinii, expresie similară:

$$U'' = \frac{U_2 + Z_c I_2}{2},$$

în care U_2 şi I_2 sunt tensiunea şi curentul în punctul $x = l$.

Tensiunea şi curentul în punctul x vor fi atunci:

$$\left.\begin{aligned} U_x &= U' e^{-\gamma x} + U'' e^{-\gamma(l - x)}, \\ I_x &= \frac{U'}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{U''}{Z_c} e^{-\gamma(l - x)}, \end{aligned}\right\} \qquad (334.1)$$

Mărimile U', U'' şi Z_c fiind complexe se pot scrie:

$$U' = |U'|\, e^{j\varepsilon'} = |U'| \underline{|\varepsilon'},$$

$$U'' = |U''|\, e^{j\varepsilon''} = |U''| \underline{|\varepsilon''},$$

$$Z_c = |Z_c|\, e^{j\delta} = |Z_c| \underline{|\delta},$$

în care ε' şi ε'' sunt unghiurile de fază ale lui U' şi U'', iar δ este unghiul impedanţei caracteristice dată în modul şi argument de:

$$|Z_c| = \sqrt[4]{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2}}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{R} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega C}{G}\right).$$

Introducând factorul exponenţial $e^{j\omega t}$ şi ţinând seama de expresia $\gamma = \alpha + j\beta$ ecuaţiile (334.1) devin, dacă se consideră numai partea reală:

$$u_x = |U'|\, e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varepsilon') + |U''|\, e^{-\alpha(l-x)} \cos[\omega t - \beta(l - x) + \varepsilon'']$$

$$i_x = \left|\frac{U'}{Z_c}\right| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varepsilon' - \delta) + \left|\frac{U''}{Z_c}\right| e^{-\alpha(l-x)} \cos[\omega t - \beta(l - x) + \varepsilon'' - \delta].$$

335. **Viteza de propagare a fazei.** Liniile de transmisie satisfac, în general, condiţia:

$$R \ll \omega L \quad \text{şi} \quad G \ll \omega C.$$

In aceste condiţii, expresia lui β din (332.3) se reduce la:

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC}\left[1 + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2\right] \tag{335.1}$$

viteza de propagare v din (333.3) devine:

$$v = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}\left[1 - \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2\right] \tag{335.2}$$

Se vede de aci că viteza creşte cu frecvenţa. In cazul când $R = 0$, $G = 0$ sau când $RC = LG$, sau, în sfârşit, când frecvenţa este infinită, viteza fazei are valoarea:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{335.3}$$

Pentru cazul ideal când $R = 0$, $G = 0$ inductanţa L şi capacitatea C pe unitatea de lungime vor fi:

$$\left.\begin{aligned} L &= 4\mu \ln\left(\frac{d + \sqrt{d^2 - 4r^2}}{2r}\right) \\ C &= \frac{\varepsilon}{4\ln\left[\frac{d + \sqrt{d^2 - 4r^2}}{2r}\right]}, \end{aligned}\right\} \tag{335.4}$$

în care d este distanţa dintre fire şi r raza firului, iar ε şi μ sunt constanta dielectrică şi permeabilitatea mediului dintre fire într'un sistem coerent de unităţi. Din (335.4) se vede atunci că:

$$LC = \varepsilon\mu = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r,$$

în care ε_r, μ_r sunt valorile relative ale constantei dielectrice şi ale permeabilităţii.

Prin urmare, în cazul unei linii ideale ($R = 0$, $G = 0$) şi a unui dielectric $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, viteza fazei va fi egală cu viteza undelor electromagnetice:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

In practică însă, $R \neq 0$. In acest caz inductanţa nu mai păstrează valoarea sa din (335.4) decât la frecvenţele foarte înalte. La frecvenţele joase expresia lui L este:

$$L = \mu_c + 4\mu \ln\left(\frac{d - r}{r}\right) = \mu_0\left[\mu_{cr} + 4\mu_r \ln\left(\frac{d - r}{r}\right)\right]$$

în care $\mu_c = \mu_0 \mu_{cr}$ este permeabilitatea internă a conductorilor, iar $\mu = \mu_0 \mu_r$ este permeabilitatea mediului dintre conductori.

Capacitatea C nu se schimbă când $R \neq 0$. Rezultă de aci că:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

în care

$$k = \sqrt{\frac{4\ln\frac{d + \sqrt{d^2 - 4r^2}}{2r}}{\varepsilon_r\left[\mu_{cr} + 4\mu_r \ln\frac{d - r}{r}\right]}}$$

este un coeficient mai mic decât unitatea.

In consecinţă în aer unde $\mu_r = 1$ şi $\varepsilon_r = 1$ construcţia liniei este astfel ca $d \gg r$, factorul K tinde către 1 şi deci viteza $v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tinde către viteza luminii, dacă frecvenţa este destul de mare. La frecvenţele joase expresia 335.2 arată că viteza v, este mai mică decât viteza luminii.

336. **Propagarea undelor nesinusoidale.** Când o undă de tensiune sau de curent este nesinusoidală, fiecare armonică componentă se deplasează cu viteza v din (335.2), dată de frecvenţa acelei armonice.

In funcţionarea liniei electrice se impune o distincţie precisă între puterile reale, reactive şi deformante, consumate de linie.

Principiul conservării separate a puterilor permite stabilirea următoarelor ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= RI^2 + GU^2, & \frac{dI^2}{dx} &= 2(PG - QC\omega), \\ \frac{dQ}{dx} &= L\omega I^2 - C\omega U^2, & \frac{dU^2}{dx} &= 2(PR + QL\omega), \end{aligned}\right\} \tag{336.1}$$

în care P şi Q sunt puterile reale şi reactive.

Pentru regimul nesinusoidal, principiul conservării separate a puterilor reale, reactive şi deformante se aplică pentru fiecare armonică, iar ecuaţiile (336.1) devin:

$$\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x} = RI_n^2 + GU_n^2, \quad \frac{\mathrm{d}I_n^2}{\mathrm{d}x} = 2\,(P_n G - Q_n\, nC\omega)$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}x} = nL\omega I_n^2 - nC\omega U_n^2 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}U_n^2}{\mathrm{d}x} = 2\,(P_n R + Q_n\, nL\omega),$$

în care P_n şi Q_n sunt valorile puterilor reale şi reactive transportate de armonica de ordinul n în punctul x, iar I_n şi U_n sunt valorile eficace ale aceleiaşi armonice în acelaşi punct.

337. **Cazul liniilor de energie.** Dacă l este lungimea liniei, iar U_2 şi I_2 sunt tensiunea şi curentul în punctul $x = l$, ecuaţiile (331.8) se mai pot scrie:

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= U_1 \operatorname{ch}\gamma l - Z_c\, I_1 \operatorname{sh}\gamma l; \\ I_2 &= -\frac{U_1}{Z_c} \operatorname{sh}\gamma l + I_1 \operatorname{ch}\gamma l. \end{aligned}\right\} \qquad (337.1)$$

De aici se pot deduce ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U_2 \operatorname{ch}\gamma l + Z_c\, I_2 \operatorname{sh}\gamma l; \\ I_1 &= \frac{U_2}{Z_c} \operatorname{sh}\gamma l + I_2 \operatorname{ch}\gamma l. \end{aligned}\right\} \qquad (337.2)$$

Fie W_2 impedanta terminală atunci $U_2 = W_2 I_2$ şi prima ecuaţie din (337.1) dă:

$$\frac{U_1}{U_2} = \operatorname{ch}\gamma l + \frac{Z_c}{W_2} \operatorname{sh}\gamma l.$$

In cazul liniilor de energie, este nevoie să se calculeze raportul U_1/U_2, între tensiunea dela intrare şi tensiunea dela ieşire a liniei de energie.

Acest calcul se poate simplifica dacă în locul funcţiilor hiperbolice se introduce desvoltarea lor în serie.

In acest scop se va pune:

$$z = R + j\omega L \quad , \quad y = G + j\omega C,$$

şi atunci:

$$\gamma = \sqrt{zy} \quad \text{şi} \quad Z_c = \sqrt{z/y}.$$

Cu aceste notaţii:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + \frac{zl}{W_2} + \frac{zyl^2}{2!} + \frac{z^2 yl^3}{3!\,W_2} + \frac{z^2 y^2 l^4}{4!} + \ldots$$

In această desvoltare se vor lua 2, 3, 4, sau cel mult cinci termeni, după lungimea liniei.

La calculul liniilor scurte, se vor lua numai doi termeni. In acest caz linia poate fi reprezentată prin schema din fig. 150, care satisface ecuaţia:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + \frac{zl}{W_2}.$$

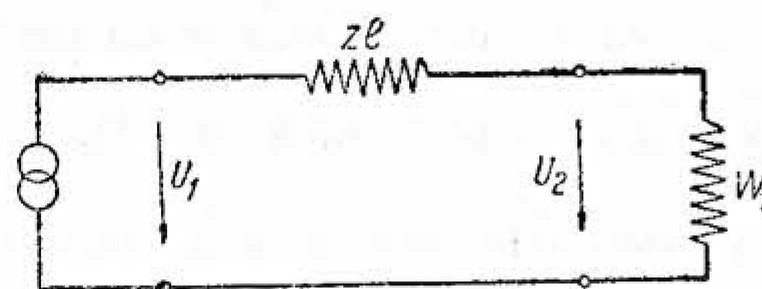


Fig. 150. — Linia artificială echivalentă pentru doi termeni ai seriei

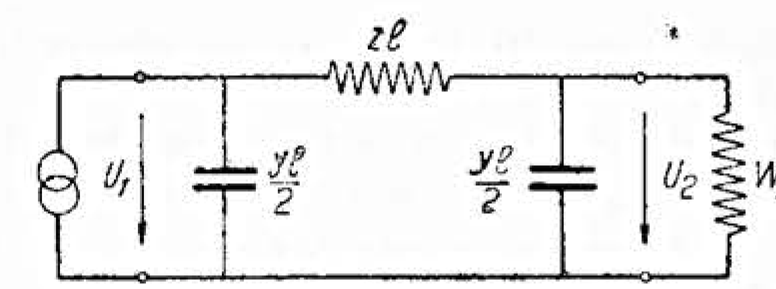


Fig. 151. — Linia artificială echivalentă pentru trei termeni ai seriei

Pentru o linie ceva mai lungă se va lua schema din fig. 151, care satisface ecuaţia:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + \frac{zl}{W_2} + \frac{zyl^2}{2!}.$$

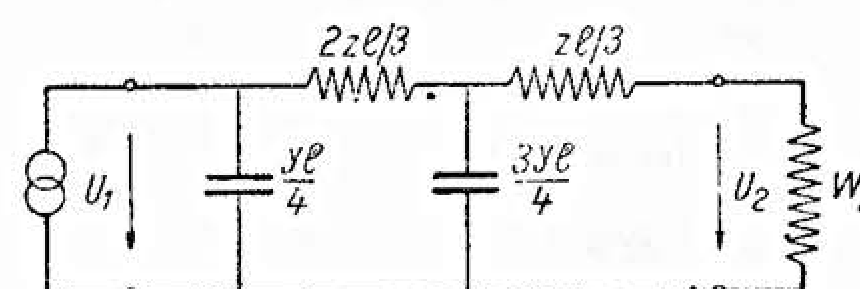


Fig. 152. — Linia artificială echivalentă pentru patru termeni ai seriei.

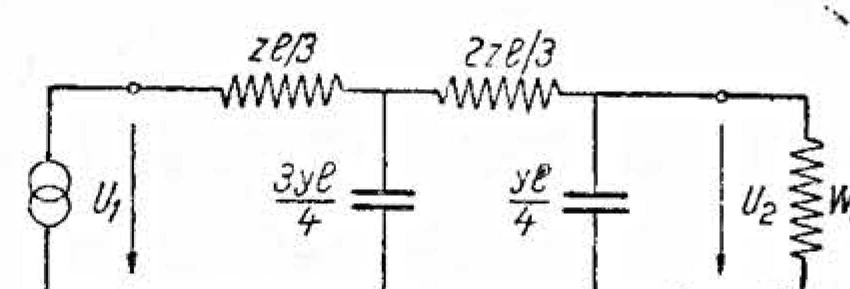


Fig. 153. — Linia artificială echivalentă pentru cinci termeni ai seriei.

Pentru o linie şi mai lungă se va lua schema din fig. 152, care satisface ecuaţia:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + \frac{zl}{W_2} + \frac{zyl^2}{2!} + \frac{z^2yl^3}{3!\,W_2}.$$

In sfârşit, pentru liniile cele mai lungi, se poate întrebuinţa schema din fig. 153, care satisface ecuaţia:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + \frac{zl}{W_2} + \frac{zyl^2}{2!} + \frac{z^2\, yl^3}{3!\,W_2} + \frac{z^2y^2\,l^4}{4!}.$$

Aproximaţia care se obţine în fiecare caz este dată de raportul unui termen faţă de precedentul.

Când numărul termenilor seriei este impar, raportul este de forma:

$$k = \frac{zl}{W_2}\left[1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots\right],$$

iar când numărul termenilor seriei este par:

$$k = y\, l W_2 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right].$$

Dacă se însemnă cu v_n ultimul termen păstrat, eroarea comisă, neglijând termenii $v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots = \varepsilon_n$, este:

$$\varepsilon_n < \frac{k\, v_n}{1-k}.$$

Calculând în felul acesta eroarea, se vede că pentru a avea o eroare mai mică de 1% la o linie de 40 km, este deajuns să se ia numai primii doi termeni din desvoltare, iar la o linie de 400 km eroarea este mai mică de 1% numai dacă se iau primii cinci termeni ai desvoltării.

338. **Exemplu de calcul.** Fie o linie de înaltă tensiune, 110 000 V, 80 km, având următoarele constante:

$$R = 0{,}27\,\Omega/\text{km};$$

$$L = 13{,}10 \times 10^{-4}\ \text{H/km};$$

$$G = 5 \times 10^{-8}\ \text{M}\Omega/\text{km};$$

$$C = 0{,}00907 \times 10^{-6}\ \text{F/km}.$$

Aceste valori dau:

$$z = R + j\omega L = 0{,}27 + j\ 0{,}411\,5 = 0{,}492\ \underline{|\,56^\circ 42'}$$

$$y = G + j\omega C = (5 + j\ 285) \times 10^{-8} = 285 \times 10^{-8}\ \underline{|\,89^\circ 2'}.$$

Luând desvoltarea cu trei termeni:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + \frac{zl}{W_2} + \frac{zyl^2}{2!}$$

şi presupunând că $W_2 = 60\,\Omega$, se va găsi după un calcul destul de scurt:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1{,}356 + j\ 0{,}550 = 1{,}463\ \underline{|\,22^\circ 6'}.$$

Calculul cu ajutorul formulei exacte duce la rezultatul:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1{,}352\,9 + j\ 0{,}546\,7 = 1{,}458\ \underline{|\,22^\circ},$$

ţinând seama că:

$$\gamma l = 0{,}027\,75 + j\ 0{,}090\,5 = \alpha l + j\beta l$$

$$Z_c = 416\ \underline{|\,16^\circ 10'}.$$

Din compararea celor două rezultate se vede că pentru liniile de energie nu este nevoie de formula exactă.

Din valorile date mai sus, se poate găsi lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 5\,550\ \text{km}$$

şi viteza de propagare a fazei:

$$v = \lambda f = 277\,500\ \text{km/s}.$$

Dacă linia ar fi fost fără pierderi, viteza ar fi fost tocmai viteza luminii.
Linia de 80 km este numai 1,44% din lungimea de undă.
In aceste condiţii se zice că linia este electric scurtă.
Aceeaşi linie însă, la frecvenţa de 3 000 Hz are o constantă de fază:

$$\beta = 0{,}065\ \text{rad},$$

o lungime de unde:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 96{,}6\ \text{km}$$

şi o viteză de propagare a fazei:

$$v = \lambda f = 96{,}6 \times 3\,000 = 290\,000\ \text{km}.$$

Se vede de aci că lungimea liniei (80 km) este comparabilă cu lungimea de undă şi dela frecvenţa de 3 000 Hz în sus linia devine electric lungă.

Se mai vede că viteza de propagare creşte cu frecvenţa.

339. **Linii sfert de undă.** Valorile de mai sus sunt valabile numai pentru o linie infinită sau terminată prin impedanţa ei caracteristică.

In practică, liniile de energie nu sunt mai niciodată terminate prin impedanţa lor caracteristică fiindcă sarcina variază dela un moment la altul. Din această cauză, curentul şi tensiunea vor suferi o serie de reflexiuni la ambele capete.

La frecvenţa de 50 Hz aceste reflexiuni nu se fac simţite, fiindcă γl fiind foarte mic, $\cosh \gamma l \cong 1$ şi $\sinh \gamma l \cong 0$. In aceste condiţii ecuaţiile (337.1) dau

$$U_2 \cong U_1 \quad \text{şi} \quad I_2 \cong I_1.$$

La una din armonicele frecvenţei fundamentale se poate însă întâmpla ca lungimea liniei să fie un sfert de lungime de undă ($\lambda = 4\,l$). In acest caz:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}\, l = \frac{\pi}{2}.$$

Dacă pierderile pe linie sunt neglijabile ($\alpha l = 0$), atunci $\gamma l = j\beta l$ şi ecuaţiile (337.3) se reduc la:

$$U_2 = -\, jZ_c I_1,$$

$$I_2 = -\, j\frac{U_1}{Z_c}.$$

Prin urmare, dacă $U_1 =$ const., ultima ecuaţie arată că $I_2 =$ const., oricare ar fi sarcina W_2.

Dacă deci întâmplător linia este întreruptă la extremitatea receptoare ($W_2 = \infty$), tensiunea $U_2 = W_2 I_2$ din acest punct va creşte indefinit (fenomenul Feranti). Este deci periculos să se lase o linie deschisă la extremitatea receptoare când ea este sub tensiune. Un astfel de circuit lucrează atunci ca o antenă de emisie radio-electrică, cu o tensiune considerabilă la vârful ei.

S. Cuadripoli

340. **Definiţii.** Un circuit electric, compus dintr'o grupare complexă oarecare de rezistenţe, inductanţe, inductanţe mutuale sau capacităţi, prezentând două borne de intrare şi două borne de ieşire, se numeşte un *cuadripol* (patrupol).

Cuadripolii care nu au între cele două borne de intrare şi cele două borne de ieşire niciun fel de sursă de energie electrică, precum nici *în exterior* vreo legătură electrică sau magnetică între bornele de intrare şi de ieşire, se numeşte un *cuadripol pasiv*.

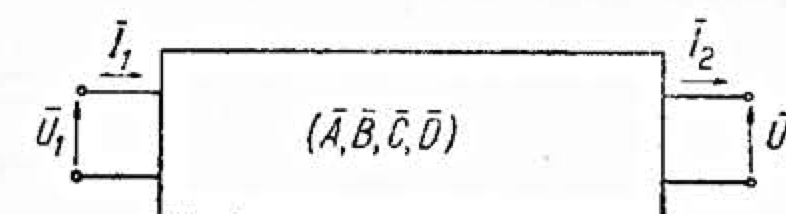


Fig. 154. — Reprezentarea schematică a cuadripolului.

Cuadripolii pasivi nu conţin decât elemente care pot da o legătură *liniară* între tensiuni şi curenţi; în consecinţă, rezistenţele, inductanţele şi capacităţile care îi formează sunt constante.

341. **Ecuaţiile cuadripolului.** Ecuaţiile cuadripolului sunt

$$\left.\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{A}\bar{U}_2 + \bar{B}\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \bar{C}\bar{U}_2 + \bar{D}\bar{I}_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (341.1)$$

în care (fig. 154) $\bar{U}_1$, $\bar{I}_1$ sunt tensiunea şi curentul la intrare;
$\bar{U}_2$, $\bar{I}_2$ — tensiunea şi curentul la ieşire;
$\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ se numesc constantele cuadripolului şi sunt bine determinate pentru un anumit cuadripol dat.

Toate aceste mărimi sunt exprimate în cantităţi complexe.
Intre constantele unui cuadripol există relaţia

$$\overline{A}\overline{D} - \overline{B}\overline{C} = 1. \tag{341.2}$$

Rezolvând sistemul (341.1) în raport cu $\overline{U}_2$ şi $\overline{I}_2$, se găsesc ecuaţiile cuadripolului privit pela ieşire

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_2 &= \overline{D}\,\overline{U}_1 - \overline{B}\,\overline{I}_1 \\ -\overline{I}_2 &= \overline{C}\,\overline{U}_1 - \overline{A}\,\overline{I}_1 \end{aligned}\right\} \tag{341.3}$$

342. **Semnificaţia fizică a constantelor unui cuadripol.** $\overline{A}$ este un *număr complex*, fără dimensiuni, şi reprezintă *raportul de transformare a tensiunilor* la funcţionarea în gol. $\overline{B}$ reprezintă *impedanţa internă* a cuadripolului. $\overline{C}$ reprezintă *admitanţa internă* a cuadripolului. $\overline{D}$ este un *număr complex*, fără dimensiuni, şi reprezintă *raportul de transformare a curenţilor* la funcţionarea în scurt-circuit.

343. **Determinarea constantelor unui cuadripol.** Pentru determinarea constantelor unui cuadripol se fac trei încercări:

— O încercare de funcţionare în gol, care determină *impedanţa de mers în gol la intrare* $\overline{Z}_{10}$;

— O încercare de funcţionare în scurt-circuit, care determină *impedanţa de scurt-circuit* la intrare $\overline{Z}_{1sc}$;

— O încercare de funcţionare în gol, cuadripolul fiind alimentat pe la *ieşire*, care determină *impedanţa de mers în gol la ieşire* $\overline{Z}_{20}$. In funcţie de aceste impedanţe cele patru constante ale cuadripolului sunt:

$$\overline{A} = \frac{\overline{Z}_{10}}{\sqrt{\overline{Z}_{20}\,(\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{1sc})}}\ ; \qquad \overline{B} = \overline{Z}_{1sc}\sqrt{\frac{\overline{Z}_{20}}{\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{1sc}}}\ ;$$

$$\overline{C} = \frac{1}{\sqrt{\overline{Z}_{20}\,(\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{1sc})}}\ ; \qquad \overline{D} = \sqrt{\frac{\overline{Z}_{20}}{\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{1sc}}}\,.$$

La orice cuadripol raportul impedanţelor măsurate în gol este egal cu raportul impedanţelor măsurate în scurt-circuit, adică

$$\frac{\overline{Z}_{10}}{\overline{Z}_{20}} = \frac{\overline{Z}_{1sc}}{\overline{Z}_{2sc}}.$$

344. **Impedanţa caracteristică.** Se numeşte *impedanţă caracteristică* sau *iterativă*, impedanţa care conectată la bornele de ieşire a cuadripolului dă aceeaşi valoare pentru impedanţa măsurată la intrarea în cuadripol. Valoarea acestei impedanţe este dată de relaţiile

$$\overline{Z}_c = \frac{\overline{A} - \overline{D} + \sqrt{(\overline{A} + \overline{D})^2 - 4}}{2\overline{C}} = \frac{\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{20} + \sqrt{(\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{20})^2 + 4\overline{Z}_{20}\overline{Z}_{1sc}}}{2}. \tag{344.1}$$

345. **Cuadripol simetric.** Dacă

$$\overline{Z}_{10} = \overline{Z}_{20} \quad \text{şi} \quad \overline{Z}_{1sc} = \overline{Z}_{2sc},$$

cuadripolul este *simetric*.

In acest caz

$$\overline{A} = \overline{D}$$

şi ecuaţiile cuadripolului devin

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{A}\,\overline{U}_2 + \overline{B}\,\overline{I}_2, \\ \overline{I}_1 &= \overline{C}\,\overline{U}_2 + \overline{A}\,\overline{I}_2, \end{aligned}\right\} \tag{345.1}$$

cu

$$\overline{A}^2 - \overline{B}\,\overline{C} = 1.$$

Valorile constantelor cuadripolului sunt

$$\overline{A}_c = \sqrt{\frac{\overline{Z}_0}{\overline{Z}_0 - \overline{Z}_{sc}}}\ ; \quad \overline{B} = \overline{Z}_{sc}\overline{A}\ ; \quad \overline{C} = \frac{1}{\sqrt{\overline{Z}_0\,(\overline{Z}_0 - \overline{Z}_{sc})}}$$

iar impedanţa caracteristică

$$\overline{Z}_c = \sqrt{\frac{\overline{A}^2 - 1}{\overline{C}}} = \sqrt{\overline{Z}_0\overline{Z}_{sc}}\,.$$

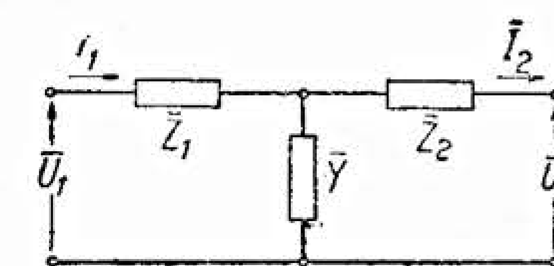


Fig. 155. — Circuitul *T* echivalent.

346. **Circuitul *T* echivalent al unui cuadripol oarecare.** Oricărui cuadripol i se poate forma un circuit echivalent compus din două impedanţe în serie între care se leagă o admitanţă (fig. 155). Acesta este circuitul *T* echivalent al cuadri-polului. Impedanţele corespunzătoare se determină cu relaţiile

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{A} - 1}{\overline{C}}\ ; \quad \overline{Z}_2 = \frac{\overline{D} - 1}{\overline{C}}\ ; \quad \overline{Y} = \overline{C}.$$

Reciproc, constantele generale ale unui cuadripol în *T* dat, sunt date de relaţiile:

$$\overline{A} = 1 + \overline{Z}_1\overline{Y}\ ; \quad \overline{B} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Y}\ ; \quad \overline{C} = \overline{Y}\ ; \quad \overline{D} = 1 + \overline{Z}_2\overline{Y}.$$

347. **Circuitul π echivalent al unui cuadripol oarecare.** Oricărui cuadripol i se poate forma un circuit echivalent compus din două admitanţe între care se leagă o impedanţă (fig. 156). Acesta este circuitul π echivalent al cuadripolului. Admitanţele corespunzătoare se determină cu relaţiile

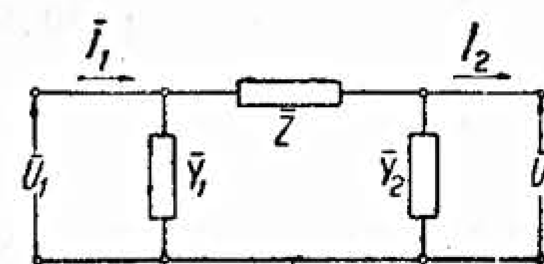


Fig. 156. — Circuitul π echivalent.

$$\overline{Z} = \overline{B}\ ; \quad \overline{Y}_1 = \frac{\overline{D} - 1}{\overline{B}}\ ; \quad \overline{Y}_2 = \frac{\overline{A} - 1}{\overline{B}}.$$

Reciproc, constantele generale ale unui cuadripol în π dat, sunt date de relaţiile:

$$\overline{A} = 1 + \overline{Z}\,\overline{Y}_2\ ; \quad \overline{B} = \overline{Z}\ ; \quad \overline{C} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Z}\,\overline{Y}_1\overline{Y}_2\ ; \quad \overline{D} = 1 + \overline{Z}\,\overline{Y}_1.$$

348. **Diagramele generale ale cuadripolului. Diagrama de tensiune.** Din ecuaţiile (341.1) ale cuadripolului se scoate

$$\overline{U}_1 = \overline{A}\,\overline{U}_2 + \overline{B}\,\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_2}{\overline{D}} + \frac{\overline{B}}{\overline{D}}\,\overline{I}_1, \tag{348.1}$$

sau punându-se în evidenţă modulele şi argumentele corespunzătoare diverşilor vectori,

$$U_1\underline{|\,\theta} = AU_2\underline{|\,\alpha} + BI_2\underline{|\,\beta - \varphi_2} = \frac{U_2}{D}\underline{|\,-\delta} + \frac{B}{D}\,I_1\underline{|\,\beta - \delta + \theta - \varphi_1} \tag{348.2}$$

în care s'a luat $\overline{U}_2$ ca origine de fază şi

$$\overline{U}_1 = U_1\underline{|\theta} ;\ \overline{I}_1 = I_1\underline{|\theta-\varphi_1} ;\ \overline{I}_2 = I_2\underline{|-\varphi_2} ;\ \overline{A} = A\underline{|\alpha} ;\ \overline{B} = B\underline{|\beta} ;\ \overline{D} = D\underline{|\delta} .$$

Construcţia relaţiei (348.2) constitue diagrama de tensiune a cuadripolului (fig. 157).

349. **Diagrama puterilor (diagrama cu doi poli de tensiune sau diagrama cercului).** Puterea aparentă la intrarea şi la ieşirea din cuadripol este dată de relaţiile

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_1 &= P_1 + jQ_1 = \overline{U}_1\,\overline{I}_{1c} ;\\ \overline{S}_2 &= P_2 + jQ_2 = \overline{U}_2\,\overline{I}_{2c} .\end{aligned}\right\}\qquad(349.1)$$

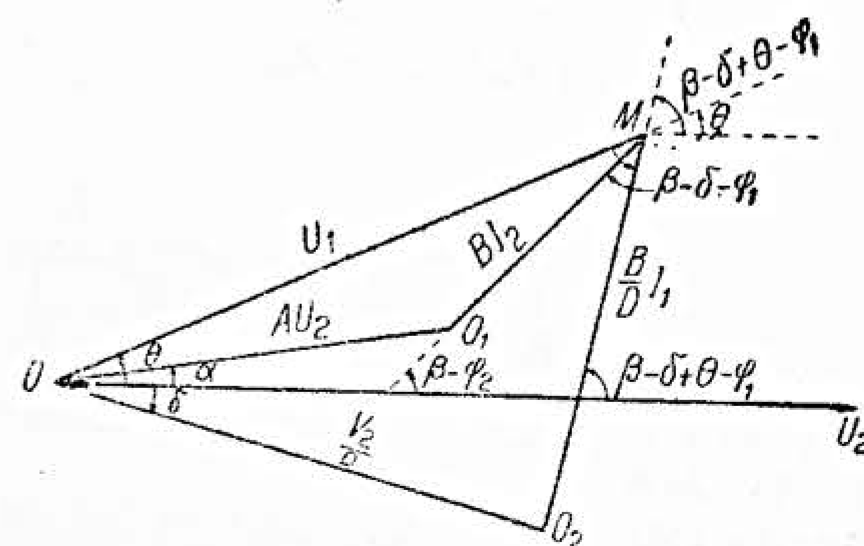


Fig. 157. — Diagrama de tensiune a cuadripolului.

Din ecuaţiile generale ale cuadripolului (341.1) se deduc valorile lui $\overline{I}_1$ şi $\overline{I}_2$ în funcţie de $\overline{U}_1$ şi $\overline{U}_2$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{D}}{\overline{B}}\,\overline{U}_1 - \frac{1}{\overline{B}}\,\overline{U}_2 ,$$

$$\overline{I}_2 = \frac{1}{\overline{B}}\,\overline{U}_1 - \frac{\overline{A}}{\overline{B}}\,\overline{U}_2 ,$$

de unde, luând ca origine de fază tensiunea de sosire $\overline{U}_2 = U_2\underline{|\theta}$ şi ţinând seama de expresia analitică a celorlalţi vectori (vezi diagrama de tensiune), se obţine:

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_1 &= \frac{D}{B}\,U_1^2\underline{|\beta-\delta} - \frac{U_1U_2}{B}\underline{|\theta+\beta} ,\\ \overline{S}_2 &= \frac{U_1U_2}{B}\underline{|\beta-\theta} - \frac{A}{B}\,U_2^2\underline{|\beta-\alpha} .\end{aligned}\right\}\qquad(349.2)$$

De aici se deduce expresia puterilor activă şi reactivă la intrarea şi la ieşirea din cuadripol:

$$\left.\begin{aligned}P_1 &= \frac{DU_1^2}{B}\cos(\beta-\delta) - \frac{U_1U_2}{B}\cos(\beta+\theta),\\ Q_1 &= \frac{DU_1^2}{B}\sin(\beta-\delta) - \frac{U_1U_2}{B}\sin(\beta+\theta),\\ P_2 &= \frac{U_1U_2}{B}\cos(\beta-\theta) - \frac{AU_2^2}{B}\cos(\beta-\alpha),\\ Q_2 &= \frac{U_1U_2}{B}\sin(\beta-\theta) - \frac{AU_2^2}{B}\sin(\beta-\alpha).\end{aligned}\right\}\qquad(349.3)$$

Construcţia relaţiilor (349.3) constitue diagrama cu doi poli de tensiune a cuadripolului (Fig. 158).

350. **Aplicaţie. Studiul punţii Wheatstone.** Puntea Wheatstone poate fi privită ca un cuadripol în care (fig. 159) bornele *ab* (corespunzătoare diagonalei pilă) sunt socotite ca borne de intrare şi bornele *cd* (corespunzătoare diagonalei galvanometru) ca borne de ieşire. Pentru determinarea constantelor $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ se aplică metoda indicată la § 343.

— Se leagă bornele de ieşire, *c*—*d*, în scurt-circuit şi se determină impedanţa circuitului. In acest caz impedanţele $\overline{Z}_1$ cu $\overline{Z}_3$ şi $\overline{Z}_2$ cu $\overline{Z}_4$ sunt în paralel şi apoi cele două grupe sunt legate în serie; deci

$$\overline{Z}_{1sc} = \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3} + \frac{\overline{Z}_2\overline{Z}_4}{\overline{Z}_2+\overline{Z}_4} = \frac{\overline{B}}{\overline{D}} .$$

— Se lasă cuadripolul deschis la ieşire. Rezultă imediat

$$\overline{Z}_{10} = \frac{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_2)(\overline{Z}_3+\overline{Z}_4)}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3+\overline{Z}_4} = \frac{\overline{A}}{\overline{C}} .$$

— Se alimentează cuadripolul pela ieşire (bornele *cd*) lăsând deschise bornele *a* — *b*. Se găseşte

$$\overline{Z}_{20} = \frac{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_3)(\overline{Z}_2+\overline{Z}_4)}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3+\overline{Z}_4} = \frac{\overline{D}}{\overline{C}} .$$

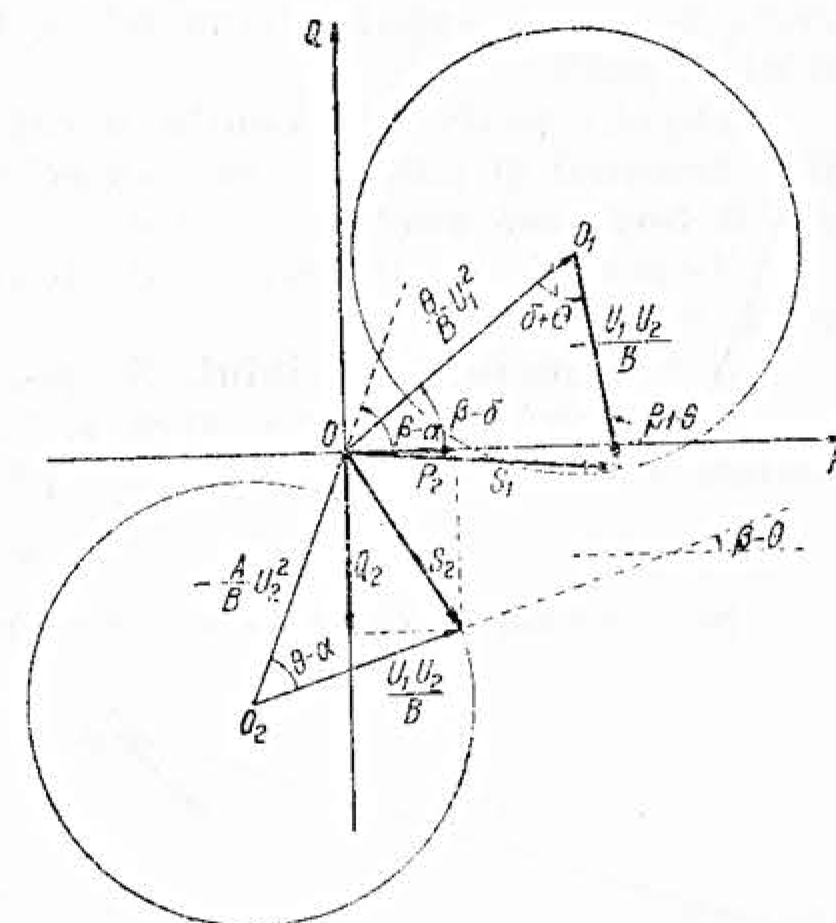


Fig. 158. — Diagrama circulară a cudripolului.

Din aceste relaţii, ţinând seama de relaţia (341.2), se găseşte uşor

$$\overline{A} = \frac{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_2)(\overline{Z}_3+\overline{Z}_4)}{\overline{Z}_2\overline{Z}_3-\overline{Z}_1\overline{Z}_4} ,$$

$$\overline{B} = \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_3(\overline{Z}_2+\overline{Z}_4)+\overline{Z}_2\overline{Z}_4(\overline{Z}_1+\overline{Z}_3)}{\overline{Z}_2\overline{Z}_3-\overline{Z}_1\overline{Z}_4} ,$$

$$\overline{C} = \frac{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3+\overline{Z}_4}{\overline{Z}_2\overline{Z}_3-\overline{Z}_1\overline{Z}_4} ,$$

$$\overline{D} = \frac{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_3)(\overline{Z}_2+\overline{Z}_4)}{\overline{Z}_2\overline{Z}_3-\overline{Z}_1\overline{Z}_4} .$$

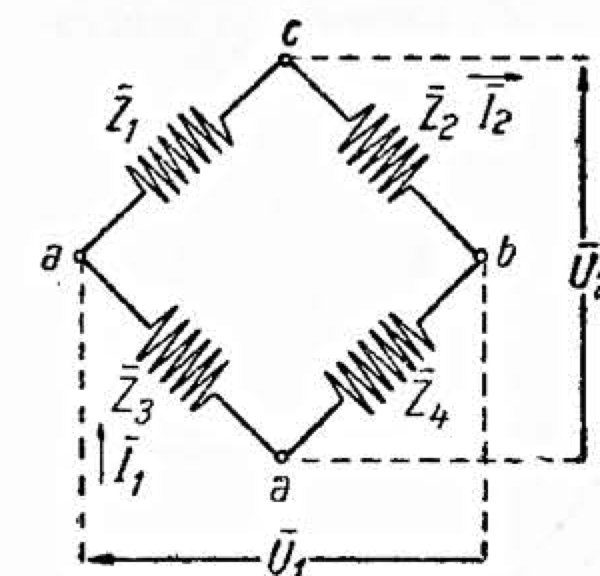


Fig. 159. — Puntea Wheatstone.

Pentru a găsi condiţia de funcţionare a punţii, dacă $\overline{Z}$ este impedanţa aparatului de zero, atunci se poate scrie

$$\overline{U}_2 = \overline{Z}\,\overline{I}_2$$

şi prima ecuaţie din (341.1) se poate scrie

$$\overline{U}_1 = (\overline{A}\,\overline{Z} + \overline{B})\,\overline{I}_2$$

de unde

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_1}{\overline{A}\,\overline{Z}+\overline{B}} = \frac{\overline{U}_1(\overline{Z}_2\overline{Z}_3-\overline{Z}_1\overline{Z}_4)}{(\overline{Z}_1+\overline{Z}_2)(\overline{Z}_3+\overline{Z}_4)\overline{Z}+\overline{Z}_1\overline{Z}_3(\overline{Z}_2+\overline{Z}_4)+\overline{Z}_2\overline{Z}_4(\overline{Z}_1+\overline{Z}_3)}$$

pentru ca puntea să fie în echilibru trebue ca $\overline{I}_2 = 0$, ceeace se obţine când

$$\overline{Z}_2\overline{Z}_3 - \overline{Z}_1\overline{Z}_4 = 0$$

sau

$$\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_4} .$$

351. **Dipolul.** Un circuit electric, format dintr'o grupare de impedanţe oarecare, oricât de complexă, dar care nu conţine decât o singură bornă de intrare şi o singură bornă de ieşire se numeşte *dipol*.

Dipolul care nu cuprinde între cele două borne ale sale niciun fel de sursă de energie, nici în interior şi nici în exterior, deasemenea, în exterior, între aceste borne nu există niciun fel de legătură electrică sau magnetică, se numeşte un *dipol pasiv.*

Dipolii pasivi nu conţin decât elemente care pot da o legătură *liniară* între tensiuni şi curenţi; în consecinţă rezistenţele, inductanţele şi capacităţile care îi formează sunt constante.

Tensiunile de intrare şi de ieşire se raportează întotdeauna la un acelaşi punct comun.

352. **Ecuaţiile dipolului.** Se pot deduce pe două căi:

(α) *Direct*, prin rezolvarea sistemului de ecuaţii liniar ce există între elementele liniare ale dipolului. Se găseşte

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2 + \overline{Z}\,\overline{I}. \qquad (352.1)$$

Sub această formă se utilizează în general în problemele de linii de energie.

β) *Indirect*, făcând în ecuaţiile (341.1) ale cuadripolului $\overline{C} = 0$, se găseşte

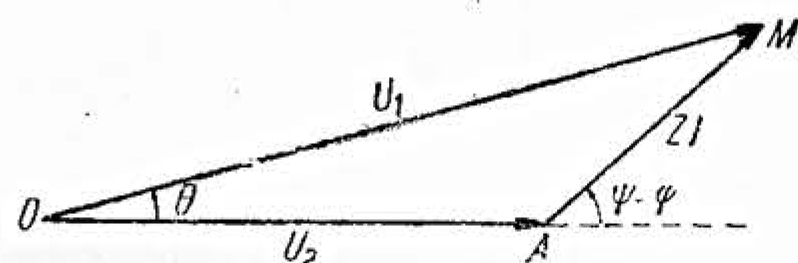


Fig. 160. — Diagrama de tensiune a dipolului.

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{A}\,\overline{U}_2 + \overline{B}\,\overline{I}_2 \\ \overline{I}_1 &= \overline{D}\,\overline{I}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (352.2)$$

care se mai pot scrie:

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2' + \overline{Z}'\,\overline{I}' \qquad (352.3)$$

în care $\overline{U}_2'$ este tensiunea secundară raportată la primar, $\overline{Z}'$, impedanţa echivalentă a circuitului, $\overline{I}'$, curentul secundar raportat la primar.

Sub formele (352.2) sau (352.3) se utilizează în problemele de transformatoare.

353. **Diagramele dipolului.**

α) *Diagrama de tensiune.* Se obţine construindu-se relaţia (352.1) sau (352.3) în care se ia $\overline{U}_2$ (respectiv $\overline{U}_2'$) ca origine de fază (fig. 160).

In această diagramă s'a luat

$$\overline{U}_1 = U_1\,\underline{|\theta}, \quad \overline{U}_2 = U_2\,\underline{|0},$$
$$\overline{Z} = Z\,\underline{|\psi} \quad \text{şi} \quad \overline{I} = I\,\underline{|-\varphi}.$$

β) *Diagrama de putere, (cu doi poli de tensiune* sau *diagrama cercului).* Cu aceiaşi vectori ca mai sus, puterea aparentă *dată* dipolului (la borna de intrare) sau *primită* (la borna de ieşire) este

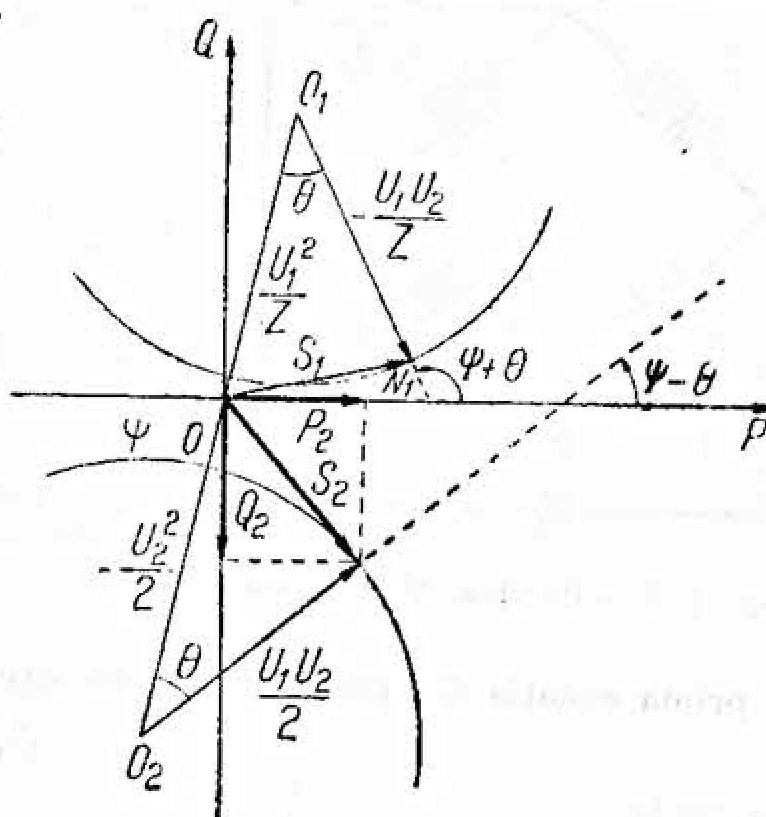


Fig. 161. — Diagrama circulară a dipolului.

$$\left.\begin{aligned} \overline{S}_1 &= P_1 + jQ_1 = \overline{U}_1\,\overline{I}_c = \frac{U_1^2}{Z}\,\underline{|\psi} - \frac{U_1 U_2}{Z}\,\underline{|\psi + \theta} \\ \overline{S}_2 &= P_2 + jQ_2 = \overline{U}_2\,\overline{I}_c = \frac{U_1 U_2}{Z}\,\underline{|\psi - \theta} - \frac{U_2^2}{Z}\,\underline{|\psi} \end{aligned}\right\} \qquad (353.1)$$

Diagrama circulară se obţine construind aceste relaţii (fig. 161).

T. Regimul deformant

354. **Regimul deformant** este regimul energetic alternativ la care cel puţin una din unde, de curent sau de tensiune, nu este sinusoidală.

355. **Funcţie periodică nesinusoidală** este acea funcţie nesinusoidală care are proprietatea de a se reproduce identic cu ea însăşi după perioade egale. O astfel de funcţie este caracterizată prin ecuaţia

$$f(t) = f(t + kT)$$

în care T este perioada funcţiei dată şi k un număr întreg oarecare.

356. **Funcţii armonice.** Două sau mai multe funcţii periodice *sinusoidale* se zic că sunt *armonice* între ele dacă raportul perioadelor este un număr întreg oarecare. Funcţia de bază, faţă de care se face raportul perioadelor, se numeşte *unda* sau *armonica fundamentală*, celelalte se numesc *unde* sau *armonice superioare.*

Exemplu. Fie funcţiile $y_1 = A_1 \sin \omega t$ şi $y_n = A_n \sin n\omega t$, având, respectiv perioadele $T_1 = 2\pi/\omega$ şi $T_n = 2\pi/n\omega$. Raportul perioadelor este $T_1/T_n = n$, n fiind un întreg oarecare. Funcţia y_n se numeşte armonica de ordinul n.

357. **Descompunerea şi compunerea funcţiilor periodice.** Orice funcţie nesinusoidală poate fi descompusă într'o infinitate de funcţii sinusoidale armonice având perioadele în progresie aritmetică şi un defazaj oarecare faţă de o anumită origine. Reciproc, compunerea a două sau mai multe funcţii armonice sinusoidale dau o funcţie periodică nesinusoidală, perioada funcţiei rezultante fiind egală cu perioada armonicei fundamentale.

358. **Două armonice de acelaşi ordin sunt în fază** atunci când ele trec prin zero şi au maximum în acelaşi sens, la aceleaşi timpuri.

Dacă trecerile prin zero şi prin maximuri nu mai coincid, atunci acele armonice sunt *defazate* sau *decalate* una faţă de cealaltă.

In consecinţă, defazajul între două armonice de acelaşi ordin are aceeaşi seminficaţie ca şi în regimul sinusoidal.

Exemplu. Armonicele $y_1 = A_1 \sin(n\omega t - \varphi_1)$ şi $y_2 = A_2 \sin(n\omega t - \varphi_2)$ sunt defazate una faţă de cealaltă cu unghiul

$$|\varphi| = \left|\frac{\varphi_2}{n} - \frac{\varphi_1}{n}\right| < \frac{\pi}{n}.$$

Dacă $\varphi < 0$, atunci funcţia y_1 este decalată *în urma* funcţiei y_2; dacă $\varphi > 0$, atunci funcţia y_1 este decalată *înaintea* funcţiei y_2.

359. **Compunerea armonicelor** dă diverse unde nesinusoidale, forma şi caracteristica lor depinzând de amplitudinea acestora şi de decalajul lor relativ.

α) Compunerea armonicelor oarecare pare şi impare în fază (sau în opoziţie) produce o undă nesinusoidală având proprietatea

$$f(t) = -f(T - t).$$

β) Compunerea armonicelor oarecare pare şi impare, simetrice unele faţă de altele (armonicele impare în fază cu fundamentala iar armonicele pare în cuadratură cu aceasta) produce o undă nesinusoidală având proprietatea

$$f(t) = f(T - t).$$

γ) Compunerea armonicelor impare oarecare produce o undă nesinusoidală având proprietatea

$$f(t) = -f\left(\frac{T}{2} + t\right).$$

Aceste curbe reprezintă majoritatea undelor de tensiune şi curent întâlnite în electrotehnică.

δ) Compunerea armonicelor pare oarecare produce o undă nesinusoidală având proprietatea

$$f(t) = f\left(\frac{T}{2} + t\right).$$

Notă. Toate aceste unde nesinusoidale rezultante mai au proprietatea

$$\int_t^{t+T} f(t)\, dt = 0.$$

ε) Compunerea armonicelor oarecare cu un termen constant produce o undă nesinusoidală pentru care

$$f(t) = f(t + T)$$

şi

$$S = \int_t^{t+T} f(t)\, dt \neq 0.$$

Valoarea medie a acestei suprafeţe reprezintă termenul constant al seriei de funcţii sinusoidale care compun unda dată.

360. **Analiza armonică a funcţiilor nesinusoidale.** Orice funcţie nesinusoidală se poate pune sub forma

$$y = C_0 + \sum_1^{\infty} C_k \sin(k\omega t - \varphi_k) = C_0 + \sum_1^{\infty} A_k \sin k\omega t + \sum_1^{\infty} B_k \cos k\omega t \qquad (360.1)$$

în care

$$C_k^2 = A_k^2 + B_k^2 \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{B_k}{A_k}. \qquad (360.2)$$

Seria (360.1) se numeşte *seria Fourier*.

Găsirea coeficienţilor A_k, B_k şi C_0 formează obiectul analizei armonice.

α) *Metoda integrării*. Dacă funcţiei y i se poate determina ecuaţia analitică atunci coeficienţii seriei Fourier se pot determina prin simple cuadraturi

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T}\int_0^T y \sin k\omega t\, dt \\ B_k &= \frac{2}{T}\int_0^T y \cos k\omega t\, dt \\ C_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T y dt \end{aligned}\right\} \qquad (360.3)$$

β) *Metoda discontinuităţilor sau a incidentelor geometrice* (L a l e s c u - A b a s o n). Dacă $F(x_i)$ este valoarea funcţiei în dreapta punctului de discontinuitate, a cărui abscisă este x_i şi $f(x_i)$ valoarea funcţiei la stânga punctului de discontinuitate, atunci

$$S_i^{(0)} = F(x_i) - f(x_i)$$
$$S_i^{(p)} = F^{(p)}(x_i) - f^{(p)}(x_i),$$

$F^{(p)}(x_i)$ şi $f^{(p)}(x_i)$ fiind derivatele de ordinul p a acestor funcţii, şi coeficienţii termenilor generali ai descompunerii în serie Fourier sunt:

$$\pi A_k = +\frac{1}{k}\sum S_i^{(0)} \cos kx_i - \frac{1}{k^2}\sum S_i^{(1)} \sin kx_i - \frac{1}{k^3}\sum S_i^{(2)} \cos kx_i +$$
$$+ \frac{1}{k^4}\sum S_i^{(3)} \sin kx_i + \frac{1}{k^5}\sum S_i^{(4)} \cos kx_i - \ldots$$

$$\pi B_k = -\frac{1}{k}\sum S_i^{(0)} \sin kx_i - \frac{1}{k^2}\sum S_i^{(1)} \cos kx_i + \frac{1}{k^3}\sum S_i^{(2)} \sin kx_i +$$
$$+ \frac{1}{k^4}\sum S_i^{(3)} \cos kx_i - \ldots$$

în care termenul general $\sum S_i^{(p)} \sin kx_i$ trebue înţeles în sensul că, pentru *toate* punctele de abscisă x_i în care funcţia prezintă salturi de ordinul p, ale derivatelor de ordinul (p), se va face produsul $S_i^{(p)} \sin kx_i$ sau $S_i^{(0)} \cos kx_i$ şi se vor aduna rezultatele.

Pentru originea curbei de analizat, $x_i = 0$, ca şi pentru extremitatea ei, $x_i = 2\pi$, se consideră că funcţia din stânga originii cum şi funcţia din dreapta punctului de abscisă $x_i = 2\pi$, sunt nule.

Termenul constant al seriei Fourier este dat de relaţia

$$2\pi C_0 = \sum\left(-\frac{1}{1!} x_i S_i^{(0)} + \frac{1}{2!} x_i^2 S_i^{(1)} - \frac{1}{3!} x_i^3 S_i^{(2)} + \frac{1}{4!} x_i^4 S_i^{(3)} - \cdot + \cdot\right)$$

Observaţie. Această metodă se aplică în special acolo unde curba de analizat permite uşor suprapunerea unui contur poligonal.

361. **Analiza armonică a curbelor periodice experimentale.** Pentru aceste curbe nu se poate scrie ecuaţia analitică. Se transformă integralele din relaţiile (360.3) în sume finite şi se obţine

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m \sin km\frac{\pi}{p} \\ B_k &= \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m \cos km\frac{\pi}{p} \\ C_0 &= \frac{1}{2p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m \end{aligned}\right\} \qquad (361.1)$$

în care $2p$ este numărul de părţi egale în care a fost împărţită perioada şi Y_k amplitudinea corespunzătoare abscisei x_k.

Pentru calcul se sistematizează sumele, obţinându-se diverse simplificări. Sunt nenumărate metodele de calcul a acestor coeficienţi.

α) *Metoda ordonatelor echidistante* (T h o m p s o n - R u n g e). Se împarte

perioada în $2p = 4q$ diviziuni egale. Calculul se face după următoarea schemă, întocmită pentru $2p = 12$:

Ordonate		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Sumă	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Diferenţă		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

	Sume				Diferenţe		
	S_0	S_1	S_2	S_3	d_1	d_2	d_3
	S_6	S_5	S_4		d_5	d_4	
Sumă	S'_0	S'_1	S'_2	S'_3	δ_1	δ_2	δ_3
Diferenţă	d'_0	d'_1	d'_2		δ'_1	δ'_2	

Calculul coeficienţilor termenilor în sinus

sin 30° = 0,5	δ_1					
sin 60° = 0,866		δ_2	δ'_1	δ'_2		
sin 90° = 1	δ_3				δ_1	δ_3
Sume	I	II	I	II	I	II
Suma I + II	$6A_1$		$6A_2$		—	
Diferenţa I − II	$6A_5$		$6A_4$		$6A_3$	

Calculul coeficienţilor termenilor în cosinus

cos 0° = 1	S'_0	S'_1	d'_0		S'_0	$-S'_3$	d'_0	d'_2
	S'_2	S'_3						
cos 30° = 0,866				d'_1				
cos 60° = 0,5			d'_2		$-S'_2$	S'_1		
Sume	I	II	I	II	I	II	I	II
Suma I + II	$12B_0$		$6B_1$		$6B_2$		—	
Diferenţa I − II	$12B_6$		$6B_5$		$6B_4$		$6B_2$	

N o t ă. In fiecare rând valorile trebue înmulţite cu sinusul sau cosinusul din stânga lor. Pentru calcule cu mai multe armonice există formulare de calcul. Deasemenea calculul se poate face cu ajutorul unor cartoane ajurate.

β) *Metoda grafică* (K r u g - R o t h). Dacă în relaţiile (361.1) se înmulţeşte prima relaţie cu j şi se adună cu a doua, se obţine

$$C_k = B_k + jA_k = \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m\left(\cos km\frac{\pi}{p} + j\sin km\frac{\pi}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m \underline{|km\frac{\pi}{p}}. \quad (361.2)$$

Rezultă de aici că se poate determina armonica de ordinul k făcând suma geometrică a diverselor amplitudini, fiecare făcând unghiul $km\frac{\pi}{p}$ faţă de originea de fază şi împărţind rezultanta prin p ($2p$ fiind numărul în care s'a divizat perioada).

Defazajul se obţine măsurând unghiul pe care îl face această rezultantă cu axa complexă.

γ) *Metode experimentale.* Se pot determina armonicele unei curbe nesinusoidală de tensiune sau de curent cu ajutorul unui oscilograf, făcând un montaj care poate să pună în rezonanţă rând pe rând diversele armonice.

362. **Mărimile caracteristice ale regimului deformant.** O mărime nesinusoidală poate fi reprezentată printr'o expresie de forma (seria Fourier)

$$y = Y_0 + \sum_1^{\infty} Y_k\sqrt{2}\sin(k\omega t - \varphi_k), \quad (362.1)$$

în care Y_k este valoarea eficace a armonicei de ordinul k şi Y_0 termenul constant.

α) *Valoarea eficace* a mărimii nesinusoidală (362.1) este dată de relaţia

$$Y_{ef} = \sqrt{\sum_0^{\infty} Y_k^2}. \quad (362.2)$$

β) *Rezidiul deformant* sau *rezidiul* unei funcţii nesinusoidale este curba care se obţine suprimând armonica fundamentală. Valoarea eficace a acestei curbe este dată de relaţia

$$Y_d = \sqrt{Y_{ef}^2 - Y_1^2} \cong \sqrt{Y_0^2 + Y_2^2 + \ldots Y_n^2}. \quad (362.3)$$

γ) *Valoarea medie* a unei funcţii nesinusoidală este dată de relaţia

$$Y_{med} = \int_0^{\frac{T}{2}}\left(Y_0 + \sum_1^n Y_k\sqrt{2}\sin k\omega t\right)dt = Y_0 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_1^n \frac{1}{k}Y_k, \quad (362.4)$$

în care k este un număr impar.

Calculată pentru o perioadă întreagă, ea este egală cu Y_0.

δ) *Factorul de formă* este definit de relaţia

$$\alpha = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}}. \quad (362.5)$$

ε) *Factorul de creastă* este definit de relaţia

$$f_v = \frac{Y_{max}}{Y_{ef}}, \quad (362.6)$$

în care Y_{max} este valoarea maximă măsurată pe curbă.

ξ) *Coeficientul de distorsiune* este definit de relaţia

$$\delta = \frac{Y_d}{Y_{ef}}. \quad (362.7)$$

363. **Criteriul de caracterizare a unui regim deformant.** Un regim se consideră sinusoidal când undele respective, de tensiune şi curent, nu diferă prea mult de o sinusoidă. Aceasta se constată fie examinând diferenţa de amplitudine între curba considerată şi sinusoida echivalentă pentru o aceiaşi ordonată şi raportată la amplitudinea maximă a acestei sinusoide (STAS 1893-50), fie, calculând valoarea coeficientului de distorsiune δ.

In ambele cazuri, valoarea rezultantă trebue să fie $\leqslant 5\%$.

364. **Puterea în regimul deformant.** Intr'un regim deformant se întâlnesc patru noţiuni de putere.

α) *Puterea activă.* Dacă cele două unde de tensiune şi curent au următoarele expresii

$$\left.\begin{aligned} u &= U_0 + \sum_1^n U_k \sqrt{2} \sin (k\omega t - \alpha_k), \\ i &= I_0 + \sum_1^n I_k \sqrt{2} \sin (k\omega t - \beta_k), \end{aligned}\right\} \qquad (364.1)$$

expresia puterii active este dată de relaţia

$$P = U_0 I_0 + \sum_1^n U_k I_k \cos \varphi_k , \qquad (364.2)$$

în care

$$\varphi_k = \beta_k - \alpha_k . \qquad (364.3)$$

Puterea activă în regim deformant se poate măsura cu orice *wattmetru electrodinamic.* Unitatea de măsură a puterii activă este *watt*-ul (W).

β) *Puterea reactivă.* Fenomenele reactive pot fi caracterizate în regim deformant prin suma puterilor reactive elementare:

$$Q = \sum_1^n U_k I_k \sin \varphi_k \qquad (364.4)$$

această expresie relevându-se simetric şi simultan cu puterea reală prin proprietatea conservării algebrice, cât şi prin principiul separării puterii aparente într'un astfel de regim în 3 termeni ortogonali (Prof. Ing. C. Budeanu).

Această expresie se poate deduce prin calcul, limitându-se la numărul de armonice corespunzătoare preciziei dorite.

Varmetrele electrodinamice măsoară o expresie de forma

$$Q' = \sum_1^n \frac{1}{k} U_k I_k \sin \varphi_k . \qquad (364.5)$$

Măsurarea puterii reactive în regim deformant cu ajutorul varmetrelor electrodinamice comportă o eroare sistematică $\frac{Q' - Q}{Q} \times 100$, care însă, în practica industrială uzuală este de cel mult 2%.

Dacă tensiunea este sinusoidală şi numai curentul nesinusoidal, puterea reactivă se reduce la termenul corespunzător undei fundamentale $Q' = U_1 I_1 \sin \varphi_1$, iar eroarea sistematică a varmetrului electrodinamic se anulează.

Unitatea de putere reactivă este *var*-ul (VAR), ca şi în regim sinusoidal.

γ) *Puterea deformantă* scoasă în evidenţă prin proprietăţile de conservare a puterilor în regim deformant şi în concordanţă cu principiul separării puterilor, este definită prin

$$D = \sqrt{\sum_1^n [U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2 U_m U_n I_m I_n \cos (\varphi_m - \varphi_n)]} \qquad (364.6)$$

în care unghiurile φ sunt definite de relaţia (364.3).

Nu se dispune încă de mijloace de a măsura direct puterea deformantă. Ea se poate determina prin calcul.

Unitatea de măsură (propusă) pentru măsurarea puterii deformante este *vad*-ul (VAD).

Calculul puterii deformante cu relaţia (364.6) fiind foarte laborios, se utilizează mai multe formule aproximative.

1) Dacă U este sinusoidal sau dacă $\delta_T \leqslant 20\%$, puterea deformantă poate fi calculată cu relaţia

$$D = U_{ef} I_d . \qquad (364.7)$$

2) Dacă $\delta_T > 20\%$ puterea deformantă poate fi calculată cu relaţia

$$D = U_{ef} I_d + U_d I_{ef} . \qquad (364.8)$$

3) O formulă simplificată dar foarte precisă este următoarea

$$D = \sqrt{U_1^2 I_d^2 + U_d^2 I_1^2 - 2 U_1 I_1 \sum_1^n U_m I_m \cos (\varphi_1 - \varphi_m)}. \qquad (364.9)$$

δ) *Puterea aparentă* este dată de relaţia

$$S = U_{ef} \cdot I_{ef} = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}. \qquad (364.10)$$

Această putere nu se poate măsura direct şi se deduce prin calcul fie din indicaţiile unui voltmetru şi a unui ampermetru, fie din puterile activă, reactivă şi deformantă. Unitatea de măsură este *volt-amper*-ul (VA).

365. **Conservarea puterilor în regimul deformant.** Odată cu definirea noţiunii şi denumirea de putere deformantă (Prof. Ing. C. Budeanu) s'a relevat şi proprietăţile de conservare de care se bucură această mărime simultan cu acelea referitoare la puterile reală şi reactivă.

Într'o reţea electrică statică, aplicând legile lui Kirchhoff şi principiul conservării puterilor instantanee, care trebue să fie satisfăcute oricare ar fi timpul t, se obţin relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^s \sum_0^n U_k I_k \cos (\beta_k - \alpha_k) &= \sum_1^s \sum_0^n U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_1^s \sum_0^n P_k = 0, \\ \sum_1^s \sum_0^n U_k I_k \sin (\beta_k - \alpha_k) &= \sum_1^s \sum_k^n U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_1^s \sum_0^n Q_k = 0, \end{aligned}\right\} (365.1)$$

în care s este numărul de laturi ale reţelei considerate, celelalte mărimi având semnificaţiile din relaţiile (364.1), precum şi relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^s \delta'_{mn} &= \sum_1^s [U_m I_n \cos (\alpha_m + \beta_n) - U_n I_m \cos (\alpha_n + \beta_m)] = 0 , \\ \sum_1^s \delta''_{mn} &= \sum_1^s [U_m I_n \sin (\alpha_m + \beta_n) - U_n I_m \sin (\alpha_n + \beta_m)] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (365.2)$$

Relaţiile (365.1) exprimă *conservarea algebrică* în întreaga reţea a puterii *reală* sau *activă* $P = \sum_0^n P_k$ precum şi a puterii *reactivă* $Q = \sum_0^n Q_k$.

Relaţiile (365.2) exprimă *conservarea algebrică* în întreaga reţea a mărimilor δ'_{mn} şi δ''_{mn}, care sunt *puterile deformante elementare*. Relaţiile (365.2) conduc la *conservarea vectorială* a sumei acestor mărimi considerate ca vectori ortogonali şi deci a mărimii

$$\sum_1^s \overline{D}_{mn} = \sum_1^s \delta'_{mn} + j \sum_1^s \delta''_{mn} = \sum_1^s \left(\delta'_{mn} + j\,\delta''_{mn}\right) = 0\,,$$

sau, extinsă la toate armonicele,

$$\sum_1^s \sum_1^{mn} \overline{D}_{mn} = \sum_1^s \sum_1^{mn} \left(\delta'_{mn} + j\,\delta''_{mn}\right) = 0. \qquad (365.3)$$

Punând

$$\overline{D} = \sum_1^{mn} D_{mn}\,,$$

modulul acestui vector, care este un vector în spaţiu cu n dimensiuni, este

$$|\overline{D}| = \sqrt{\sum_1^{mn} \delta'^2_{mn} + \sum_1^{mn} \delta''^2_{mn}} = \sqrt{\sum_1^{mn} \left(\delta'^2_{mn} + \delta''^2_{mn}\right)}\,,$$

sau ţinând seama de expresiile (365.2) se obţine în definitiv

$$|\overline{D}| = \sqrt{\sum_1^{mn} \left[U_m^2\, I_n^2 + U_n^2\, I_m^2 - 2\,U_m\, U_n\, I_m\, I_n \cos\left(\varphi_m - \varphi_n\right)\right]}$$

adică tocmai expresia (364.6) a puterii deformante.

Expresia (365.3) poate fi pusă şi sub forma

$$\sum_1^s \overline{D} = \sum_1^s \sum_1^{mn} \left[U_m\, I_n \underline{|\alpha_n + \beta_m} - U_n\, I_m \underline{|\alpha_n + \beta_m}\right] \qquad (365.4)$$

utilă adesea în calcule şi consideraţii asupra acestei mărimi.

Din proprietăţile de conservare algebrică a mărimilor P şi Q — puterile activă şi reactivă — şi de conservare vectorială a mărimii D — puterea deformantă — rezultă conservarea vectorială a mărimii

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} = UI\,, \qquad (365.5)$$

adică a puterii aparente, precum şi a mărimii

$$P_c = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{Q^2 + D^2}, \qquad (365.6)$$

adică a puterii *fictivă* sau *complementară*.

Puteri deformante apar într'o reţea, fie când maşinile generatoare sunt producătoare de armonice de forţă electromotoare, fie când unele din aparatele reţelei funcţionează ca aparate deformante. In această categorie se poate încadra orice aparat echivalent cu o rezistenţă, inductanţă sau capacitate periodic variabilă, ca de exemplu aparate de genul supapelor, a inductanţelor saturate, etc.

Proprietatea de conservare a puterilor elementare deformante scoate în evidenţă faptul că unei consumaţii de putere deformantă îi corespunde o producţie în alte părţi. Apare astfel un fenomen de circulaţie a puterii deformante, care reprezintă principalul prejudiciu al manifestării fenomenelor deformante într'o reţea.

366. Factor de putere în regim deformant. Factorul de putere se defineşte şi în regimul deformant ca raportul dintre puterea reală P şi puterea aparentă S:

$$K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}\,. \qquad (366.1)$$

In general

$$K < 1.$$

Factorul de putere este egal cu unitatea dacă, simultan, $Q = 0$ şi $D = 0$. Pentru a avea $D = 0$, din relaţia (364.6) rezultă că trebue să fie satisfăcute simultan relaţiile

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{U_1}{I_1} = \dfrac{U_2}{I_2} = \ldots = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{U_n}{I_n} \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m = \varphi_n \end{array}\right\} \qquad (366.2)$$

adică, undele nesinusoidale de tensiune şi de curent să fie asemenea din punct de vedere electric şi în fază, ceeace nu se realizează decât în cazul când receptorul este o rezistenţă pură.

Definind expresia

$$\rho = \frac{Q}{P} = \operatorname{tg}\varphi \qquad (366.3)$$

ca *factorul reactiv* al regimului şi expresia

$$\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \operatorname{tg}\xi \qquad (366.4)$$

ca *factorul deformant* al regimului, expresia (366.1) a factorului de putere poate fi pusă sub forma

$$K = \cos\varphi \cdot \cos\xi\,. \qquad (366.5)$$

367. Circuite electrice în regim deformant.

α) *Legile lui Ohm şi Kirchhoff în regim deformant.* Intr'un circuit format dintr'o rezistenţă R, o inductanţă L şi o capacitate C legate în serie, alimentat cu o forţă electromotoare e, nesinusoidală,

$$e = \sum e_n$$

curentul care ia naştere poate fi considerat ca suprapunerea tuturor curenţilor sinusoidali care ar fi produşi separat de fiecare armonică în parte.

A doua lege a lui Kirchhoff aplicată circuitului se va scrie deci

$$R \sum i_n + L \frac{\mathrm{d} \sum i_n}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} \int \sum i_n\, \mathrm{d}t = \sum e_n\,. \qquad (367.1)$$

Dacă forţa electromotoare este de forma

$$e = E_0 + \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega t$$

atunci curentul rezultant este de forma

$$i = I_0 + \sum_1^n I_k \sqrt{2} \sin\left(k\omega t - \varphi_k\right) \qquad (367.2)$$

în care

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \frac{E_0}{R}, \quad E_k = \frac{R_k}{\sqrt{R^2 + \left(Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}\right)^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_k &= \frac{Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (367.3)$$

condensatorul fiind presupus imperfect.

β) *Rezonanţa în regimul deformant.* Din relaţiile (367.3) rezultă că dacă este satisfăcută condiţia de rezonanţă pentru armonica de ordinul k

$$LC\, k^2 \omega^2 - 1 = 0$$

intensitatea acestei armonice va fi maximă şi valoarea relativă a acestui curent în raport cu celelalte armonice va fi cu atât mai mare cu cât rezistenţa R a circuitului este mai mică. In aceste condiţii, curentul produs de forţa electromotoare nesinusoidală e, de perioadă T, va fi sensibil sinusoidal şi de perioadă T/k. Valoarea sa eficace este egală cu câtul dintre valoarea eficace a armonicei de ordinul k a forţei electromotoare şi rezistenţa ohmică a circuitului.

Diferenţa de potenţial la bornele condensatorului sau a inductanţei va deveni deasemenea foarte mare în raport cu forţa electromotoare dată, perioada ei fiind deasemenea T/k.

368. Producerea regimului deformant.

α) *Bobina cu miez de fier.* Legile curentului alternativ analoage curentului continuu, se aplică numai circuitelor pentru care inductanţa este constantă; în cazul unei bobine cu miezul de fier raportul dintre flux şi curent nu mai este constant, în special în regiunea de saturaţie a fierului. Relaţia între aceste două mărimi este dată de curba de magnetizare a materialului folosit.

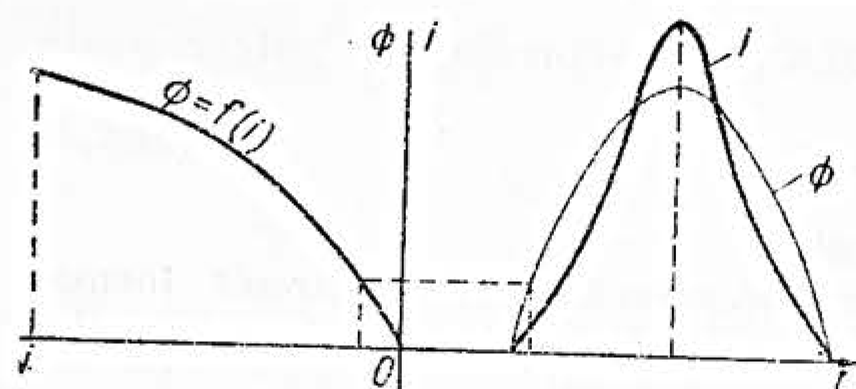


Fig. 162. — Determinarea curentului de magnetizare.

Ecuaţia de funcţionare a unei bobine cu miez de fier este

$$u = Ri + w\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (368.1)$$

Presupunând că bobina este alimentată cu o tensiune perfect sinusoidală, fluxul ce ia naştere se obţine din relaţia (368.1) şi este

$$\Phi = \frac{U\sqrt{2}}{w}\int_0^t \sin\omega t\, dt = \frac{U\sqrt{2}}{w\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \Phi_0\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (368.2)$$

rezultă că fluxul este deasemenea sinusoidal, dar decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii.

Curentul de magnetizare $i = f(t)$ se deduce printr'o construcţie grafică din curba $\Phi = f(t)$ şi curba experimentală $\Phi = f(i)$ (fig. 162).

Curentul de magnetizare este în fază cu fluxul şi simetric faţă de ordonata punctului $T/4$. Curba acestui curent este nesinusoidală şi de forma

$$i = I_1\sqrt{2}\sin\omega t - I_3\sqrt{2}\sin 3\omega t + \sum_2^n I_{2k+1}\sqrt{2}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\sin(2k+1)\omega t. \qquad (368.3)$$

In cazul când ciclul de histerezis al materialului nu este neglijabil, curba curentului nu mai este simetrică şi nici în fază cu curba fluxului. Ea este în *avans* faţă de aceasta cu unghiul α, numit unghi de *avans histerezis* (fig. 163).

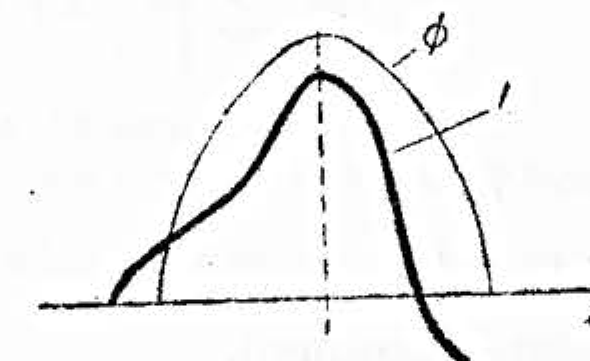


Fig. 163. — Curba curentului de magnetizare în cazul când ciclul de histeresis nu este neglijabil.

In cazul alimentării bobinei cu curent perfect sinusoidal, fluxul ce ia naştere nu este sinusoidal şi are o curbă turtită a cărui ecuaţie este

$$\varphi = \Phi_1\sqrt{2}\sin\omega t + \Phi_3\sqrt{2}\sin 3\omega t + \sum_2^n \Phi_{2k+1}\sqrt{2}\sin(2k+1)\omega t,$$

iar tensiunea la bornele bobinei, decalată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea fluxului, este deasemenea nesinusoidală, fiind o curbă ascuţită cu ecuaţia de forma

$$u = U_1\sqrt{2}\sin\omega t - U_3\sqrt{2}\sin 3\omega t + \sum_2^n U_{2k+1}\sqrt{2}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\sin(2k+1)\omega t \qquad (368.4)$$

β) *Supapele electronice.* O supapă electronică este un aparat deformant prin excelenţă, deoarece, aplicându-i la borne o tensiune perfect sinusoidală, ea nu lasă să treacă decât un curent având un anumit sens. Teoretic, o supapă electronică poate fi considerată ca un circuit format cu o rezistenţă variabilă în timp şi anume, pentru o jumătate de perioadă R = const. şi pentru cealaltă jumătate de perioadă $R = \infty$.

γ) *Efectul corona,* care apare la liniile de transmitere a energiei electrice, de înaltă tensiune, este deasemenea o sursă de energie deformantă, producând, prin efectele deformante, perturbaţii asupra liniilor de telecomunicaţii vecine. Efectul deformant poate fi atribuit variaţiei ciclice a capacităţii sistemului şi care poate fi redată prin relaţia

$$C = C_1(1 + \alpha\cos 2\omega t)$$

care apare la tensiunea critică şi în momentul producerii descărcării.

δ) *Alternatorul cu curba de tensiune nesinusoidală.* Prin însăşi construcţia lor, curba de tensiune a unui alternator nu este riguros sinusoidală. Armonicele curbei de tensiune la bornele unui alternator pot avea trei origini:

1) armonicele curbei câmpului,
2) armonicele de dantură,
3) armonicele reacţiunii indusului.

Efortul constructorilor de maşini este de a realiza alternatoare având o undă cât mai sinusoidală posibil (a se vedea cap. « *Maşini electrice* ») deoarece un alternator cu undă nesinusoidală creează dela început un regim deformant în reţea care poate fi agravat prin efecte secundare.

369. Efectele regimului deformant.

α) *Un condensator alimentat cu o tensiune nesinusoidală.* Un condensator având o capacitate de C farazi alimentat cu tensiunea

$$U = \sum_0^n \left(U'_k\sqrt{2}\sin k\omega t + U''_k\sqrt{2}\cos k\omega t\right) \qquad (369.1)$$

este străbătut de un curent a cărui ecuaţie este

$$i = C\omega \sum_0^n \left[k\, U_k' \sqrt{2} \sin\left(k\,\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + k\, U_k'' \sqrt{2} \cos\left(k\,\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Rezultă din această relaţie că curentul rezultant este mult mai deformat decât tensiunea care i-a dat naştere, fiecare armonică fiind amplificată de un număr de ori egal cu ordinul său. Deasemenea, curentul rezultant este decalat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii.

β) *O inductanţă alimentată cu o tensiune nesinusoidală.* O bobină, având o inductanţă L şi rezistenţa neglijabilă, alimentată de tensiunea nesinusoidală precedentă (369.1) este străbătută de un curent a cărui ecuaţie este

$$i = \frac{1}{L\omega} \sum_0^n \left[\frac{1}{k} U_k' \sqrt{2} \sin\left(k\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k} U_k'' \sqrt{2} \cos\left(k\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

care se vede că este mai puţin deformat decât tensiunea care i-a dat naştere şi decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma acesteia. Rezultă că o inductanţă *atenuează* un regim deformant.

γ) *Efecte diverse.*

1) C r e ş t e r e a p u t e r i i a p a r e n t e. Este dată de relaţia

$$\zeta = \frac{S'' - S'}{S'} \cdot 100$$

în care S' este puterea aparentă datorită numai undei fundamentale şi S'' puterea aparentă reală.

2) C r e ş t e r e a p i e r d e r i l o r o h m i c e. Dacă R este rezistenţa conductei, pierderile ohmice reale sunt date de relaţia

$$p'' = 3\,RI^2 = 3R\,\frac{P^2 + Q^2 + D^2}{3\,U^2}$$

In cazul regimului sinusoidal aceste pierderi se reduc la

$$p' = 3\,R\,\frac{P^2 + Q^2}{3U^2}$$

de unde creşterea pierderilor ohmice este dată de relaţia

$$\xi = \frac{p'' - p'}{p'} = \frac{D^2}{P^2 + Q^2} = \tau^2$$

adică sunt egale cu pătratul factorului deformant (§ 346).

3) C r e ş t e r e a i m p e d a n ţ e i a p a r e n t e. Considerând un circuit serie format dintr'o rezistenţă R, o reactanţă inductivă X_L şi o reactanţă capacitivă X_C, în regim sinusoidal, impedanţa acestui circuit este

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

In regim deformant, măsurând aceiaşi impedanţă, se găseşte o valoare Z' care în general este diferită de Z. Valoarea impedanţei Z' este dată de relaţia

$$Z' = \Gamma \cdot Z$$

în care

$$\Gamma = \sqrt{\frac{U_1^2 + \sum_2^n U_k^2}{U_1^2 + \sum_2^n \frac{R^2 + (X_L - X_C)^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k}X_C\right)^2} U_k^2}}$$

U_k fiind valoarea eficace a armonicei de ordinul k. Coeficientul Γ este o constantă depinzând atât de regimul deformant cât şi de constituţia circuitului.

4) M a j o r a r e a e r o r i i l a a p a r a t e l e d e m ă s u r ă. Eroarea aparatelor de măsură funcţionând într'un regim deformant se majorează sensibil; astfel la unele aparate care măsoară puteri sau energii reale şi în special la contorul de inducţie această eroare poate ajunge până la 30%. Acelaşi fenomen se produce şi cu aparatele electrodinamice. (I. S. A n t o n i u).

370. Regimul deformant în sisteme trifazate echilibrate.

α) *Tensiunea pe fază a unui alternator.* Fie un alternator echilibrat având tensiunea pe fază nesinusoidală, de forma

$$\left.\begin{aligned} e_{\mathrm{I}} &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega t && \text{pentru faza I} \\ e_{\mathrm{II}} &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right) && \text{pentru faza II} \\ e_{\mathrm{III}} &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t + \frac{2\pi}{3\omega}\right) && \text{pentru faza III} \end{aligned}\right\} \quad (370.1)$$

în care k este un număr impar de forma $k = 2m + 1$.

După forma lui k, sistemele trifazate ale diverselor armonice sunt diferite.

Pentru $k = 3\,\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$), armonicele corespunzătoare formează *sisteme homopolare*, tensiunile pe cele 3 faze fiind identice şi în fază

$$e_{\mathrm{I}} = e_{\mathrm{II}} = e_{\mathrm{III}} = \sum_0^\infty E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\,\alpha\,\omega t. \quad (370.2)$$

Pentru $k = 3\,\alpha + 1$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$), armonicele corespunzătoare formează *sisteme directe*, tensiunile pe cele 3 faze fiind

$$\left.\begin{aligned} e_{\mathrm{I}} &= \sum_0^\infty E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin (3\alpha + 1)\,\omega t \\ e_{\mathrm{II}} &= \sum_0^\infty E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin \left[(3\alpha + 1)\,\omega t - \frac{2\pi}{3}\right] \\ e_{\mathrm{III}} &= \sum_0^\infty E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin \left[(3\alpha + 1)\,\omega t + \frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}\right\} \quad (370.3)$$

Pentru $k = 3\alpha - 1$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$), armonicele corespunzătoare formează *sisteme inverse*, tensiunile pe cele 3 faze fiind

$$\left.\begin{aligned} e_{I} &= \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\sin(3\alpha-1)\omega t \\ e_{II} &= \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\sin\left[(3\alpha-1)\omega t+\frac{2\pi}{3}\right] \\ e_{III} &= \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\sin\left[(3\alpha-1)\omega t-\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}\right\} \quad (370.4)$$

β) *Tensiunea între două faze (tensiunea la borne) în cazul unui alternator cu forţă electromotoare nesinusoidală.* Tensiunea între două faze este dată de relaţia

$$e_{II-I} = e_I - e_{II} \quad (370.5)$$

care, în cazul regimului sinusoidal, dă

$$e_{II-I} = e\sqrt{3}$$

e fiind tensiunea pe fază.

Calculând relaţia (370.5), cu ajutorul expresiilor (370.1) se găseşte

$$e_{II-I} = e_I - e_{II} = \sum_{1}^{n} E_k\sqrt{2}\cdot 2\sin\left(k\omega t - k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\sin k\frac{\pi}{3}.$$

Pentru $k = 3\alpha$, $e_{II-I} = 0$. Rezultă că tensiunea la borne a unui alternator *nu conţine* armonice multiplu de 3.

Pentru $k = 3\alpha + 1$ ($\alpha = 0, 1, 2\ldots$) se găseşte

$$e_{II-I} = \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha+1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left[(3\alpha+1)\omega t+\frac{\pi}{6}\right].$$

Rezultă că armonicele de ordinul ($3\alpha + 1$) sunt decalate *înaintea* armonicei de bază cu unghiul $\pi/6$.

Pentru $k = 3\alpha - 1$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$) se găseşte

$$e_{II-I} = \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left[(3\alpha-1)\omega t-\frac{\pi}{6}\right].$$

Rezultă că armonicele de ordinul ($3\alpha - 1$) sunt decalate *în urma* armonicei de bază cu unghiul $\pi/6$.

Raportul dintre valoarea eficace a tensiunii între faze şi tensiunii pe fază, care în regimul sinusoidal este egal cu $\sqrt{3}$, în cazul regimului nesinusoidal este egal cu

$$\frac{e_{II-I}}{e_I} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{E_1^2+E_5^2+E_7^2+E_{11}^2+\ldots}{E_1^2+E_3^2+E_5^2+E_7^2+E_9^2+E_{11}^2+\ldots}}$$

γ) *Legarea în triunghi a fazelor unui alternator cu tensiunea pe fază nesinusoidală.* Legând în serie cele 3 faze ale alternatorului (conectare în triunghi deschis), tensiunea la bornele libere ale alternatorului este

$$u = e_I + e_{II} + e_{III} = \sum_{1}^{n} E_k\sqrt{2}\left(1+2\cos k\frac{2\pi}{3}\right)\sin k\omega t.$$

Această expresie este nulă pentru $k = 3\alpha \pm 1$, ($\alpha = 0, 1, 2\ldots$), iar pentru $k = 3\alpha$, ea este egală cu

$$u = 3\sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha}\sqrt{2}\sin 3\alpha\omega t.$$

Rezultă că, în cazul legării în triunghi a înfăşurărilor unui alternator cu forţa electromotoare pe fază nesinusoidală, armonicele de tensiune de ordinul 3 sau multiplu de 3 se vor găsi închise în scurt circuit în înfăşurarea alternatorului, producând o circulaţie de curent parazitară şi deci pierderi suplimentare.

371. **Efectele fierului în reţelele trifazate.** Prezenţa fierului în circuitele trifazate are drept consecinţă apariţia în tensiunile pe fază ale bobinei cu fier (de exemplu un transformator) a armonicelor de ordinul 3 sau multiplu de 3. In afară de aceasta punctul neutru al transformatorului nu se mai află la acelaşi potenţial ca punctul neutru al alternatorului şi nici la un potenţial constant: el se găseşte la un potenţial oscilant nesinusoidal datorit armonicelor 3 sau multiplu de 3. Din cauza acestei tensiuni, între alternator şi transformator se va produce o circulaţie de curent cu undă nesinusoidală, formată numai din armonice 3, sau multiplu de 3, care va avea ca efect perturbarea liniilor de telecomunicaţii vecine. In afară de aceasta, se va produce un surplus de pierderi pe linia de transmitere a energiei electrice, precum şi eventuale declanşări intempestive şi desordonate ale releelor de punere la pământ a liniei.

Suprimarea armonicei 3 sau multiplu de 3 se face utilizând transformatoare având una din înfăşurări legată în triunghi, sau transformatoare cu 3 înfăşurări din care una din înfăşurări este legată în triunghi. Această ultimă înfăşurare poate fi sau nu o înfăşurare activă, făcând parte din sistemul energetic, sau o simplă înfăşurare legată în scurt circuit.

U. Regimul polifazat desechilibrat

372. **Generalităţi.** Cauzele care produc un desechilibru într'o reţea polifazată sunt de două feluri: *temporare*, care se datorează în special defectelor ce apar în reţea şi care pot fi de natură foarte diferită; *permanente* care se produc atunci când reţeaua este încărcată disimetric din cauza unei repartiţii defectuoase a sarcinii pe cele n faze.

Dat fiind răspândirea, aproape exclusivă a reţelelor trifazate, ne vom ocupa numai de regimul desechilibrat în sistemele trifazate.

373. **Reprezentarea topografică a tensiunilor.** Forţele electromotoare ale unui alternator pot fi reprezentate grafic prin trei vectori egali ca mărime şi decalaţi succesiv unul faţă de altul cu un unghi $2\pi/3$, aceasta dacă se presupune că sistemul este echilibrat şi simetric. In caz contrariu, cei trei vectori concurenţi pot fi oricum, atât ca decalaj cât şi ca mărime. Punctul de concurenţă se consideră ca potenţialul de origine al sistemului — potenţialul de referinţă. El este luat în general egal cu zero. Această reprezentare se numeşte *reprezentarea topografică a tensiunilor*

(fig. 164). Pe această diagramă, tensiunile între faze se măsoară prin vectorii $\overline{E_2 E_1}$, $\overline{E_3 E_2}$, $\overline{E_1 E_3}$. Tot pe această diagramă se pot reprezenta curenţii şi, în raport cu aceştia, căderile de tensiune în alternator şi în consecinţă, tensiunile la borne şi între faze ale alternatorului. Diagrama topografică a tensiunilor are o mare utilitate în studiul regimurilor desechilibrate.

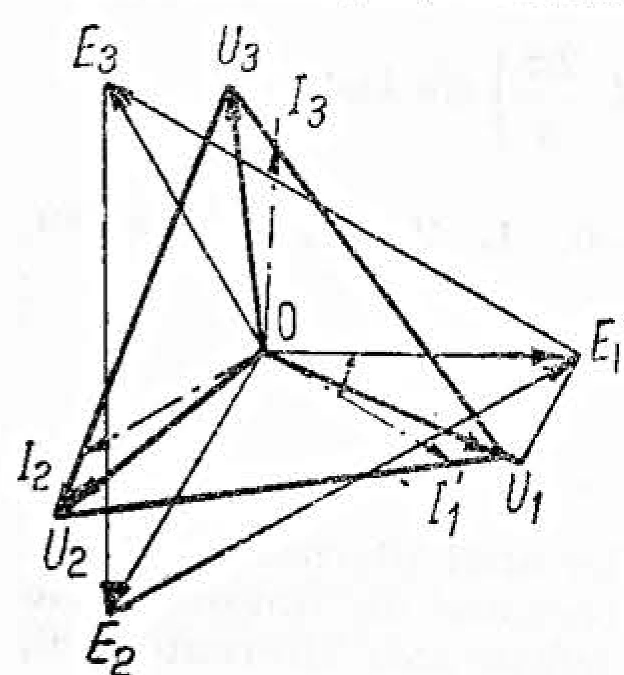


Fig. 164. — Reprezentarea topografică a tensiunilor.

374. Problema generală a sistemelor desechilibrate. Problema generală ce trebue rezolvată în sistemele polifazate este următoarea: fiind date forţele electromotoare induse în fazele alternatorului (presupuse legate în stea), rezistenţele reactanţele şi admitanţele generatorului liniei şi sarcinii pe fază, se cere să se calculeze curenţii pe fază, admitanţele, atât ale generatorului cât şi ale sarcinii fiind legate în stea.

Se admite că potenţialul punctului neutru al generatorului este egal cu zero. In aceste condiţii, la mersul în gol, potenţialul la bornele fiecărei faze este egal cu forţa electromotoare indusă în fază, care are un anumit modul şi un anumit argument. Dacă se presupune acum că se cunoaşte potenţialul punctului neutru al sarcinii, rezultă că se va cunoaşte şi diferenţa de potenţial a fiecărei faze. In adevăr, acestea sunt egale cu diferenţa între tensiunea la borne la mersul în gol şi tensiunea punctului neutru al sarcinii.

Cunoscând diferenţa de potenţial a fiecărei faze precum şi impedanţa sa totală, se găseşte imediat curentul căutat, în mărime şi în fază; cu ajutorul acestuia se poate construi în orice punct al sistemului potenţialul respectiv, determinându-se astfel şi căderea de tensiune dela gol la plină sarcină.

In consecinţă, rezolvarea problemei generale a unei distribuţii într'un sistem polifazat constă în determinarea punctului neutru al sarcinii.

375. Metodă analitică pentru calcularea punctului neutru al sarcinii şi curenţii pe faze. Dacă $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{E}_3$, $\overline{E}_0$ sunt forţele electromotoare ale alternatorului şi potenţialul punctului neutru şi $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Y}_0$, sunt admitanţele totale ale celor trei faze şi ale firului neutru, atunci potenţialul punctului neutru este dat de relaţia

$$\overline{E}_0 = \frac{\overline{E}_1 \overline{Y}_1 + \overline{E}_2 \overline{Y}_2 + \overline{E}_3 \overline{Y}_3}{\overline{Y}_0 + \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} \cdot \quad (375.1)$$

Curentul pe fiecare fază este dat de relaţia

$$\overline{I}_1 = (\overline{E}_1 - \overline{E}_0)\, \overline{Y}_1 \quad (375.2)$$

şi alte două relaţii analoage. Curentul în firul neutru este dat de relaţia

$$\overline{I}_0 = -\overline{E}_0\, \overline{Y}_0 \quad (375.3)$$

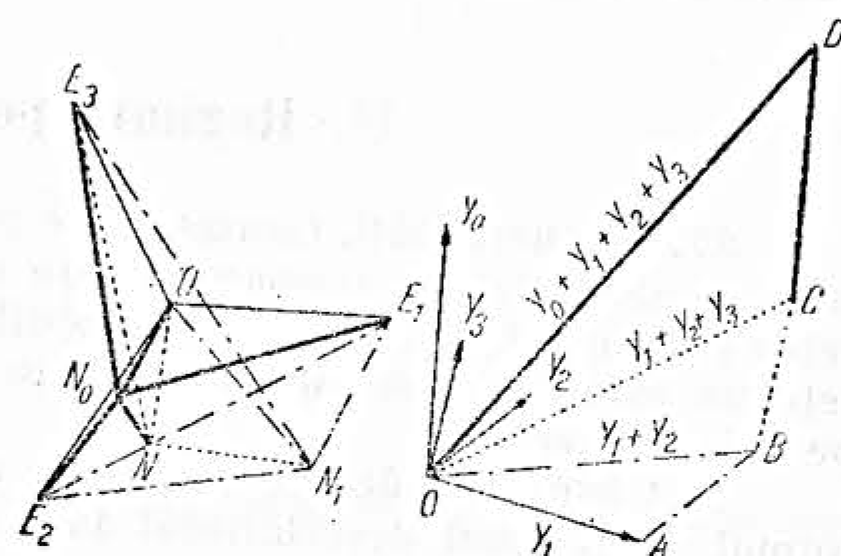


Fig. 165. — Construcţia grafică a punctului neutru.

376. Metodă grafică pentru determinarea potenţialului punctului neutru. Se construeşte topograma tensiunilor şi se reprezintă pe o diagramă admitanţele sistemului (fig. 165). Găsirea punctului neutru se face în 3 etape:

α) Se presupune la început că sistemul nu are fir neutru iar una din faze (spre exemplu faza 3) este ruptă. In acest caz

$$\frac{\overline{E_2 N'}}{\overline{N' E_1}} = \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}};$$

construind această relaţie în topograma tensiunilor se găseşte punctul neutru N'.

β) Se presupune acum că faza 3 nu este ruptă. In acest caz

$$\frac{\overline{E}_3 - \overline{E}_N}{\overline{E}_3 - \overline{E}_{N'}} = \frac{\overline{E_3 N}}{\overline{E_3 N'}} = \frac{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}},$$

care construită dă punctul neutru N al sistemului fără fir neutru.

γ) Dacă sistemul are şi fir neutru, atunci se poate scrie relaţia, N_0 fiind punctul neutru al sistemului,

$$\frac{\overline{E}_{N_0}}{\overline{E}_N} = \frac{\overline{ON}_0}{\overline{ON}} = \frac{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3}{\overline{Y}_0 + \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}},$$

care se construeşte uşor, determinându-se astfel grafic punctul neutru al sistemului cu fir neutru. Cunoscându-se punctul neutru, se determină pe topogramă cele trei tensiuni pe faze şi se pot calcula grafic curenţii căutaţi.

377. Calculul curenţilor când se cunosc tensiunile între faze la utilizare. In cazul general nu se cunosc forţele electromotoare la alternator ci numai tensiunile la bornele sarcinii. Cele trei tensiuni între faze formează un triunghi oarecare. Suma lor este întotdeauna nulă.

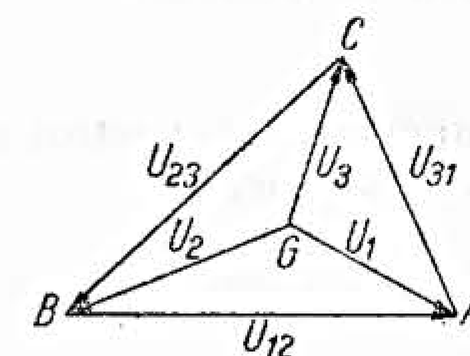


Fig. 166. — Determinarea tensiunilor pe fază când impedanţele sarcinilor sunt egale.

Se presupune mai întâi că cele trei sarcini sunt egale. Fie $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{U}_3$ cele trei tensiuni pe fazele sarcinii; în acest caz, suma curenţilor în punctul neutru al sarcinii fiind nulă se poate scrie

$$\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 = 0 \quad (377.1)$$

ceeace înseamnă că punctul neutru al sarcinii se găseşte în centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze (fig. 166). Se găseşte uşor

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \frac{1}{3}(\overline{U}_{12} - \overline{U}_{31}) \\ \overline{U}_2 &= \frac{1}{3}(\overline{U}_{23} - \overline{U}_{12}) \\ \overline{U}_3 &= \frac{1}{3}(\overline{U}_{31} - \overline{U}_{23}) \end{aligned}\right\} \quad (377.2)$$

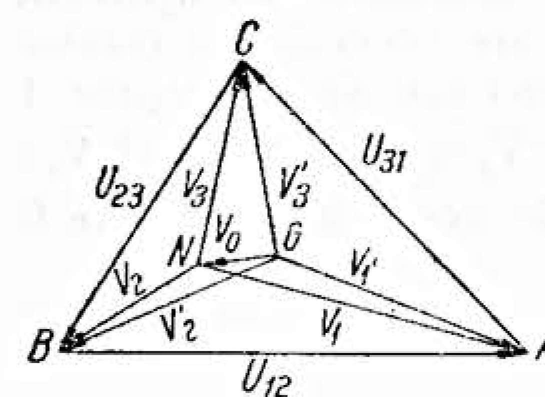


Fig. 167. — Determinarea tensiunilor pe fază când impedanţele sarcinii nu sunt egale.

Dacă cele trei sarcini nu sunt egale, atunci punctul neutru N al sarcinii nu mai coincide cu centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze. Intre aceste două puncte există o tensiune care corespunde deplasării punctului neutru al sarcinii $\overline{V}_0$. Dacă $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sunt tensiunile pe fază, necunoscute, ale sistemului de încărcare nesimetrică, $\overline{V}_1'$, $\overline{V}_2'$, $\overline{V}_2'$, tensiunile pe fază existente în cazul unei încărcări simetrice, $\overline{V}_0$ deplasarea punctului neutru, atunci (fig. 167):

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_1' - \overline{V}_0\,; \quad \overline{V}_2 = \overline{V}_2' - \overline{V}_0\,; \quad \overline{V}_3 = \overline{V}_3' - \overline{V}_0.$$

Tensiunile $\overline{V}'_1$, $\overline{V}'_2$, $\overline{V}'_3$ se determină prin relaţiile (377.2) sau grafic, iar deplasarea punctului neutru prin relaţia

$$V_0 = \frac{\overline{V}'_1 \overline{Y}_1 + \overline{V}'_2 \overline{Y}_2 + \overline{V}'_3 \overline{Y}_3}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3}$$

care se calculează analitic sau grafic.

Teoria coordonatelor simetrice

378. Reprezentarea analitică a unui sistem trifazat. Un sistem trifazat, simetric şi echilibrat, se reprezintă prin trei vectori egali, decalaţi unul faţă de altul cu 120°. Se convine a se defini sensul pozitiv de succesiune a fazelor, sensul mişcării acelor unui ceasornic, sensul de mişcare al vectorilor rămânând acelaşi, adică unghiurile cresc cu timpul în sensul trigonometric.

Dacă se ia ca origine de fază vectorul V_1 de pe faza 1, atunci ceilalţi doi vectori pot fi reprezentaţi prin expresiile analitice

$$\overline{V}_2 = \overline{V}_1\, \varepsilon^{-j\,120°} = \overline{V}_1 \underline{|-120°},$$

$$\overline{V}_3 = \overline{V}_1\, \varepsilon^{-j\,240°} = \overline{V}_1 \underline{|-240°} = \overline{V}_1 \underline{|\,120°},$$

Dacă se notează

$$a = \varepsilon^{j\,120°} = 1 \underline{|\,120°}, \tag{378.1}$$

atunci cei trei vectori ai sistemului trifazat simetric pot fi reprezentaţi prin expresiile analitice

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_1, \\ \overline{V}_2 &= a^2\, \overline{V}_1, \\ \overline{V}_3 &= a \overline{V}_1, \end{aligned}\right\} \tag{378.2}$$

Vectorul $\overline{V}_1$ se numeşte vectorul principal al sistemului.

In cele ce urmează, se vor folosi proprietăţile sistemelor echilibrate, cât şi acelea ale operatorului a, expuse la paragraful asupra sistemului trifazat echilibrat (§ 288).

379. Reprezentarea sistemelor de vectori trifazaţi simetrici cu ajutorul operatorului. *a.* Un sistem de vectori trifazaţi simetrici la care succesiunea fazelor este aceea a acelor unui ceasornic, se numeşte un *sistem direct* sau *de succesiune* 1 sau *de secvenţă* 1. Cei trei vectori ai săi se reprezintă $\overline{V}_1 = \overline{V}_1$; $\overline{V}_2 = a^2\, \overline{V}_1$; $\overline{V}_3 = a\, \overline{V}_1$, $\overline{V}_1$ fiind vectorul principal al sistemului. Simbolic acest sistem poate fi reprezentat prin relaţia

$$S_d(\overline{V}) = (\overline{V}_1,\ a^2\overline{V}_1,\ a\,\overline{V}_1).$$

Dacă sensul de succesiune al vectorilor este invers precedentului, atunci sistemul se numeşte un *sistem invers* sau *de succesiune* 2 sau *de secvenţă* 2. Cei trei vectori ai unui sistem invers se exprimă analitic prin relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_1, \\ \overline{V}_2 &= a\overline{V}_1, \\ \overline{V}_3 &= a^2\overline{V}_1, \end{aligned}\right\} \tag{379.1}$$

sau simbolic prin expresia

$$S_i(\overline{V}) = (\overline{V}_1,\ a\overline{V}_1,\ a^2\overline{V}_1).$$

Un sistem trifazat poate fi format din trei vectori egali însă în fază. Un asemenea sistem se numeşte un *sistem homopolar* sau *de succesiune* ori *secvenţă* 0. Cei trei vectori ai unui asemenea sistem se exprimă analitic prin

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_1, \\ \overline{V}_2 &= \overline{V}_1, \\ \overline{V}_3 &= \overline{V}_1. \end{aligned}\right\} \tag{379.2}$$

Reprezentarea simbolică a acestui sistem de vectori este

$$S_h(\overline{V}) = (\overline{V}_1,\ \overline{V}_1,\ \overline{V}_1).$$

380. Teorema lui Stokvis-Fortescue. Un sistem de vectori trifazat oarecare poate fi descompus în două sisteme de vectori trifazate simetrice de succesiune diferită, unul direct şi altul invers, şi într'un sistem homopolar.

Această descompunere trebue să fie înţeleasă în sensul că un vector oarecare $\overline{V}_n$ al sistemului dat este rezultanta vectorilor de indice n a sistemelor simetrice componente. In virtutea teoremei de mai sus rezultă

$$S = S_h + S_d + S_i$$

şi pentru fiecare vector în parte

$$\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_h + \overline{V}_d + \overline{V}_i \\ \overline{V}_2 &= \overline{V}_h + a^2\overline{V}_d + a\overline{V}_i \\ \overline{V}_3 &= \overline{V}_h + a\overline{V}_d + a^2\overline{V}_i \end{aligned} \tag{380.1}$$

381. Determinarea componentelor simetrice ale unui sistem trifazat dat.

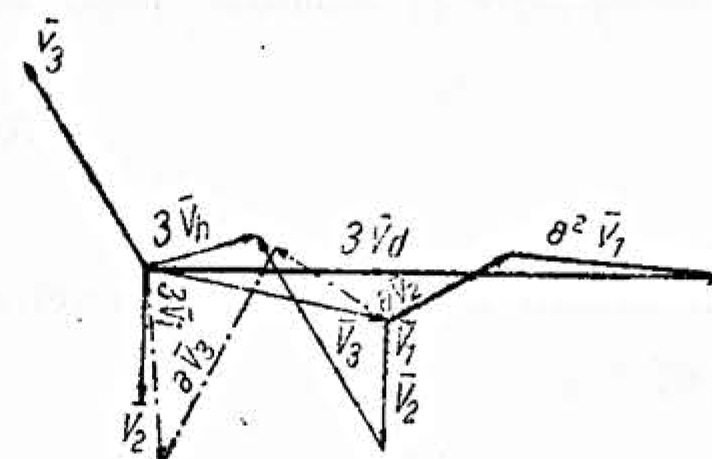


Fig. 168. — Construcţia grafică a componentelor simetrice.

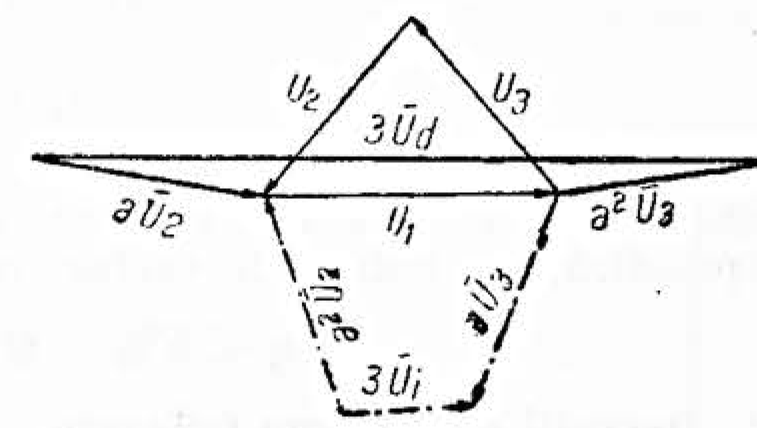


Fig. 169. — Construcţia grafică a componentelor simetrice a unui sistem în triunghi.

α) *Metoda analitică.* Se bazează pe rezolvarea sistemului de ecuaţii (380.1). Se găseşte

$$\begin{aligned} \overline{V}_h &= \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3) \\ \overline{V}_d &= \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + a\overline{V}_2 + a^2\overline{V}_3) \\ \overline{V}_i &= \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + a^2\overline{V}_2 + a\overline{V}_3). \end{aligned} \tag{381.1}$$

β) *Metode grafice.* Se bazează pe construcţia relaţiilor (381.1). Pentru sistemul în stea construcţia este dată în fig. 168.

Pentru sistemul între faze (sistemul în triunghi), construcţia este arătată în fig. 169.

382. **Proprietăţi ale componentelor simetrice.**

α) Două sisteme de vectori trifazaţi oarecare care au aceleaşi vârfuri şi origini diferite, au aceleaşi componente directă şi inversă.

β) Dacă din cele două sisteme de vectori concurenţi unul este pur (nu are componentă homopolară) atunci componenta homopolară a celuilalt sistem este dată în mărime şi direcţie de vectorul care uneşte originea acestui sistem cu originea primului sistem.

γ) Fie un sistem de 3 vectori concurenţi $S_1(\overline{V}) = (\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3)$ (fig. 169) şi sistemul de vectori $S_2(\overline{U}) = (\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3)$ 1) obţinut prin legarea vârfurilor primului sistem. Dacă se ia $\overline{V}_1$ respectiv $\overline{U}_1$ ca vectori principali, atunci

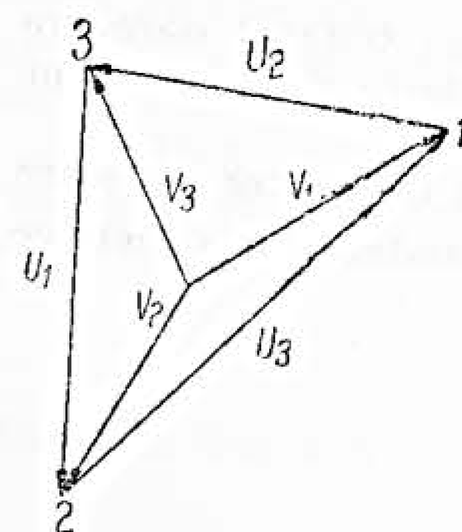


Fig. 170. — Sistemul trifazat $S_1(V)$ şi $S_2(U)$.

$$\left.\begin{aligned}\overline{U}_d &= \sqrt{3}\,\overline{V}_d \angle{-\frac{\pi}{2}},\\ \overline{U}_i &= \sqrt{3}\,\overline{V}_i \angle{\frac{\pi}{2}}\;.\end{aligned}\right\} \tag{382.1}$$

383. **Gradul de desechilibrare al unui sistem de vectori trifazaţi.**

α) *Raportul dintre modulul componentei inverse şi modulul componentei directe*

$$\varepsilon_i = \frac{V_i}{V_d} \tag{383.1}$$

se numeşte *gradul de disimetrie* al unui sistem polifazat de vectori.

β) *Raportul dintre modulul componentei homopolare şi modulul componentei directe*

$$\varepsilon_h = \frac{V_h}{V_d} \tag{383.2}$$

se numeşte *gradul de asimetrie* al unui sistem polifazat de vectori.

In practică, un sistem de vectori poate fi socotit încă simetric atunci când

$$\varepsilon_i \leqslant 5\% \quad \text{şi} \quad \varepsilon_h \leqslant 5\%.$$

384. **Operaţii cu sisteme trifazate.**

α) *Sistemul sumă.* Dacă se dau sistemele de vectori trifazaţi

$$S(\overline{V}') = (\overline{V}'_1, \overline{V}'_2, \overline{V}'_3) \text{ şi } S(\overline{V}'') = (\overline{V}''_1, \overline{V}''_2, \overline{V}''_3),$$

sistemul sumă este sistemul ai cărui vectori sunt suma geometrică a vectorilor de acelaşi indice în sistemele date:

$$S(V) = S(\overline{V}') \pm S(\overline{V}'') = [(\overline{V}'_1 \pm \overline{V}''_1), (\overline{V}'_2 \pm \overline{V}''_2), (\overline{V}'_3 \pm \overline{V}''_3)]. \tag{384.1}$$

Definiţia de mai sus poate fi extinsă la oricâte sisteme. Dacă sistemele sunt simetrice şi de acelaşi ordin, sistemul sumă este simetric şi de acelaşi ordin. El este desechilibrat în caz contrariu.

Componenta simetrică de un ordin oarecare a unor sisteme desechilibrate este egală cu suma componentelor simetrice de acelaşi ordin ale sistemelor date.

β) *Sistemul produs.* Sistemul produs simbolic este sistemul ai cărui vectori

2) In studiul sistemelor echilibrate tensiunile între faze s'au notat $\overline{U}_{12}$, $\overline{U}_{23}$, $\overline{U}_{31}$. Faţă de notaţiile de mai sus rezultă $\overline{U}_1 = \overline{U}_{23}$, $\overline{U}_2 = \overline{U}_{31}$, $\overline{U}_3 = \overline{U}_{12}$.

sunt produsul algebric al cantităţilor complexe ale celor doi vectori de acelaşi indice ai sistemelor de vectori date:

$$S(\overline{V}) = S(\overline{V}') \cdot S(\overline{V}'') = S(\overline{V}' \cdot \overline{V}'') = [(\overline{V}'_1 \cdot \overline{V}''_1), (\overline{V}'_2 \cdot \overline{V}''_2), (\overline{V}'_3 \cdot \overline{V}''_3)] \tag{384.2}$$

Produsul a două sisteme simetrice este un sistem simetric al cărui ordin este egal cu suma algebrică a ordinelor celor două simetrice. Vom avea

$$\left.\begin{aligned}S_d(V') \cdot S_d(V'') &= S_i(V' \cdot V''),\\ S_i(V') \cdot S_i(V'') &= S_d(V' \cdot V''),\\ S_h(V') \cdot S_h(V'') &= S_h(V' \cdot V''),\\ S_d(V') \cdot S_i(V'') &= S_h(V' \cdot V''),\\ S_i(V') \cdot S_d(V'') &= S_h(V' \cdot V''),\\ S_d(V') \cdot S_h(V'') &= S_d(V' \cdot V''),\\ S_h(V') \cdot S_d(V'') &= S_d(V' \cdot V''),\\ S_i(V') \cdot S_h(V'') &= S_i(V' \cdot V''),\\ S_h(V') \cdot S_i(V'') &= S_i(V' \cdot V'').\end{aligned}\right\} \tag{384.3}$$

In cazul când cele două sisteme $S(V')$ şi $S(V'')$ nu sunt simetrice, dacă $S_h(V')$, $S_h(V'')$, ... sunt componentele simetrice ale celor două sisteme, atunci componentele simetrice ale sistemului produs vor fi

$$\left.\begin{aligned}S_d(V' \cdot V'') &= S_d(V') \cdot S_h(V'') + S_i(V') \cdot S_i(V'') + S_h(V') \cdot S_d(V''),\\ S_i(V' \cdot V'') &= S_d(V') \cdot S_d(V'') + S_i(V') \cdot S_h(V'') + S_h(V') \cdot S_i(V''),\\ S_h(V' \cdot V'') &= S_d(V') \cdot S_i(V'') + S_i(V') \cdot S_d(V'') + S_h(V') \cdot S_h(V''),\end{aligned}\right\} \tag{384.4}$$

γ) *Sistemul cât.* Sistemul cât simbolic este sistemul ai cărui vectori sunt câtul vectorilor de acelaşi indice a sistemelor de vectori date:

$$S(V) = \frac{S(V')}{S(V'')} = S\left(\frac{V'}{V''}\right) = \left[\left(\frac{\overline{V}'_1}{\overline{V}''_1}\right), \left(\frac{\overline{V}'_2}{\overline{V}''_2}\right), \left(\frac{\overline{V}'_3}{\overline{V}''_3}\right)\right] \tag{368.5}$$

Cazul cel mai important este acela în care cele două sisteme sunt de acelaşi ordin; în acest caz sistemul cât este homopolar.

δ) *Sisteme de vectori conjugaţi.* Descompunerea în componente simetrice a două sisteme conjugate, fiecărui sistem simetric al primului sistem îi corespunde un sistem simetric conjugat în care a fost descompus al doilea sistem.

385. **Legile lui Kirchhoff în sistemul desechilibrat.** Dacă la bornele unei reţele geometric echilibrate se aplică un sistem de forţe electromotoare de o anumită succesiune, va rezulta o circulaţie de curenţi trifazaţi de aceeaşi succesiune şi tensiunile dealungul reţelei vor constitui deasemenea un sistem trifazat echilibrat de aceeaşi succesiune.

Astfel într'un sistem geometric echilibrat componentele directă, inversă şi homopolară constitue sisteme independente: la fiecare din aceste sisteme se

pot aplica legile lui Kirchhoff generalizate, considerând pentru fiecare în parte numai circuitul simplu format dintr'o fază şi conductorul neutru.

Se numeşte *impedanţa directă* a reţelei impedanţa efectivă pe fază oferită trecerii curenţilor *sistemului direct*. In acelaşi mod se defineşte *impedanţa inversă* şi *impedanţa homopolară*.

Se pot scrie deci următoarele relaţii

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_d &= \overline{U}_d + \overline{Z}_d \overline{I}_d \\ \overline{E}_i &= \overline{U}_i + \overline{Z}_i \overline{I}_i \\ \overline{E}_h &+ \overline{U}_h + \overline{Z}_h \overline{I}_h \end{aligned}\right\} \tag{385.1}$$

In ceeace priveşte aceste impedanţe, se observă următoarele:

— Toate elementele care nu comportă părţi rotative şi ale căror faze sunt echilibrate din punct de vedere geometric, prezintă curentului o impedanţă care nu depinde de succesiunea fazelor tensiunilor aplicată la borne; pentru toate aceste elemente (transformatoare, linii, etc), impedanţa directă $\overline{Z}_d$ este identică cu impedanţa inversă $\overline{Z}_i$.

Maşinile rotative prezintă în general impedanţe directă şi inversă diferite.

— Impedanţa homopolară $\overline{Z}_h$ nu are o valoare finită decât dacă există un conductor neutru; în caz contrariu, această impedanţă este infinită.

Dacă $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$ sunt impedanţele celor trei faze ale sistemului considerat, se definesc următoarele *impedanţe de calcul*:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{Z}}_h &= \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3\right) \\ \overline{\mathfrak{Z}}_d &= \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_1 + a\,\overline{Z}_2 + a^2\,\overline{Z}_3\right) \\ \overline{\mathfrak{Z}}_i &= \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_1 + a^2\,\overline{Z}_2 + a\,\overline{Z}_3\right) \end{aligned}\right\} \tag{385.2}$$

Cu aceste elemente, se poate aplica legea lui Ohm scrisă sub forma

$$S(V) = S(\mathfrak{Z} \cdot I) = S(\mathfrak{Z}) \cdot S(I). \tag{385.3}$$

386. **Calculul circuitelor trifazate desechilibrate cu ajutorul componentelor simetrice.** Problema generală se enunţă astfel: fiind dată o reţea trifazată la care se cunosc impedanţele şi tensiunile la borne, se cere distribuţia curenţilor şi tensiunile pe fază.

Două cazuri se pot prezenta: α) reţeaua nu are fir neutru; β) reţeaua are fir neutru.

α) *Reţeaua nu are fir neutru.* In acest caz

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0 \quad \text{şi deci} \quad \overline{I}_h = 0$$

Relaţia (385.3) aplicată sistemului dă

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_h &= \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_i, \\ \overline{V}_d &= \overline{\mathfrak{Z}}_h\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_i, \\ \overline{V}_i &= \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_h\,\overline{I}_i\,; \end{aligned}\right\} \tag{386.1}$$

din ultimele două ecuaţii, ţinând seama de relaţiile (382.1) se deduc valorile componentelor simetrice ale curentului sub forma

$$\left.\begin{aligned} \overline{I}_d &= \frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{V}_d\,\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{V}_i\,\overline{\mathfrak{Z}}_i}{\overline{\mathfrak{Z}}_h^2 - \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{\mathfrak{Z}}_i}, \\ \overline{I}_i &= -\frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{V}_i\,\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{V}_d\,\overline{\mathfrak{Z}}_d}{\overline{\mathfrak{Z}}_h^2 - \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{\mathfrak{Z}}_i}. \end{aligned}\right\} \tag{386.2}$$

Cunoscând componentele simetrice ale curenţilor, cu ajutorul relaţiilor (380.1) se găsesc curenţii pe faze, iar cu prima ecuaţie din (386.1) se găseşte componenta homopolară a tensiunii şi se poate calcula astfel tensiunile pe faze.

β) *Reţeaua are fir neutru.* Fie $\overline{E}_h$, $\overline{E}_d$, $\overline{E}_i$, componentele simetrice ale forţelor electromotoare induse în fazele alternatorului, presupus disimetric, $\overline{Z}_0$, $\overline{Z}_s$, $\overline{Z}_a$, impedanţele homopolară, directă (sincronă) şi inversă (asincronă) a alternatorului, $\overline{\mathfrak{Z}}_h$, $\overline{\mathfrak{Z}}_d$, $\overline{\mathfrak{Z}}_i$ impedanţele de calcul ale liniei şi sarcinii, $\overline{Z}_N$ impedanţa firului neutru, $\overline{I}_h$, $\overline{I}_d$, $\overline{I}_i$ componentele simetrice ale celor trei curenţi pe faze, $\overline{V}_N$ căderea de tensiune pe firul neutru, deoarece

$$\overline{V}_N = \overline{Z}_N\left(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3\right) = 3\overline{Z}_N\,\overline{I}_h,$$

ecuaţiile generale ale sistemului sunt

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_h &= \left(\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z}_0 + 3\,\overline{Z}_N\right)\overline{I}_h + \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_i \\ \overline{E}_d &= \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_h + \left(\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z}_s\right)\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_i \\ \overline{E}_i &= \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_i + \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_d + \left(\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z}_a\right)\overline{I}_i \end{aligned}\right\} \tag{386.3}$$

care se rezolvă în raport cu $\overline{I}_h$, $\overline{I}_d$, $\overline{I}_i$.

Cunoscând componentele simetrice ale curenţilor, se pot găsi toate elementele necunoscute ale circuitului dat.

In cazul când alternatorul este simetric, $E_h = E_i = 0$.

387. **Puterea în regimul desechilibrat.** In sistemul trifazat, puterea calculată cu cantităţile complexe este dată de expresia

$$\overline{S} = \overline{V}_1\,\overline{I}_{1c} + \overline{V}_2\,\overline{I}_{2c} + \overline{V}_3\,\overline{I}_{3c}. \tag{387.1}$$

Dacă se înlocuesc tensiunile şi curenţii în funcţie de componentele lor simetrice [relaţia (380.1)], se ţine seama că conjugata lui a este a^2 şi al lui a^2 este a, precum şi de relaţia $a^2 + a + 1 = 0$, se găseşte

$$\overline{S} = 3\,\overline{V}_h\,\overline{I}_{hc} + 3\,\overline{V}_d\,\overline{I}_{dc} + 3\,\overline{V}_i\,\overline{I}_{ic} \tag{387.2}$$

sau, cum

$$\overline{S} = P + jQ$$

rezultă

$$\left.\begin{aligned} P &= 3\,V_h\,I_h \cos\varphi_h + 3\,V_d\,I_d \cos\varphi_d + 3\,V_i\,I_i \cos\varphi_i \\ Q &= 3\,V_h\,I_h \sin\varphi_h + 3\,V_d\,I_d \sin\varphi_d + 3\,V_i\,I_i \sin\varphi_i \end{aligned}\right\} \tag{387.3}$$

Observaţii. α) Relaţiile (387.3) pot fi scrise direct prin aplicarea principiului conservării şi separaţiei puterilor aplicate mărimilor scrise în coordonate simetrice.

β) Deasemenea, valoarea puterilor obţinute cu relaţiile (387.3) sunt identice cu acelea ce se obţin cu relaţiile (296.3).

γ) Produsul componentelor de tensiune şi curent, de indici diferiţi (spre exemplu $U_h \cdot I_i$, etc) dau puteri active şi reactive nule.

δ) Desechilibrul unui sistem trifazat poate fi caracterizat şi prin expresia

$$P_n = \sqrt{\sum_{\substack{m,n=A,B,C \\ m\neq n}} [U_{m0}^2 I_n^2 + U_{n0}^2 I_n^2 - 2U_{m0} U_{n0} I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n) + \sum_{m=A,B,C} U_{m0}^2 I_{Hnp}^2}$$

în care:

U_{m0} reprezintă tensiunea pe fază;

I_n reprezintă curentul pe fază;

$I_{Hnp}^2 = \frac{r_H}{r} I_H^2$;

I_H curentul din conductorul neutru;

r_H — rezistenţa acestui conductor;

r — rezistenţa conductorilor fazelor presupuşi identici.

(V. S. Lurie, Electricestvo 1/1951, p. 47).

V. Regimul tranzitoriu

388. **Generalităţi.** Regimul permanent sau staţionar, în care funcţionează un circuit electric oarecare, nu se stabileşte instantaneu atunci când se introduce în circuit o forţă electromotoare oarecare sau se produce o variaţie bruscă a sarcinii. Intre momentul schimbării condiţiilor de funcţionare ale circuitului şi momentul în care se poate spune că în circuit s'a stabilit regimul permanent, se va scurge un anumit timp în care regimul se va *adapta* dela situaţia iniţială la situaţia finală. Acest regim de adaptare se numeşte *regimul tranzitoriu* al sistemului.

Regimul tranzitoriu mai poate apărea şi atunci când se aplică unui sistem o forţă electromotoare efemeră care dispare mai înainte ca regimul permanent să se fi stabilit. Fenomenele electrice sunt, în acest caz, prin natura lor, excluziv tranzitorii.

Adaptarea unui regim electric oarecare la un alt regim bine definit, necesită modificarea regimului unei energii, localizată în anumite părţi ale unui circuit, sub forma de energie electrostatică şi de energie electromagnetică şi, în consecinţă, transferul şi transformarea acestei energii.

In unele cazuri, se poate neglija una din aceste forme de energie faţă de cealaltă. In aceste cazuri, fenomenele tranzitorii sunt foarte simple.

In alte cazuri, aceasta nu mai este posibil şi fenomenele tranzitorii se traduc prin oscilaţii de curent şi de tensiune datorite transformării succesive ale energiei sub formă electrică sau magnetică.

In cazul particular, când se poate admite că inductanţa şi capacitatea sunt constante, regimul tranzitoriu se obţine din suprapunerea peste curentul staţionar, a cărui formă este impusă de tensiunea aplicată sistemului, a unui curent variabil, a cărui formă nu este impusă de nimic şi a căror valori extreme sunt date de situaţia iniţială şi finală a circuitului. Forma acestui curent depinde de constantele fizice ale circuitului, (rezistenţa, inductanţa şi capacitatea lui).

Curentul staţionar se mai numeşte şi *curentul forţat*, iar regimul respectiv, *regimul forţat*, şi, curentul variabil se numeşte *curentul liber* iar regimul respectiv, *regimul liber*.

Legile lui Kirchhoff, aplicate fiecărui element de reţea, dau o ecuaţie liniară între tensiunea aplicată sistemului şi valoarea curentului, a derivatei sale şi a integralei sale sub forma

$$u = \varphi\left(i, \frac{di}{dt}, \int i dt\right). \tag{388.1}$$

Ecuaţia aceasta fiind liniară şi cu coeficienţi constanţi, conform celor ce preced, curentul i poate fi pus sub forma sumei a doi curenţi

$$i = i_p + i_l, \tag{388.2}$$

în care i_p este curentul permanent şi i_l este curentul liber.

Relaţia (388.1) devine

$$u = \varphi\left(i_p, \frac{di_p}{dt}, \int i_p dt\right) + \varphi\left(i_l, \frac{di_l}{dt}, \int i_l dt\right). \tag{388.3}$$

Curentul staţionar sau forţat fiind dat de ecuaţia

$$u = \varphi\left(i_p, \frac{di_p}{dt}, \int i_p dt\right),$$

rezultă că, curentul liber va fi dat de ecuaţia

$$\varphi\left(i_l, \frac{di_l}{dt}, \int i_l dt\right) = 0.$$

a) Regimul tranzitoriu al sistemelor în care se ţine seama numai de o singură formă a energiei

389. **Circuit format din o rezistenţă şi o inductanţă în serie. Expresia generală a curentului** (fig. 171). Ecuaţia diferenţială de funcţionare a acestui circuit este

$$Ri + L\frac{di}{dt} = e \tag{389.1}$$

a cărui soluţie este de forma (388.2). Dacă se notează cu i_0 valoarea curentului în circuit la timpul $t = 0$, şi i_{p0} valoarea curentului permanent la acelaşi timp, atunci expresia curentului tranzitoriu este dată de relaţia

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0})\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \tag{389.3}$$

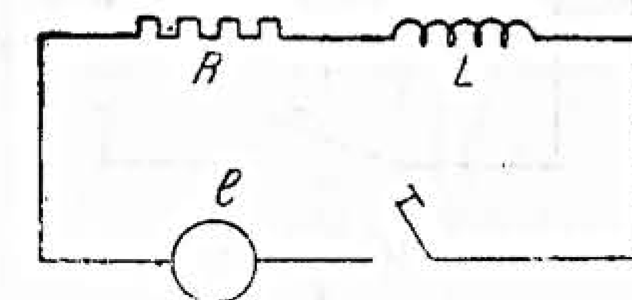


Fig. 171. — Circuit cu R şi L.

în care ε este baza logaritmilor neperieni şi i_p curentul în regimul permanent.

Cu ajutorul relaţiei (389.3) se poate rezolva orice problemă de regim tranzitoriu în acest caz.

In expresia (389.3), mărimea $\left(\frac{L}{R}\right)$ se numeşte *constanta de timp* a circuitului. Inversul acestei mărimi se numeşte *factorul de atenuare* a circuitului.

390. Aplicaţii.

α) *Scurt-circuit la bornele unui circuit cu R şi L alimentat de o forţă electromotoare constantă E.* In acest caz,

$$i_0 = \frac{E}{R}\ , \quad i_p = 0\ , \quad i_{p0} = 0,$$

şi relaţia (389.3) dă imediat

$$i = \frac{E}{R}\, \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

β) *Inchiderea unui circuit cu L şi R pe o forţă electromotoare constantă.* In acest caz,

$$i_0 = 0\ , \quad i_p = \frac{E}{R}\ , \quad i_{p0} = \frac{E}{R},$$

de unde, cu ajutorul relaţiei (389.3) se deduce

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

γ) *Inchiderea unui circuit inductiv pe o forţă electromotoare alternativă.* Dacă forţa electromotoare care alimentează circuitul este

$$e = E\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \psi)$$

atunci

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi)$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

Se găseşte apoi, la $t = 0$

$$i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\sin(\psi - \varphi) \text{ şi } i_0 = 0$$

de unde expresia căutată a curentului

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi)\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right]. \qquad (390.1)$$

Valoarea maximă a acestui curent se obţine pentru $\psi = 0$ sau $\psi = \pi$. Aceasta se deduce dacă se calculează maximul expresiei (390.1) la timpul $t = 0$. Valoarea maximă a curentului este

$$i_{max} = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\left[1 + \sin\varphi\,\varepsilon^{-\frac{R}{\omega L}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}\right].$$

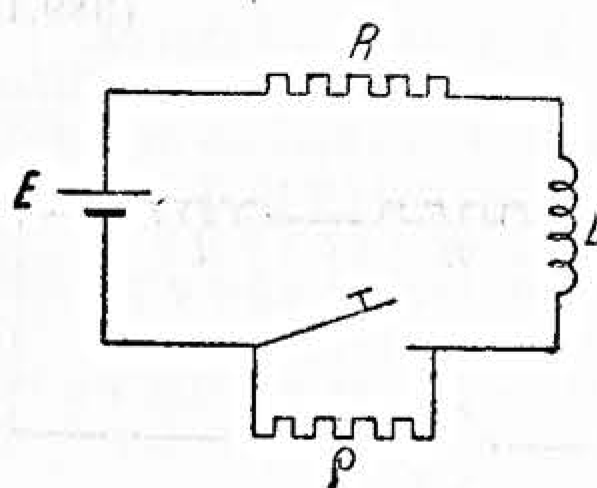


Fig. 172. – Deschiderea unui circuit cu L şi R.

δ) *Deschiderea unui circuit inductiv alimentat de o forţă electromotoare constantă* (fig. 172). Dacă ρ este rezistenţa arcului ce ia naştere la bornele cuţitului întrerupătorului, atunci

$$i_0 = \frac{E}{R}\ , \quad i_p = \frac{R}{E + \rho} \quad \text{şi} \quad i_{p0} = \frac{E}{R + \rho}$$

iar constanta de timp a circuitului este

$$\tau = \frac{L}{R + \rho},$$

de unde, cu ajutorul relaţiei (389.3) se găseşte

$$i = \frac{E}{R + \rho}\left(1 + \frac{R}{\rho}\,\varepsilon^{-\frac{R+\rho}{L}t}\right).$$

Tensiunea la cuţitele întrerupătorului este dată de relaţia

$$u_i = \rho i = \frac{E\rho}{R + \rho}\left(1 + \frac{\rho}{R}\,\varepsilon^{-\frac{R+\rho}{L}t}\right).$$

ε) *Deschiderea unui circuit-inductiv alimentat de o forţă electromotoare alternativă.* Fie

$$e = E\sqrt{2}\,\cos(\omega t + \psi)$$

forţa electromotoare care alimentează circuitul. Dacă se presupune $L\omega \gg R$, atunci curentul în circuit este

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega}\sin(\omega t + \psi)$$

de unde rezultă

$$i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{L}\,\omega\,\sin\psi.$$

După deschiderea circuitului, ρ fiind rezistenţa arcului, curentul permanent în circuit este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

în care

$$Z = \sqrt{\rho^2 + L^2\omega^2} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{L\omega}{\rho},$$

şi deci

$$i_{p_0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\psi - \varphi).$$

Constanta de timp a circuitului fiind

$$\tau = \frac{L}{\rho}$$

curentul tranzitoriu este

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z}\cos(\omega t + \psi - \varphi) + E\sqrt{2}\left[\frac{\sin\psi}{L\omega} - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{Z}\right]\varepsilon^{-\frac{\rho}{L}t} =$$

$$= \frac{E\sqrt{2}}{Z}(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{E\sqrt{2}}{\rho}\sin(\psi - \varphi)\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\varepsilon^{-\frac{\rho}{L}t}.$$

Tensiunea la bornele cuţitului întrerupătorului este

$$u = \rho i.$$

Se vede că, termenul tranzitoriu, atât al curentului cât şi al tensiunii dispare dacă $\psi = \varphi$.

391. Circuit format dintr'un condensator în serie cu o rezistenţă. Expresia generală a curentului în circuit şi a tensiunii la bornele condensatorului (fig. 173). Ecuaţia de funcţionare a acestui circuit este

$$e = Ri + \frac{q}{C}, \qquad (391.1)$$

în care q este cantitatea de electricitate cu care s'a încărcat condensatorul şi este dată de relaţia

$$i = \frac{dq}{dt}. \qquad (391.2)$$

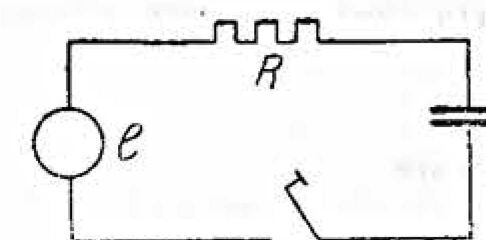


Fig. 173. – Circuit cu R şi C.

Ţinând seama de această relaţie, ecuaţia (391.2) se poate scrie

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e, \qquad (391.3)$$

a cărei soluţie este de aceeaşi formă cu relaţia (389.1). Rezolvând această ecuaţie se obţine

$$q = q_p + (q_0 - q_{p_0})\,\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}, \qquad (391.4)$$

în care s'a notat cu q_p cantitatea de electricitate cu care se încarcă condensatorul în regimul permanent, q_0 cantitatea de electricitate pe care o avea condensatorul la timpul $t=0$ şi q_{p_0} cantitatea de electricitate cu care este încărcat condensatorul în regimul permanent şi corepunzătoare timpului $t = 0$.

Curentul în circuit este dat de relaţia (391.2), iar tensiunea la bornele condesatorului este dată de relaţia

$$u = \frac{q}{C}. \tag{391.5}$$

Produsul RC se numeşte *constanta de timp* a circuitului.

Cu ajutorul relaţiilor (391.2), (391.4) şi (391.5) se rezolvă orice problemă de regim tranzitoriu în circuite cu R şi C.

392. Aplicaţii.

α) *Descărcarea unui condensator printr'o rezistenţă* (fig. 174). In acest caz, presupunând E = const,

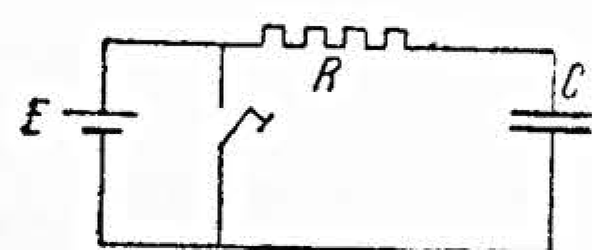


Fig. 174. — Descărcarea unui condensator.

$$q_0 = CE,\ q_p = 0,\ q_{p0} = 0,$$

şi deci

$$q = CE\varepsilon^{-\frac{t}{RC}},$$

$$i = -\frac{E}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{CR}} \text{ şi } u = E\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

β) *Incărcarea unui condensator în curent continuu.* In acest caz

$$q_0 = 0,\ q_p = CE,\ q_{p0} = CE,$$

şi relaţiile generale dau

$$q = CE\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

$$i = \frac{E}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{RC}},\quad u = E\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

γ) *Incărcarea unui condensator în curent alternativ.* Fie

$$e = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi)$$

forţa electromotoare alternativă aplicată circuitului. Curentul permanent este

$$i_p = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi + \varphi)$$

în care

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \text{ şi } \operatorname{tg}\omega = \frac{1}{RC\omega}.$$

Rezultă

$$q_p = \int_0^t i_p \mathrm{d}t = Q\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi + \varphi)$$

în care s'a pus $Q = I/\omega$. Se găseşte apoi

$$q_0 = 0 \text{ şi } q_{p0} = Q\sqrt{2}\sin(\psi + \varphi)$$

şi regimul de încărcare al condensatorului este dat de relaţia

$$q = Q\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi + \varphi) - Q\sqrt{2}\sin(\psi + \varphi)\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

iar curentul de încărcare

$$i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi + \varphi) + \frac{I\sqrt{2}}{RC\omega}\sin(\psi + \varphi)\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

La timpul $t = 0$, curentul este $i_0 = \frac{R}{E}\cos\psi$, a cărui valoare maximă este $i_{0\,(max)} = \frac{E}{R}$.

Se vede că acest curent este limitat numai de rezistenţa circuitului.

b) Regimul tranzitoriu al sistemelor electrice în care se ţine seama de ambele forme de energie

393. Generalităţi. Fie un circuit format din o rezistenţă R legată în serie cu o capacitate C, alimentat cu o forţă electromotoare e oarecare (fig. 175).

Problema care se pune este găsirea legii generale de stabilire a curentului i în circuit şi a tensiunii u la bornele condensatorului atunci când se schimbă condiţiile de funcţionare ale circuitului.

A doua lege a lui Kirchhoff aplicată circuitului dă

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}t = e. \tag{393.1}$$

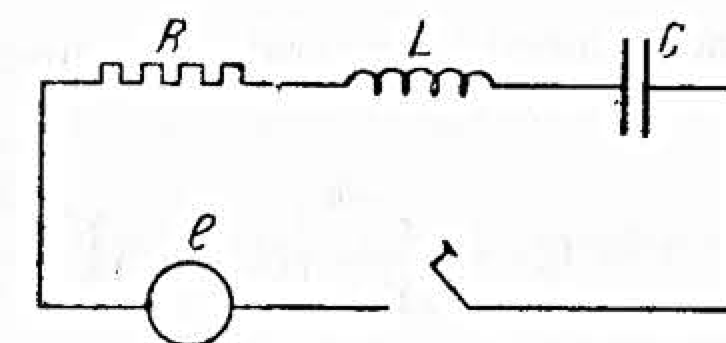


Fig. 175. — Circuit serie cu RLC.

Ţinând seama de relaţiile

$$\mathrm{d}q = i\mathrm{d}t \quad \text{şi} \quad Cu = q$$

se obţine ecuaţia care dă tensiunea la bornele condensatorului

$$CL\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + CR\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e. \tag{393.2}$$

Soluţiile acestor ecuaţii liniare şi cu coeficienţi constanţi se compun din doi termeni, unul corespunzând regimului forţat sau permanent şi unul corepunzând regimului liber. Rezultă astfel

$$i = i_p + i_l \quad \text{şi} \quad u = u_p + u_l \tag{393.3}$$

în care

$$i_p = \mathrm{f}(e) \quad \text{şi} \quad u_p = \varphi(e).$$

394. Expresia generală a curentului şi tensiunii în un circuit serie cu R, L, C, supus unui regim tranzitoriu. Punând în ecuaţia (393.1) fără membrul doi

$$\mathrm{d}q = i\mathrm{d}t$$

se obţine

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0 \tag{394.1}$$

a cărei soluţie este

$$q_e = A\varepsilon^{r_1t} + B\varepsilon^{r_2t}, \tag{394.2}$$

în care r_1 şi r_2 sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice, iar A şi B constante de integrare ce se determină prin condiţiile iniţiale.

Expresia curentului se obţine derivând relaţia (394.2) în raport cu timpul

$$i_l = r_1 A\varepsilon^{r_1 t} + r_2 B\varepsilon^{r_2 t}. \qquad (394.3)$$

Impărţind relaţia (394.2) cu C se obţine expresia tensiunii u, adică soluţia generală a ecuaţiei (393.2).

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice fiind

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}, \qquad (394.4)$$

dacă se pune

$$\frac{R}{2L} = \delta, \quad \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} = \Omega'$$

şi

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\Omega'}{\delta}.$$

atunci expresiile generale ale curenţilor în circuit şi ale tensiunii la bornele condensatorului sunt

$$\left.\begin{aligned} i &= i_p - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega' L}\left[(i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\,\operatorname{sh}(\Omega' t - \alpha') + (u_0 - u_{p0})\operatorname{sh}\Omega' t\right] \\ u &= u_p + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega'\sqrt{CL}}\left[(u_0 - u_{p0})\operatorname{sh}(\Omega' t + \alpha') + (i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\,\operatorname{sh}\Omega' t\right] \end{aligned}\right\} \qquad (394.5)$$

în care i_p, u_p, i_0, u_0, i_{p0} şi u_{p0} au aceleaşi semnificaţii ca şi în cazurile studiate anterior.

Trei cazuri se pot prezenta, în funcţie de constantele circuitului.

Cazul I. $\Omega'^2 > 0$. In acest caz rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi diferite. Curentul în circuit şi tensiunea la borne sunt date de relaţiile (394.5). Regimul se zice că este *aperiodic*.

Cazul II. $\Omega'^2 < 0$. In acest caz rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt imaginare şi conjugate. Punând $\Omega' = j\Omega$ în care $j = \sqrt{-1}$, ecuaţiile (394.5) devin

$$\left.\begin{aligned} i &= i_p - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L}\left[(i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\sin(\Omega t - \alpha) + (u_0 - u_{p0})\sin\Omega t\right] \\ u &= u_p + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega\sqrt{LC}}\left[(u_0 - u_{p0})\sin(\Omega t + \alpha) + (i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\Omega t\right] \end{aligned}\right\} \qquad (394.6)$$

în care

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Omega}{\delta}.$$

Regimul se zice că este *oscilant*, Ω fiind *pseudo-pulsaţia* şi $T = 2\pi/\Omega$ fiind *pseudo-perioada* sau *perioada proprie a circuitului*. Expresia

$$\gamma = \ln\frac{Y_{11}}{Y_{12}} = \delta\, T, \qquad (394.7)$$

în care Y_{11} şi Y_{12} sunt două amplitudini de acelaşi sens diferind printr'o pseudo-perioadă, se numeşte *decrementul logaritmic al oscilaţiilor*.

Cazul III. $\Omega'^2 = 0$. Acest caz se numeşte şi *cazul critic*. Expresiile curentului şi tensiunii sunt:

$$\left.\begin{aligned} i &= i_p - \varepsilon^{-\delta t}\left[-(i_0 - i_{p0}) + \left(\frac{i_0 - i_{p0}}{\sqrt{CL}} + \frac{u_0 - u_{p0}}{L}\right)t\right] \\ u &= u_p + \varepsilon^{-\delta t}\left[(u_0 - u_{p0}) + \left(\frac{u_0 - u_{p0}}{\sqrt{CL}} + \frac{i_0 - i_{p0}}{C}\right)t\right] \end{aligned}\right\} \qquad (394.8)$$

Cunoscând sau stabilind condiţiile iniţiale şi finale de funcţionare ale circuitului şi aplicând una din grupele de relaţii (394.5), (394,6) sau (394.8) după natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice (394.4), se vor găsi expresia curentului în circuit şi tensiunea la bornele condensatorului în orice regim tranzitoriu de studiat. Regimul de încărcare al condensatorului se deduce din relaţia $q = Cu$.

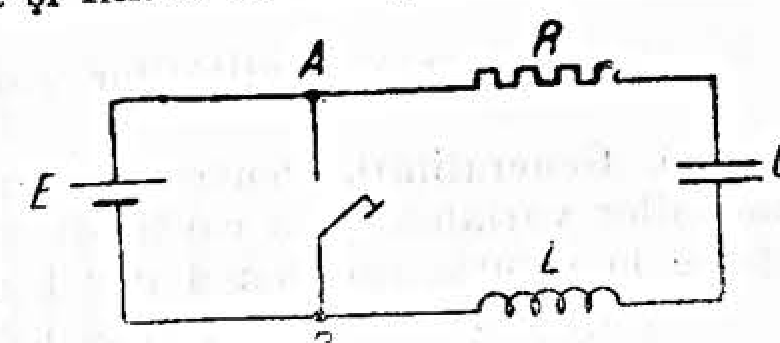


Fig. 176. — Descărcarea unui condensator în un circuit cu R şi L.

395. Aplicaţii

α) *Descărcarea unui condensator în un circuit format din o rezistenţă şi o inductanţă în serie* (fig. 176). Se presupune că forţa electromotoare care alimentează circuitul este constantă; în acest caz

$$i_0 = 0 \quad , \quad u_0 = E$$

şi după închiderea întrerupătorului

$$i_p = 0 \quad , \quad u_p = 0,$$

$$i_{p0} = 0 \quad , \quad u_{p0} = 0.$$

Dacă se presupune, spre exemplu, că circuitul este aperiodic, atunci relaţiile (394.5) dau imediat soluţiile problemei

$$i = -\,\varepsilon^{-\delta t}\frac{E}{\Omega' L}\operatorname{sh}\Omega' t,$$

$$u' = \varepsilon^{-\delta t}\frac{E}{\Omega'\sqrt{CL}}\operatorname{sh}(\Omega' t + \alpha'),$$

$$q = Cu = \varepsilon^{-\delta t}\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\frac{E}{\Omega'}\operatorname{sh}(\Omega' t + \alpha').$$

β) *Inchiderea unui circuit cu R, L, C, în serie alimentat de o forţă electromotoare constantă.* Se presupune că circuitul este oscilant. Se aplică relaţiile (394.6). In acest caz

$$i_0 = 0 \quad , \quad u_0 = 0,$$

şi după închiderea circuitului

$$i_p = 0 \quad , \quad u_p = E,$$

şi

$$i_{p0} = 0 \quad , \quad u_{p0} = E;$$

regimul tranzitoriu este dat de relaţiile

$$i = \frac{E}{\Omega L} \sin \Omega t,$$

$$u = E\left[1 - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega \sqrt{CL}} \sin(\Omega t + \alpha)\right],$$

$$q = Cu = CE\left[1 - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega \sqrt{CL}} \sin(\Omega t + \alpha)\right].$$

c) Aplicarea cantităţilor complexe la studiul regimului tranzitoriu

396. Generalităţi. Pentru studiul regimului liber se poate folosi reprezentarea mărimilor variabile prin cantităţi complexe, metodă care poate conduce mult mai repede la soluţia problemei decât metodele obişnuite.

Studiul unui regim tranzitoriu constă în următoarele:

— Determinarea regimului liber, care constă în găsirea frecvenţei proprii a circuitului şi amortisarea. Regimul se determină în funcţie de nişte coeficienţi nedeterminaţi.

— Determinarea regimului forţat.

— Suprapunerea celor două regimuri şi determinarea diverşilor coeficienţi prin condiţii de limită.

Curentul sau tensiunea unui circuit, căruia i se pot aplica legile lui Ohm şi Kirchhoff, poate fi întotdeauna exprimat printr'un termen exponenţial, sau prin o sumă de asemenea termeni, cu exponent real sau imaginar, şi deci prin o funcţie sau o sumă de funcţii de forma

$$i = I\,\varepsilon^{-\delta t} \cos(\Omega t + \psi), \tag{396.1}$$

în care I şi ψ sunt constante ce urmează a fi determinate din condiţiile de funcţionare ale circuitului.

Dacă δ şi Ω sunt simultani nuli avem a face cu un curent continuu.
Dacă $\Omega = 0$ şi $\delta \neq 0$, avem a face cu un curent aperiodic.
Dacă $\Omega \neq 0$ şi $\delta = 0$, avem a face cu un curent sinusoidal.
Dacă $\Omega \neq 0$ şi $\delta \neq 0$, avem a face cu un curent sinusoidal amortisat.

O cantitate periodică, de amplitudine constantă, $i = I \cos(\Omega t + \psi)$, poate fi reprezentată prin expresia complexă

$$\overline{I} = I\,\varepsilon^{j(\Omega t + \psi)} = I \underline{|\,\Omega t + \psi}.$$

Funcţia (396.1) poate fi scrisă deci

$$\overline{I} = I\varepsilon^{-\delta t}\,\varepsilon^{j(\Omega t+\psi)} = I\varepsilon^{\overline{p}t + j\psi} \tag{396.2}$$

în care s'a pus

$$\overline{p} = -\delta + j\,\Omega, \tag{396.3}$$

δ şi Ω fiind cantităţile reale.

397. Legea lui Ohm generalizată aplicată curenţilor tranzitorii. Dacă se consideră un circuit format din o rezistenţă R în serie cu inductanţa L şi străbătută de curentul

$$\overline{I} = I\varepsilon^{\overline{p}t + j\psi}$$

tensiunea la bornele circuitului este

$$\overline{U} = R\overline{I} + L\frac{d\overline{I}}{dt} = \overline{I}\,(R + \overline{p}L) = \overline{I}\,\overline{Z} \tag{397.1}$$

în care Z este impedanţa generalizată, având modulul

$$Z = \sqrt{(R - \delta L)^2 + L^2\Omega^2}$$

şi argumentul

$$\gamma = \mathrm{arctg}\,\frac{L\Omega}{R - \delta L}.$$

In cazul unui circuit format din un condensator C şuntat cu o conductanţă G şi căruia i se aplică tensiunea $\overline{U}$ la borne, curentul din circuit este

$$\overline{I} = (G + \overline{p}\,C)\,\overline{U} = \overline{Y}\,\overline{U} \tag{397.2}$$

în care $\overline{Y}$ este admitanţa generalizată a circuitului, având modulul

$$Y = \sqrt{(G - \delta\,C)^2 + C^2\Omega^2}$$

şi argumentul

$$\chi = \mathrm{arctg}\,\frac{C\Omega}{G - \delta C}.$$

In cazul a două circuite cuplate prin o inductanţă mutuală M, forţa electromotoare indusă de unul din circuite, străbătut de curentul tranzitoriu $\overline{I}$, în cel de al doilea este

$$\overline{E} = \overline{M}\,\overline{p}\,\overline{I}. \tag{397.3}$$

Impedanţa mutuală generalizată a circuitului este $\overline{M}\,\overline{p}$, cu modulul

$$M\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$$

şi cu argumentul

$$\mu = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\Omega}{\delta}\right).$$

398. Trecerea dela ecuaţiile în numere complexe la ecuaţiile diferenţiale şi la valorile instantanee şi invers. Metode de calcul. Rezolvarea unei probleme de regim tranzitoriu comportă două etape: α) punerea în ecuaţie; β) rezolvarea ecuaţiei respective.

α) Pentru punerea în ecuaţie a problemelor de regim tranzitoriu se foloseşte metoda directă a aplicării legilor lui Kirchhoff circuitelor respective, obţinându-se astfel direct ecuaţia diferenţială a problemei.

In cazul când circuitul este prea complicat, punerea în ecuaţie se face folosindu-se numerele complexe generalizate. Pentru a găsi apoi ecuaţia diferenţială corespunzătoare se procedează astfel: se înlocuesc numerele complexe ale curenţilor şi tensiunilor prin valorile instantanee corespunzătoare; $\overline{p}$ prin simbolul $\frac{d}{dt}$; $\overline{p}^2$ prin simbolul $\frac{d^2}{dt^2}$, etc; $\frac{1}{\overline{p}}$ prin simbolul $\int(\ )\,dt$, etc.

β) Pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ale unui regim tranzitoriu, se foloseşte în general calculul cu numere complexe, înlocuindu-se în sens invers

simbolurile de derivare şi integrare. Asupra ecuaţiei obţinute se fac toate operaţiile *algebrice* corespunzătoare, pentru a fi redusă la forma cea mai simplă posibil.

γ) Se determină apoi parametrii corepunzători ai regimului liber, amortisarea δ şi pulsaţia proprie Ω. Pentru aceasta în ecuaţia *algebrică* se înlocueşte parametrul $\bar{p}$ cu valoarea sa (396.3) şi se identifică părţile reale şi părţile imaginare, obţinându-se un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute δ şi Ω. Sistemul are numai o singură soluţie definită de condiţia ca aceşti doi parametri să fie reali.

399. Aplicaţii.

α) *Circuit serie cu R şi L.* In ecuaţia regimului liber

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0,$$

înlocuind pe i cu $\bar{I}$ şi simbolul $\frac{d}{dt}$ cu $\bar{p}$ se obţine

$$(R + \bar{p}L)\,\bar{I} = 0$$

si cum

$$\bar{I} \neq 0,$$

rezultă

$$R + \bar{p}L = 0$$

şi deci

$$p = -\frac{R}{L}.$$

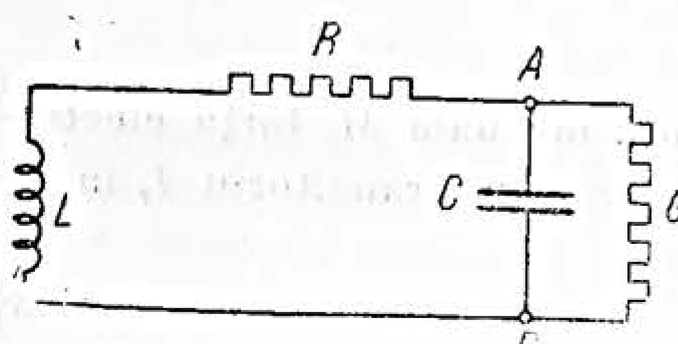


Fig. 177. – Circuit complex.

Ţinând seama de relaţia (396.3) rezultă

$$\delta = \frac{R}{L} \quad \text{şi} \quad \Omega = 0,$$

astfel că expresia curentului liber este

$$i = I\cos\psi\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = A\varepsilon^{-\frac{R}{L}t},$$

expresie cunoscută, A fiind o constantă ce se determină prin condiţii iniţiale.

β) *Circuit cu L şi R în serie cu un condensator C şuntat cu o conductanţă G* (fig. 177). Ecuaţia sistemului se scrie aplicând legea lui Ohm generalizată. Se găseşte

$$\bar{I}(R + \bar{p}L) = \frac{\bar{I}}{G + \bar{p}C}.$$

Cum $I \neq 0$ se obţine

$$(R + \bar{p}L)(G + \bar{p}C) = 1$$

sau

$$\bar{p}^2LC + \bar{p}(RC + GL) + RG + 1 = 0,$$

care conduce la sistemul de ecuaţii

$$\Omega(LG + RC - 2\delta CL) = 0,$$
$$LC\Omega^2 - LC\delta^2 - GR + \delta(CR + GL) = 1,$$

de unde se obţin soluţiile sistemului, cu condiţia suplimentară ca δ şi Ω să fie reale.

d) Studiul regimului tranzitoriu cu ajutorul calculului operaţional. (Transformarea lui Laplace).

400. Generalităţi. In cele ce urmează se presupune cunoscut calculul operaţional (transformarea lui Laplace). Se reamintesc următoarele definiţii: fie o funcţie f (t) de variabilă reală t şi definită pentru t pozitiv şi astfel că:

1. f(t) este integrabilă în tot intervalul finit cuprins între două valori pozitive ale variabilei;

2. Integrala $\int_a^b$ f$(t)\,dt$ tinde către o limită când a tinde către zero;

3. Integrala $\int_0^\infty \varepsilon^{-pt}$ f$(t)\,dt$ există, această integrală fiind limita integralei $\int_a^b \varepsilon^{-pt}$ f$(t)dt$ când a tinde către zero şi b către infinit.

Această integrală este o funcţie de p şi ecuaţia

$$\varphi(p) = \int_0^\infty \varepsilon^{-pt}\,\mathrm{f}(t)\,dt \tag{400.1}$$

constitue transformarea lui Laplace. Ea asociază funcţiei f(t) de variabilă reală t, o funcţie $\varphi(p)$ de variabilă complexă p. Funcţia $\varphi(p)$ se numeşte *imaginea* funcţiei f(t), care se numeşte *originalul* funcţiei $\varphi(p)$.

Ecuaţia (400.1) se mai scrie

$$\varphi(p) = \mathfrak{L}\,\mathrm{f}(t), \tag{400.2}$$

$\mathfrak{L}$ fiind simbolul care arată că $\varphi(p)$ este imaginea funcţiei f(t).

401. Impedanţa operaţională. Fie un circuit format numai din o inductanţă L căruia i se aplică, la timpul $t = 0$, o tensiune u oarecare. Se presupune deasemenea că la momentul iniţial, $i = 0$. Ecuaţia de funcţionare a circuitului este

$$u = L\frac{di}{dt};$$

înmulţind ambii membrii cu ε^{-pt} şi integrând între limitele 0 şi ∞ se obţine

$$\mathfrak{L}u = pL\,\mathfrak{L}i, \tag{401.1}$$

de unde se deduce

$$\mathfrak{L}i = \frac{\mathfrak{L}u}{pL}$$

adică, funcţia imagine a curentului se obţine împărţind funcţia imagine a tensiunii prin pL, care se numeşte *reactanţa inductivă operaţională*.

In acelaşi mod, în cazul unui condensator, în ipoteza $u_{t=0} = 0$ se găseşte

$$\mathfrak{L}i = pC\,\mathfrak{L}u \tag{401.2}$$

In această expresie $1/pC$ se numeşte *reactanţa capacitivă operaţională*.

In cazul unei rezistenţe se scrie imediat

$$\mathfrak{L}u = R\,\mathfrak{L}i. \tag{401.3}$$

Cu aceste rezistenţe şi reactanţe operaţionale se lucrează întocmai ca şi cu rezistenţele şi reactanţele complexe. Se va putea scrie deci simbolic

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} \tag{401.4}$$

astfel, că, în calculul operaţional, legea lui Ohm este

$$\mathfrak{L}u = Z(p).\mathfrak{L}i \tag{401.5}$$

402. Metoda de calcul a regimurilor tranzitorii.

α) Se scrie ecuaţia diferenţială de funcţionare a circuitului, căreia i se aplică apoi transformarea lui Laplace. Se obţine astfel o ecuaţie algebrică în p care se rezolvă în funcţie de mărimea căutată, curentul sau tensiunea, găsindu-se astfel funcţia imagine a mărimii căutate.

β) In cazul când este dificil sau imposibil a se scrie direct ecuaţia diferenţială a circuitului, atunci se scrie relaţia între funcţiile imagine a curentului şi tensiunii şi impedanţele operaţionale, calculându-se sau luându-se din tabele expresia funcţiei imagine a funcţiei date. Ecuaţiile se rezolvă apoi ca mai sus.

γ) După ce s'a determinat funcţia imagine căutată, se determină funcţia original a acesteia, fie direct, cu ajutorul regulilor de calcul operaţional, fie luând din tabele expresia acesteia.

403. Avantajele calculului operaţional faţă de metoda utilizării cantităţilor complexe. In metoda calculului operaţional se obţine direct soluţia completă a problemei, pe când în metoda utilizării cantităţilor complexe se obţine numai soluţia regimului liber, peste care trebue suprapusă soluţia regimului forţat.

404. Aplicaţii

α) *Inchiderea unui circuit format din R, L, C, în serie pe o forţă electromotoare constantă.* Ecuaţia de funcţionare este

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt = E.$$

Aplicând transformarea lui Laplace acestei ecuaţii, în ipoteza că la $t = 0$, $i = 0$, se găseşte

$$R\mathfrak{L}i + pL\mathfrak{L}i + \frac{\mathfrak{L}i}{pC} = \left(R + pL + \frac{1}{pC}\right)\mathfrak{L}i = \mathfrak{L}E = \frac{E}{p},$$

de unde

$$\mathfrak{L}i = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

Calculând direct, sau cu ajutorul tabelelor se găseşte apoi

$$i = \frac{E}{L}\varepsilon^{-\delta t}\,\mathrm{sh}\,\Omega t,$$

în care

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{şi} \quad \Omega = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Discuţia soluţiei se face aşa cum s'a arătat mai înainte (§ 394).

Fig. 178. — Circuit complex.

β) *Inchiderea unui circuit format din o inductanţă L în serie cu un condensator C şuntat cu o rezistenţă R* (fig. 178). Impedanţa operaţională a circuitului se determină uşor şi este

$$Z(p) = pL + \frac{R\cdot\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2LCR + pL + R}{pCR + 1};$$

cum

$$\mathfrak{L}E = \frac{E}{p},$$

aplicând relaţia (401.5) se găseşte imediat

$$\mathfrak{L}i = \frac{\mathfrak{L}E}{Z(p)} = E\frac{pCR + 1}{p(p^2LCR + pL + R)},$$

de unde, calculând direct sau cu ajutorul tabelelor, se găseşte

$$i = \frac{E}{R}\left\{1 - \varepsilon^{-\delta t}\left[\mathrm{ch}\,\Omega t + \left(\frac{\delta}{\Omega} - \frac{R}{\Omega L}\right)\mathrm{sh}\,\Omega t\right]\right\},$$

în care δ şi Ω au semnificaţiile de mai sus. In funcţie de constantele circuitului se fac discuţiile obişnuite.

4. Funcţii corespondente

(Transformarea Laplace)

Nr. crt.	Funcţia originală $f(t)$	Funcţia imagine $\varphi(p)$	Observaţii
1	1	$1/p$	
2	0 pentru $0 \leqslant t \leqslant \alpha$ 1 pentru $t \geqslant \alpha$	$\frac{e^{-\alpha p}}{p}$	
3	t^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha + 1}}$	$\mathfrak{R}_e(\alpha) > -1$
4	t	$1/p^2$	
5	$t^n/n!$	$1/p^{n+1}$	n întreg
6	$1/\sqrt{\pi t}$	$\frac{1}{p}\sqrt{p}$	
7	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$	$1/p\sqrt{p}$	
8	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$	
9	$1/\alpha(1 - \varepsilon^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p + \alpha}\right)$	
10	$1/\alpha(\varepsilon^{\alpha t} - 1)$	$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p - \alpha}\right)$	
11	$t^{\alpha}\varepsilon^{\beta t}$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(p - \beta)^{\alpha + 1}}$	$\mathfrak{R}_e(\alpha) > -1$
12	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{t\sqrt{t}}$	$\varepsilon^{-\alpha\sqrt{p}}$	
13	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\frac{1}{p}\sqrt{p}\,\varepsilon^{-\alpha\sqrt{p}}$	
14	$t\varepsilon^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	

4. Funcţii corespondente *(urmare)*

Nr. crt.	Funcţia originală f (t)	Funcţia imagine φ (p)	Observaţii
15	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^n}$	
16	$\frac{\varepsilon^{-\alpha_1 t}-\varepsilon^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2-\alpha_1}$	$\frac{1}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)}$	
17	shαt	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	
18	chαt	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	
19	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	
20	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$	
21	$\varepsilon^{-\beta t}\cos \alpha t$	$(p+\beta)/[(p+\beta)^2+\alpha^2]$	
22	$\varepsilon^{-\beta t}\sin \alpha t$	$\alpha/[(p+\beta)^2+\alpha^2]$	
23	$\sin(\alpha t \pm \arccos \beta)$	$\frac{\alpha\beta \pm p\sqrt{1-\beta^2}}{p^2+\alpha^2}$	$0 \leqslant \beta \leqslant 1$
24	$t \cos \alpha t$	$(p^2-\alpha^2)/[(p^2+\alpha^2)^2]$	
25	$\frac{t^n}{2^n\, n!\, \alpha}\sin \alpha t$	$\frac{p^n}{(p^2+\alpha^2)^{n+1}}$	n întreg
26	$\frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{\beta^2-\alpha^2}$	$\frac{p}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$	
27	$\frac{1}{2}\alpha t \sin \alpha t$	$\frac{p\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)\alpha}$	
28	$\frac{1}{\alpha^2}(1-\cos \alpha t)$	$\frac{1}{p}\,\frac{1}{p^2+\alpha^2}$	
29	$\frac{(\alpha_2-\alpha_3)\varepsilon^{-\alpha_1 t}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)}+\frac{(\alpha_1-\alpha_3)\varepsilon^{-\alpha_3 t}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)}+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\varepsilon^{-\alpha_3 t}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)}$	$\frac{1}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)(p+\alpha_3)}$	

4. Funcţii corespondente *(urmare)*

Nr. crt.	Funcţia originală f (t)	Funcţia imagine φ (p)	Observaţii
30	$(1-\varepsilon^{-t})/t$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$	
31	$\frac{\cos \alpha\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$	$\frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4p}}}{\sqrt{\pi p}}$	α număr real
32	$\frac{\sin \alpha\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\,p^{3/2}}\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4\pi}}$	idem
33	$\frac{\text{ch}\alpha\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$	$\frac{\varepsilon^{\frac{\alpha^2}{4p}}}{\sqrt{\pi p}}$	
34	$\frac{\text{sh}\alpha\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\,p^{3/2}}\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$	
35	$\frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{\varepsilon^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\alpha \geqslant 0$
36	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\varepsilon^{-\alpha\sqrt{p}}$	
37	$\varepsilon^{-\frac{t^2}{4}}$	$2\varepsilon^{p^2}\int_p^{\infty}\varepsilon^{-\alpha^2}\mathrm{d}x$	
38	Ln (αt)	$\frac{1}{p}\left(\frac{p-\alpha}{p}\right)^n$	$\text{Ln}=\varepsilon^{\alpha t}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{t^n}{n!}\varepsilon^{-\alpha t}\right)$
39	$\varepsilon^{-\alpha t}$ Ln $(2\alpha t)$	$\frac{1}{p+\alpha}\left(\frac{p-\alpha}{p+\alpha}\right)^n$	polinomul lui Laguerre

W. Utilizarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice

405. **Generalităţi.** Utilizarea calculului matricial în studiul circuitelor electrice constă în condensarea într'una sau mai multe relaţii sau ecuaţii matriciale a unei serii de relaţii sau ecuaţii algebrice care leagă între ele diversele mărimi ale unui sistem electric oarecare, având n grade de libertate.

Ţinând seama de proprietăţile calculului matricial, (de descompunere şi compunere şi calculul cu aceste matrice compuse), unul din marile lui avantaje

constă în aceea că se pot studia cu ajutorul lui diverse probleme parţiale care să nu aibă nicio legătură una cu alta; rezultatele obţinute pot fi apoi combinate între ele pentru a obţine astfel soluţia unei noi probleme. Acest lucru poate fi exprimat şi în modul următor: pentru a rezolva o anumită problemă, aceasta se descompune într'o serie de elemente mai simple, care se rezolvă individual. Rezultatele obţinute, judicios combinate, duc la soluţia problemei iniţiale.

Soluţiile parţiale ale unei probleme pot fi folosite eventual şi în rezolvarea unor alte probleme de altă natură.

Calculul matricial duce la o mecanizare a calculelor fenomenelor fizice. Pentru rezolvarea oricărei probleme se urmează întotdeauna aceeaşi cale, în aceeaşi ordine, ajungându-se întotdeauna la un rezultat. Această mecanizare a studiului fenomenelor face însă să se piardă din vedere însuşi fenomenul fizic, care dispare complect din preocupările cercetătorului. Abia la sfârşitul calculului urmează a se face interpretarea fizică a rezultatelor. Avantajele pe care le oferă această metodă de investigaţii o impun din ce în ce mai mult preferinţelor tehncienilor care au de studiat probleme complexe, cu un număr mare de grade de libertate.

406. **Studiul cuadripolului.** Un cuadripol, definit prin parametrii $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ are ecuaţiile cunoscute:

$$\left.\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{A}\,\bar{U}_2 + \bar{B}\,\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \bar{C}\,\bar{U}_2 + \bar{D}\,\bar{I}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (406.1)$$

Presupunând că fiecare pereche de valori $(\bar{U}_1, \bar{I}_1)$ şi $(\bar{U}_2, \bar{I}_2)$ sunt componentele unor vectori într'un spaţiu complex cu două dimensiuni, componente pe care le presupunem raportate la un sistem de axe dreptunghiulare şi notând cu $\bar{E}_1$ vectorul tensiune-curent la intrarea în cuadripol,de componente $(\bar{U}_1, \bar{I}_1)$ şi $\bar{E}_2$ vectorul tensiune-curent la ieşirea din cuadripol, de componente $(\bar{U}_2, \bar{I}_2)$, relaţiile (406.1) se pot scrie sub forma matricială:

$$\| \bar{E}_1 \| = \| \gamma \| \cdot \| \bar{E}_2 \|, \qquad (406.2)$$

în care *):

$$\| \gamma \| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

se numeşte *matricea caracteristică a cuadripolului.*

Rezolvând sistemul (406.1) în raport cu curenţii $\bar{I}$, se obţin relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{Y}_{11}\,\bar{U}_1 + \bar{Y}_{12}\,\bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 &= \bar{Y}_{21}\,\bar{U}_1 + \bar{Y}_{22}\,\bar{U}_2, \end{aligned}\right\}, \qquad (406.3)$$

în care:

$$\bar{Y}_{11} = \bar{D}/\bar{B}\ , \quad \bar{Y}_{12} = -1/\bar{B},$$
$$\bar{Y}_{21} = 1/\bar{B}\ , \quad \bar{Y}_{22} = -\bar{A}/\bar{B},$$

In aceleaşi ipoteze ca pentru cazul precedent, relaţiile (406.3) se pot scrie matricial sub forma:

$$\| I \| = \| \eta \| \cdot \| U \|, \qquad (406.4)$$

în care $\| \eta \|$ este matricea coeficienţilor, care poartă numele de *matricea admitanţă a cuadripolului.*

*) S'a adoptat notaţia matricială « în căsuţe » deoarece aceasta este mult mai comodă pentru aplicaţiile tehnice unde pot apare matrice cu un număr foarte mare de elemente (spre exemplu studiul maşinilor electrice). Este evident că poate fi folosită orice notaţie matricială.

Rezolvând în raport cu tensiunile $\bar{U}$, se obţin relaţiile:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{Z}_{11}\,\bar{I}_1 + \bar{Z}_{12}\,\bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= \bar{Z}_{21}\,\bar{I}_1 + \bar{Z}_{22}\,\bar{I}_2 \end{aligned} \qquad (406.5)$$

în care:

$$\bar{Z}_{11} = \bar{A}/\bar{C}\ , \quad \bar{Z}_{12} = -1/\bar{C},$$
$$\bar{Z}_{21} = 1/\bar{C}\ , \quad \bar{Z}_{22} = -\bar{D}/\bar{C}.$$

Cu aceleaşi ipoteze ca mai sus, sistemul (406.5) poate fi scris sub forma matricială:

$$\| U \| = \| \zeta \| \cdot \| I \|, \qquad (406.6)$$

în care $\| \zeta \|$ poartă numele de *matricea impedanţă a cuadripolului.*

Rezultă imediat:

$$\| \zeta \| = \| \eta \|^{-1}.$$

Cele trei matrice ale unui cuadripol pot fi scrise una în funcţie de elementele celorlalte matrice. Va rezulta:

$$\| \gamma \| = \begin{vmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{\bar{Y}_{12}} \begin{vmatrix} \bar{Y}_{22} & -1 \\ |\eta| & -\bar{Y}_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{\bar{Z}_{12}} \begin{vmatrix} -\bar{Z}_{11} & |\zeta| \\ -1 & -\bar{Z}_{22} \end{vmatrix}, \qquad (406.7)$$

$$\| \eta \| = \frac{1}{\bar{B}} \begin{vmatrix} \bar{D} & -1 \\ 1 & -\bar{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\zeta|} \begin{vmatrix} \bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{12} \\ -\bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{11} \end{vmatrix},$$

$$\| \zeta \| = \frac{1}{\bar{C}} \begin{vmatrix} \bar{A} & -1 \\ 1 & -\bar{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\eta|} \begin{vmatrix} \bar{Y}_{22} & -\bar{Y}_{21} \\ -\bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{vmatrix},$$

în care $|\eta|$ şi $|\zeta|$ sunt determinanţii matricelor respective.

407. **Legarea în lanţ a cuadripolilor** (fig. 179). In acest sistem, tensiunea şi curentul de ieşire ale unui cuadripol sunt egale cu tensiunea şi curentul de intrare ale celuilalt, etc.



Fig. 179. — Cuadripoli legaţi în lanţ.

Pentru fiecare cuadripol se poate scrie:

$$\| E_1' \| = \| \gamma' \| \cdot \| E_2' \|, \ldots, \ \| E_1^{(n)} \| = \| \gamma^{(n)} \| \cdot \| E_2^{(n)} \|$$

şi

$$\|E_2'\| = \|E_1''\|, \dots, \|E_2^{(n-1)}\| = \|E_1^{(n)}\|,$$

de unde rezultă

$$\|E_1'\| = \|\Upsilon'\|\cdot\|\Upsilon''\|\dots\|\Upsilon^{(n)}\|\cdot\|E_2^{(n)}\|.$$

Rezultă dar că, matricea caracteristică a cuadripolului rezultant este egală cu produsul matricelor caracteristice ale cuadripolilor componenţi:

$$\|\Upsilon\| = \|\Upsilon'\|\cdot\|\Upsilon''\|\dots\|\Upsilon^{(n)}\|. \qquad (407.1)$$

Dacă cuadripolii sunt identici, atunci

$$\|\Upsilon\| = \|\Upsilon'\|^{n}.$$

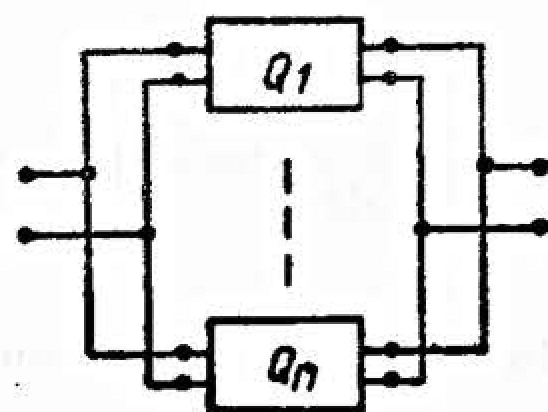


Fig. 180. – Cuadripoli legaţi în paralel.

408. **Legarea cuadripolilor în paralel** (fig. 180). In acest caz, toate tensiunile la bornele cuadripolilor sunt respectiv egale, iar curenţii rezultanţi sunt egali cu suma curenţilor produşi de fiecare cuadripol.

Folosind expresia matricială (406.4) a cuadripolului, rezultă:

$$\|U'\| = \|U''\| = \dots = \|U^{(n)}\| = \|U\|,$$

şi

$$\|I'\| + \|I''\| + \dots + \|I^{(n)}\| = \|I\|;$$

se obţine:

$$\|I\| = \left[\|\eta'\| + \|\eta''\| + \dots + \|\eta^{(n)}\|\right]\cdot\|U\| = \|\eta\|\cdot\|U\|.$$

Rezultă dar că matricea admitanţă a unui cuadripol format din legarea mai multor cuadripoli este egală cu suma matricelor admitanţă a cuadripolilor componenţi:

$$\|\eta\| = \|\eta'\| + \|\eta''\| + \dots + \|\eta^{(n)}\|. \qquad (408.1)$$

Dacă cuadripolii sunt identici,

$$\|\eta\| = n\,\|\eta'\|.$$

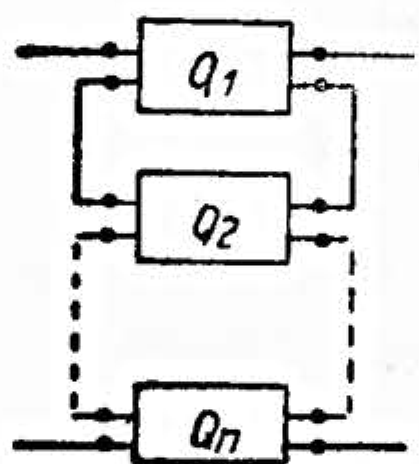


Fig. 181. – Cuadripoli legaţi în serie.

409. **Legarea cuadripolilor în serie** (fig. 181). In acest montaj, curenţii din toţi cuadripolii legaţi sunt respectiv egali, iar tensiunea la borne este egală respectiv cu suma tensiunilor la bornele fiecărui cuadripol.

Folosind expresia matricială (406.6) a cuadripolului, rezultă

$$\|I'\| = \|I''\| = \dots = \|I^{(n)}\| = \|I\|$$

şi

$$\|U'\| + \|U''\| + \dots + \|U^{(n)}\| = \|U\|,$$

de unde se obţine

$$\|U\| = \left[\|\zeta'\| + \|\zeta''\| + \dots + \|\zeta^{(n)}\|\right]\cdot\|I\|.$$

Rezultă dar că matricea impedanţă a mai multor cuadripoli legaţi în serie este egală cu suma matricelor impedanţă a cuadripolilor rezultanţi:

$$\|\zeta\| = \|\zeta'\| + \|\zeta''\| + \|\zeta'''\| + \dots + \|\zeta^{(n)}\| \qquad (409.1)$$

Dacă cuadripolii sunt identici,

$$\|\zeta\| = n\,\|\zeta^{(n)}\|.$$

410. **Exemple de cuadripoli simpli.**

α) *Cuadripol format din o impedanţă serie* (fig. 182).

Ecuaţiile cuadripolului se reduc la:

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2 + \overline{Z}\,\overline{I}_2,$$

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_2,$$

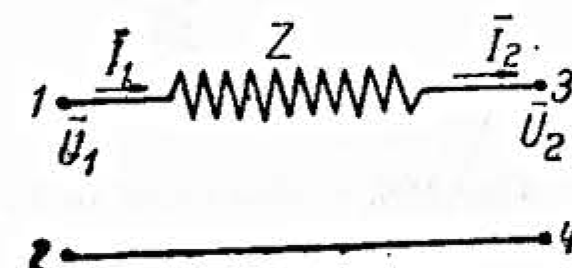


Fig. 182. – Cuadripol format din o impedanţă serie.

şi rezultă

$$\|\Upsilon\| = \begin{vmatrix} 1 & \overline{Z} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \|\eta\| = \frac{1}{\overline{Z}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Cuadripolul nu are $\|\zeta\|$, deoarece $|\eta| = 0$.

β) *Cuadripol format dintr'o impedanţă în derivaţie* (fig. 183). In acest caz:

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2,$$

$$\overline{I}_1 = \overline{Y}\,\overline{U}_2 + \overline{I}_2,$$

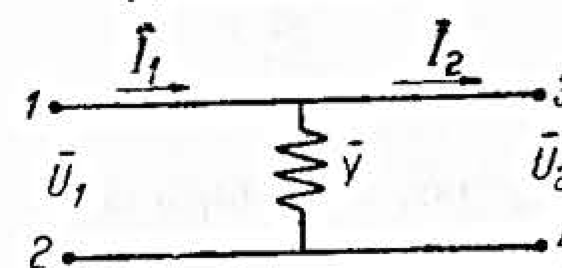


Fig. 183. – Cuadripol format din o impedanţă în paralel.

şi deci

$$\|\Upsilon\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \overline{Y} & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \|\zeta\| = \frac{1}{\overline{Y}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Cuadripolul nu are $\|\eta\|$, deoarece $\|\zeta\| = 0$.

γ) *Cuadripolul unui tub electronic* (fig. 184).

Pentru un atac exterior slab şi pentru un curent de grilă nul, ecuaţiile cuadripolului unui tub electronic de rezistenţă ρ şi de pantă s se pot scrie cu suficientă exactitate:

$$\overline{I}_1 = 0,$$

$$\overline{I}_2 = -s\,\overline{U}_1 - \frac{1}{\rho}\,\overline{U}_2.$$

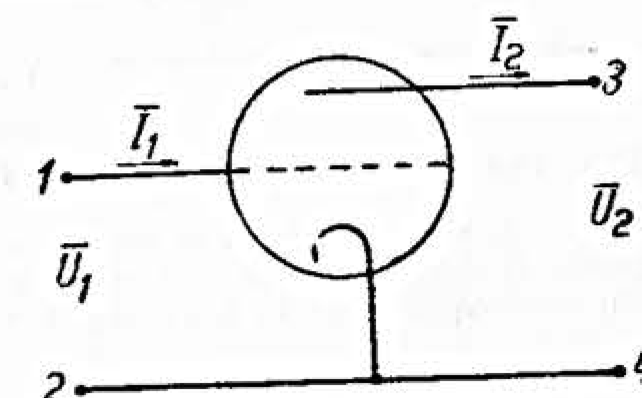


Fig. 184. – Cudripolul unui tub electronic.

şi deci

$$\|\eta\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -s & -\frac{1}{\rho} \end{vmatrix} \quad ; \quad \|\Upsilon\| = -\frac{1}{s}\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Cuadripolul nu are $\|\zeta\|$, deoarece $|\eta| = 0$.

δ) *Cuadripolul în Γ* (fig. 185). Acest cuadripol este format dintr'o structură (β), urmată de o structură (α), legate în lanţ:

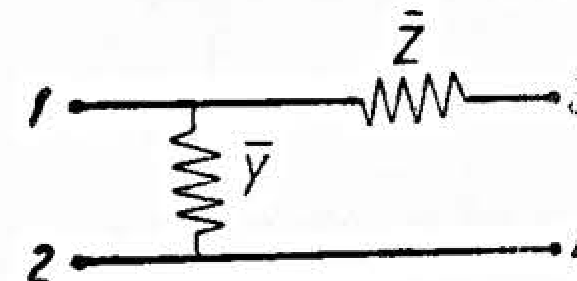


Fig. 185. – Cuadripol în Γ.

$$\|\Upsilon\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \overline{Y} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \overline{Z} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \overline{Z} \\ \overline{Y} & 1 + \overline{Z}\,\overline{Y} \end{vmatrix},$$

din care, cu ajutorul relaţiilor (406.7), se deduce

$$\|\eta\| = \frac{1}{\overline{Z}}\begin{vmatrix} 1 + \overline{Z}\,\overline{Y} & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \|\zeta\| = \frac{1}{\overline{Y}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1-\overline{Z}\,\overline{Y} \end{vmatrix}.$$

Dacă se inversează ordinea de legare a cuadripolilor, se obţine tot un cuadripol în Γ (fig. 186), a cărui matrice caracteristică se obţine din schimbarea ordinii produsului matricelor caracteristice. Se găseşte:

$$\|\gamma\| = \begin{vmatrix} 1+\overline{Z}\,\overline{Y} & \overline{Z} \\ \overline{Y} & 1 \end{vmatrix}; \quad \|\eta\| = \frac{1}{\overline{Z}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1-\overline{Z}\,\overline{Y} \end{vmatrix};$$

$$\|\zeta\| = \frac{1}{\overline{Y}} \begin{vmatrix} 1+\overline{Z}\,\overline{Y} & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Fig. 186. — Cuadripol în Γ.

ε) *Cuadripoli în T şi în π.* Un cuadripol în *T* se obţine din trei structuri (α, β, α) legate în lanţ (fig. 187). Se obţine uşor:

$$\|\gamma\| = \begin{vmatrix} 1 & \overline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \overline{Y} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \overline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\overline{Z}_1\overline{Y} & \overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Y} \\ \overline{Y} & 1+\overline{Z}_2\overline{Y} \end{vmatrix},$$

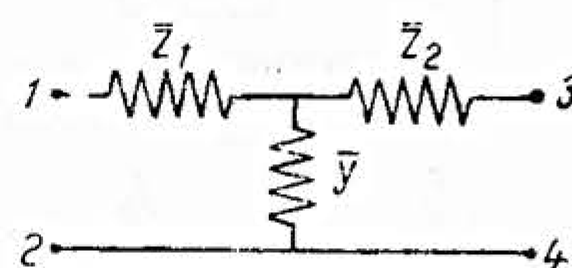


Fig. 187. — Cuadripol în *T*.

iar de aici, cu relaţiile (406.7) celelalte două matrice ale cuadripolului.

Cuadripolul în π (fig. 188) este format din trei structuri (β, α, β) legate în lanţ. Se obţine uşor:

$$\|\gamma\| = \begin{vmatrix} 1+\overline{Z}\,\overline{Y}_2 & \overline{Z} \\ \overline{Y}_1+\overline{Y}_2+\overline{Y}_1\overline{Y}_2\overline{Z} & 1+\overline{Z}\,\overline{Y}_1 \end{vmatrix}.$$

Fig. 188. — Cuadripol în π.

411. **Studiul general al unui cuadripol complex.** Pentru efectuarea acestui studiu, se descompune cuadripolul dat în cuadripoli simpli, cărora li se aplică regulile de legare ale cuadripolilor.

E x e m p l u. Fie un circuit echivalent al unui tub electronic (fig. 189). Acest cuadripol poate fi descompus în doi cuadripoli centrali legaţi în paralel, având la fiecare extremitate câte un cuadripol legat în lanţ (fig. 190).

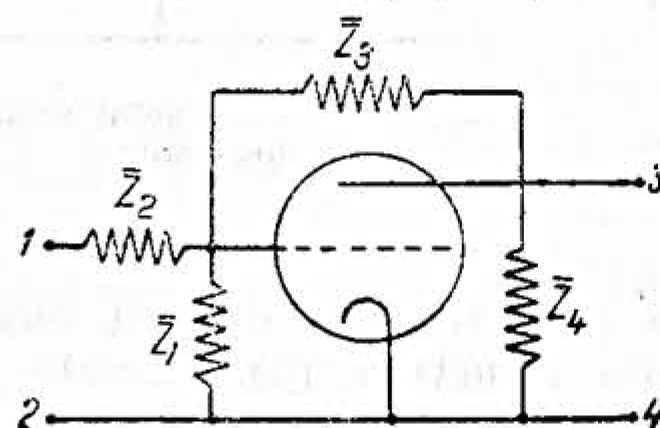


Fig. 189. — Circuitul echivalent al unui tub electronic.

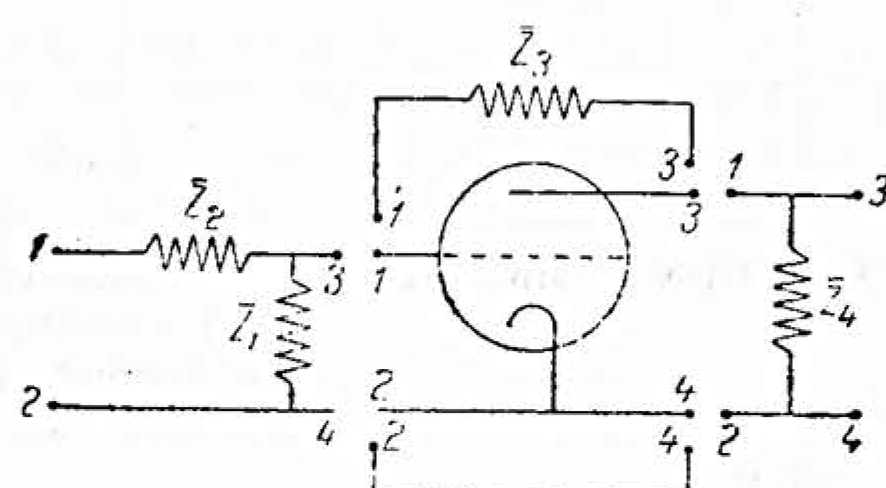


Fig. 190. — Descompunerea cuadripolului dat în cuadripoli simpli.

Matricea $\|\eta'\|$ a cuadripolului central este:

$$\|\eta'\| = \begin{vmatrix} 1/\overline{Z}_3 & -1/\overline{Z}_3 \\ 1/\overline{Z}_3 & -1/\overline{Z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -s & -1/\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\overline{Z}_3 & -1/\overline{Z}_3 \\ -s+\dfrac{1}{\overline{Z}_3} & -\dfrac{1}{\overline{Z}_3}-\dfrac{1}{\rho} \end{vmatrix},$$

din care aplicând relaţiile (406.7) se deduce:

$$\|\gamma''\| = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{\overline{Z}_3}{\rho} & \overline{Z}_3 \\ -s+\dfrac{1}{\rho} & 1 \end{vmatrix}.$$

Matricea caracteristică a cuadripolului considerat este deci

$$\|\gamma\| = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{Z_2}{\overline{Z}_1} & \overline{Z}_2 \\ \dfrac{1}{\overline{Z}_1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1+\dfrac{Z_3}{\rho} & Z_3 \\ -s+\dfrac{1}{\rho} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{Z_4} & 1 \end{vmatrix},$$

care se poate calcula foarte uşor.

Cu ajutorul calculului matricial se pot studia toate proprietăţile cuadripolilor (impedanţa caracteristică, cuadripolul simetric, etc).

412. **Studiul reţelelor electrice.** Cea mai generală reţea electrică este constituită din un anumit număr de elemente, legate între ele într'un mod bine determinat, invariabil în timp, printr'un număr oarecare de conexiuni, electrice sau magnetice. Fiecare element al reţelei poate fi constituit oricum, dintr'o rezistenţă, dintr'o inductanţă, dintr'o capacitate, dintr'o maşină rotativă, etc., sau dintr'o combinaţie a acestora. Intre unele sau între totalitatea acestor elemente pot exista cuplaje electromagnetice sau electrostatice. Deasemenea pot exista, în diversele elemente ale reţelei, forţe electromotoare legate în serie sau în paralel cu acestea.

Legătura electrică între două elemente formează un *nod*. Un circuit închis se numeşte un *ochi* sau o *buclă*. O reţea oarecare poate fi descompusă într'un număr oarecare de *subreţele*, înţelegând prin aceasta reţele cuplate electromagnetic sau electrostatic (fig. 191).

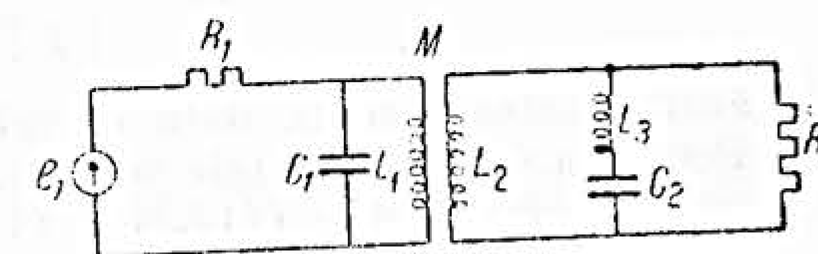


Fig. 191. — Reţea formată din două subreţele.

In fiecare buclă se poate admite că circulă un curent independent (teorema lui Maxwell). Numărul curenţilor de circulaţie — sau ciclici — independenţi, care pot circula în buclele unei reţele, se determină cu relaţia:

$$p = m - n + s, \tag{412.1}$$

în care *m* este numărul de elemente (laturi), *n* este numărul de noduri şi *s* este numărul de subreţele.

Intre curenţii ciclici din fiecare buclă şi curenţii reali care circulă în fiecare latură se poate stabili o relaţie liniară de forma:

$$i_k = \sum C_{kl}\, i'_l . \tag{412.2}$$

Se va obţine astfel pentru fiecare latură a reţelei câte o ecuaţie analoagă. Coeficientul C_{kl} poate avea una din valorile 0, ± 1, aceasta depinzând de sensul arbitrar ales pentru circulaţia curenţilor; valoarea zero va apare acolo unde circuitul respectiv nu conţine o anumită latură.

Dacă se scrie ecuaţia matricială a sistemului de ecuaţii format din ecuaţiile (412.2), se obţine:

$$\| i \| = \| C \| \cdot \| i' \| . \tag{412.3}$$

Matricea $\| C \|$ se numeşte *matricea de conexiune*. Ea arată cum sunt legate elementele reţelei între ele.

Trecerea dela curenţii reali din elementele reţelei la curenţii ciclici din buclele reţelei echivalează cu o schimbare a sistemului de referinţă făcută în scopul micşorării numărului de variabile independente sau în scopul simplificării reţelii. Legătură între cele două sisteme o dă *matricea de conexiune* $\| C \|$, definită mai sus.

413. **Invarianţa formelor. Formule de transformare.** In orice sistem de referinţă, pentru o aceeaşi reţea, puterea activă absorbită de circuit şi legea lui Ohm sunt forme invariante.

Fie o reţea oarecare, în care sunt date diversele forţe electromotoare $\| e \|$, diversele impedanţe $\| Z \|$ şi puterea absorbită de reţea $\| p \|$.

Diverşii curenţi $\| i \|$ constitue în general necunoscutele care urmează a fi determinate.

In această reţea există ca ecuaţii invariante

$$\| e \| = \| Z \| \cdot \| i \|$$

$$\| p \| = \| e_t \| \cdot \| i \| .$$

Această reţea se numeşte *reţea primitivă*.

Fie acum o altă reţea, care provine din reţeaua precedentă printr'o schimbare a sistemului de referinţă. Această reţea va cuprinde deasemenea o serie de forţe electromotoare $\| e' \|$, diversele impedanţe, $\| Z' \|$, diverşi curenţi în elementele ei $\| i' \|$, şi absoarbe o putere activă $\| p' \|$.

Intre aceste două sisteme se poate scrie invarianţa puterii:

$$\| p \| = \| p' \| , \tag{413.1}$$

şi legătura dintre curenţi, dată de relaţia (412.3).

Pentru a scrie elementele noii reţele în funcţie de elementele reţelei primitive, se porneşte dela relaţiile (412.3) şi (413.1), ultima scriindu-se explicit:

$$\| e_t \| \cdot \| i \| = \| e'_t \| \cdot \| i' \| .$$

Inlocuind pe $\| i \|$ cu egalul său din (412.3), ţinând seama că relaţia obţinută este adevărată oricare ar fi curenţii $\| i' \|$, şi transpunând matricea obţinută, se găseşte:

$$\| e' \| = \| C_t \| \cdot \| e \| . \tag{413.2}$$

Pentru relaţia de legătură între impedanţe, se porneşte dela legea lui Ohm aplicată reţelei primitive, în care se înlocueşte $\| e \|$ scos din relaţia (413.2) şi $\| i \|$ scos din relaţia (412.3). Aplicând principiul invarianţei formei, prin calcule simple se găseşte

$$\| Z' \| = \| C_t \| \cdot \| Z \| \cdot \| C \| . \tag{413.3}$$

414 **Reguli generale de calcul al reţelelor.**

α) Se trasează cu îngrijire o schemă a reţelei de studiat, etichetându-se elementele $Z_{aa}, \ldots$, numerotându-se extremităţile lor conform cuplajului electromagnetic şi trasându-se forţele electromotoare impuse.

β) Se numără nodurile, elementele (laturile) şi subreţelele. Se deduce numărul minim de bucle, sau circuite independente, cu ajutorul relaţiei (412.1). Se introduc în reţea atâţi curenţi independenţi i_p, i_q, $i_r \ldots$, câte bucle sunt, materializându-i prin săgeţi având un sens arbitrar.

γ) Se calculează toţi curenţii reali care circulă în elementele reţelei în funcţie de aceşti curenţi independenţi, cu ajutorul primei legi a lui Kirchhoff.

δ) Se scriu relaţiile care există între curenţii care circulă în elementele reţelei primitive şi curenţii care circulă în reţeaua de studiat transformată. Se deduce de aici matricea de conexiune $\| C \|$.

ε) Se calculează matricele $\| e' \|$ şi $\| Z' \|$ cu ajutorul relaţiilor (413.2) şi (413.3). Ecuaţia de funcţionare a reţelei este

$$\| e' \| = \| Z' \| \cdot \| i' \| ,$$

de unde se poate deduce imediat

$$\| i' \| = \| Z' \|^{-1} \cdot \| e' \| . \tag{414.1}$$

Cu aceste relaţii se deduce:

— Curenţii în fiecare element al reţelei date cu ajutorul relaţiei (412.3).

— Diferenţa de potenţial la bornele fiecărui element:

$$\| e_l \| = \| Z \| \cdot \| e \| \cdot \| i' \| . \tag{414.2}$$

— Puterea activă absorbită de reţea

$$p = \| e'_t \| \cdot \| i' \| . \tag{414.3}$$

ζ) Pentru a conduce calculul mai departe, trebue să se cunoască constituţia elementelor reţelei şi mai ales să se precizeze scopul urmărit:

— Pentru a cunoaşte regimul permanent sinusoidal, în sistemul (414.1) impedanţele vor avea forma:

$$R + j\,L\omega + \frac{1}{jC\omega} ,$$

iar forţele electromotoare forma:

$$e = E \underline{| \varphi} .$$

— Pentru a cunoaşte regimul tranzitoriu creat de un anumit număr de forţe electromotoare $h_1(t)$, $h_2(t), \ldots$ aplicate la timpul $t=0$, impedanţele vor avea forma

$$R + Lp + \frac{1}{Cp} ,$$

iar forţele electromotoare forma:

$$g(p) = \mathfrak{L}\, h(t).$$

Sistemul de ecuaţii (414.1) va da soluţiile sub forma:

$$i(t) = \mathfrak{L}^{-1} \frac{\alpha(p)}{\delta(p)} .$$

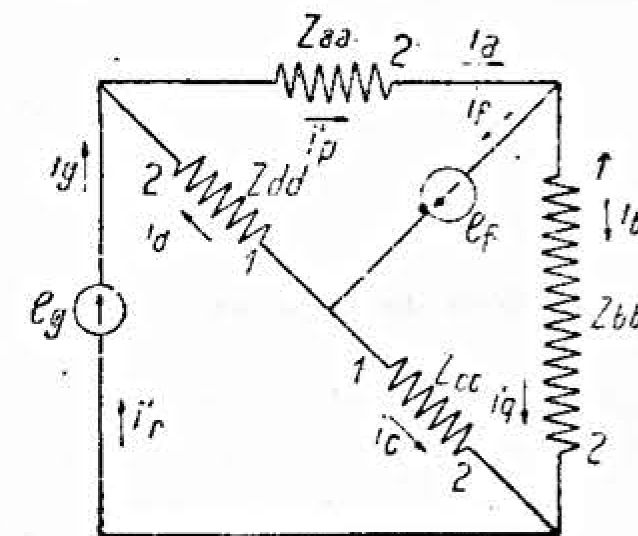


Fig. 192. — Reţea dată şi repartiţia curenţilor.

— In sfârşit, pentru a stabili numai sistemul de ecuaţii diferenţiale de funcţionare ale sistemului, se va calcula matricea produs a matricelor $\| Z' \|$ şi $\| i' \|$, se va înlocui în rezultat p prin simbolul de derivare $\frac{d}{dt}$, $\frac{1}{p}$ prin simbolul de integrare $\int (\ ) dt$ şi se va egala această matrice cu matricea forţei electromotoare $h(t)$ dată.

— In cazul curentului continuu, problema se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare între numere reale.

Metoda este extrem de avantajoasă în cazul reţelelor complexe.

415. Exemplu de calcul. Fie reţeaua din fig. 192 care să se calculeze cu ajutorul calcului matricial. Se presupune că în reţea nu există impedanţe mutuale în niciun circuit.

Matricele de tensiune şi de impedanţă ale reţelei date sunt

$\| e \| =$

a	
b	
c	
d	
f	e_f
g	e_g

, $\| Z \| =$

	a	b	c	d	f	g
a	Z_{aa}					
b		Z_{bb}				
c			Z_{cc}			
d				Z_{dd}		
f						
g						

Scriind curenţii din laturi, în funcţie de curenţii ciclici independenţi, se găseşte

$$i_a = i_p$$
$$i_b = i_q$$
$$i_c = -i_q + i_n$$
$$i_d = i_p - i_r$$
$$i_f = i_p - i_q$$
$$i_g = i_r$$

de unde $\| C \| =$

	p	q	r
a	1		
b		1	
c		—1	1
d	1		—1
f	1	—1	
g			1

Forţele electromotoare din noua reţea sunt:

$\| e' \| = \| C_t \| \cdot \| e \| =$

p	e_f
q	$-e_f$
r	e_g

,

iar matricea de impedanţă

$\| Z' \| = \| C_t \| \| Z \| \cdot \| C \| =$

	p	q	r
p	$Z_{aa} + Z_{dd}$		$-Z_{dd}$
q		$Z_{bb} + Z_{cc}$	$-Z_{cc}$
r	$-Z_{dd}$	$-Z_{cc}$	$Z_{cc} + Z_{dd}$

.

Calculând matricea inversă a lui $\| Z' \|$ se găseşte:

$\| Z' \|^{-1} = \frac{1}{\Delta}$

	p	q	r
p	$Z_{bb} Z_{cc} + Z_{dd} (Z_{bb} + Z_{cc})$	$Z_{cc} Z_{dd}$	$Z_{dd} (Z_{bb} + Z_{cc})$
q	$Z_{cc} Z_{dd}$	$Z_{aa} Z_{dd} + Z_{cc}(Z_{aa} + Z_{dd})$	$Z_{cc} (Z_{aa} + Z_{dd})$
r	$Z_{dd} (Z_{bb} + Z_{cc})$	$Z_{cc}(Z_{aa} + Z_{dd})$	$(Z_{aa} + Z_{dd}) (Z_{bb} + Z_{cc})$

în care $\Delta = Z_{aa} Z_{bb} (Z_{cc} + Z_{dd}) + Z_{cc} Z_{dd} (Z_{aa} + Z_{bb})$; de unde se deduce:

$\| i' \| = \| Z' \|^{-1} \cdot \| e' \| = \frac{1}{\Delta}$

p	$Z_{dd} (Z_{bb} + Z_{cc}) e_g + Z_{bb} (Z_{cc} + Z_{dd}) e_f$
q	$Z_{cc} (Z_{aa} + Z_{dd}) e_g - Z_{aa} (Z_{cc} + Z_{dd}) e_f$
r	$(Z_{aa} + Z_{dd}) (Z_{bb} + Z_{cc}) e_g - (Z_{aa} Z_{cc} - Z_{bb} Z_{dd}) e_f$

de unde

$\| i \| = \| C \| \cdot \| i' \| = \frac{1}{\Delta}$

a	$Z_{bb} (Z_{cc} + Z_{dd}) e_f + Z_{dd} (Z_{bb} + Z_{cc}) e_g$
b	$-Z_{aa} (Z_{cc} + Z_{dd}) e_f + Z_{cc} (Z_{aa} + Z_{dd}) e_g$
c	$Z_{dd} (Z_{aa} + Z_{bb}) e_f + Z_{bb} (Z_{aa} + Z_{dd}) e_g$
d	$Z_{cc} (Z_{aa} + Z_{bb}) e_f - Z_{aa} (Z_{bb} + Z_{cc}) e_g$
f	$(Z_{aa} + Z_{bb}) (Z_{cc} + Z_{dd}) e_f - (Z_{aa} Z_{cc} - Z_{bb} Z_{dd}) e_g$
g	$-(Z_{aa} Z_{cc} - Z_{bb} Z_{dd}) e_f + (Z_{aa} + Z_{dd}) (Z_{bb} + Z_{cc}) e_g$

416. Transformări succesive ale reţelelor. Sunt cazuri când, deşi soluţia găsită corespunde, totuşi, pentru o nouă problemă, este necesară o nouă transformare, care conduce spre exemplu, la o soluţie mai simplă a problemei de rezolvat. Această nouă transformare se face în acelaşi mod ca şi în primul caz.

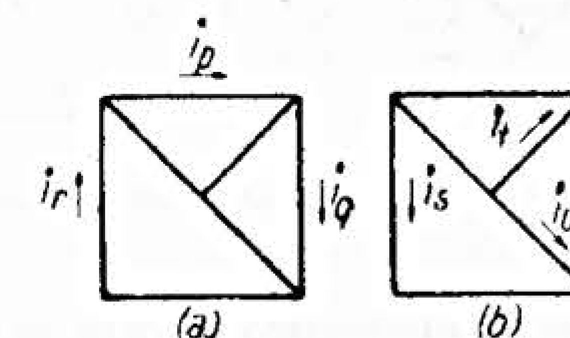


Fig. 193. — Transformare de reţele.

Fie exemplul de mai sus (fig. 193), în care în locul curenţilor i_p, i_q, i_r, este necesar să se ia curenţii i_s, i_t, i_u. Matricea de conexiune se scrie imediat din ecuaţiile care leagă vechii curenţi de cei noi.

Va rezulta

$$i_p = -i_s - i_t - i_u$$
$$i_q = -i_s - i_u$$
$$i_r = -i_s$$

de unde: $\| C_1 \| =$

	s	t	u
p	—1	—1	—1
q	—1		—1
r	—1		

.

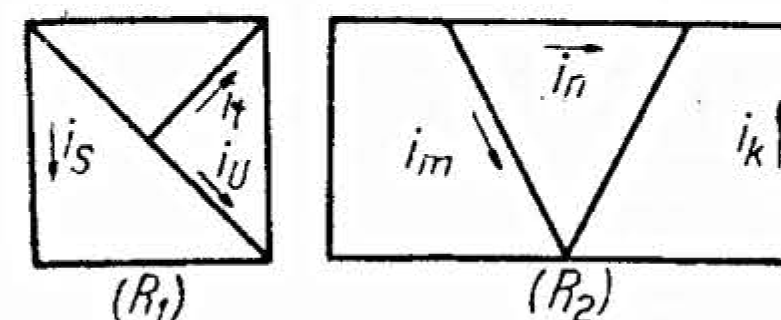


Fig. 194. — Reţele elementare ale reţelei interconectate.

Legătura între reţeaua primitivă a sistemului şi această nouă reţea este făcută de matricea de conexiune:

$$\| C' \| = \| C \| \quad \| C_1 \|.$$

417. Interconectarea reţelelor. Interconectarea prin conductori. In cazul unei reţele complicate, nu este necesar, pentru studierea ei, să fie descompusă în elemente simple, ci este suficient să fie descompusă în reţele mai simple, ale căror soluţii există, sau pot fi studiate mai uşor sau direct. Rezultatele obţinute se conectează apoi în sistemul rezultant.

Fie, spre exemplu, două reţele R_1 şi R_2 (fig. 194) care au fost studiate şi la care se cunosc matricele respective

$\| e_1 \|$, $\| i_1 \|$ şi $\| Z_1 \|$ pentru reţeaua R_1

şi

$\| e_2 \|, \| i_2 \|$ şi $\| Z_2 \|$ pentru reţeaua R_2.

Ecuaţiile matriciale de funcţionare ale acestor două reţele sunt:

$$\| e_1 \| = + \| Z_1 \| \cdot \| i_1 \|$$
$$\| e_2 \| = \qquad + \| Z_2 \| \cdot \| i_2 \|.$$

Ansamblul acestor reţele poate fi exprimat printr'o ecuaţie matricială unică:

$$\| e \| = \| Z \| \cdot \| i \|,$$

în care

$$\| e \| = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} \| e_1 \| \\ \hline \| e_2 \| \end{vmatrix}, \quad \| i \| = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} \| i_1 \| \\ \hline \| i_2 \| \end{vmatrix}, \quad \| Z \| = \begin{matrix} \\ R_1 \\ R_2 \end{matrix} \begin{matrix} R_1 & R_2 \\ \| Z_1 \| & \\ & \| Z_2 \| \end{matrix},$$

presupunând că cele două reţele nu au o inducţie mutuală între ele.

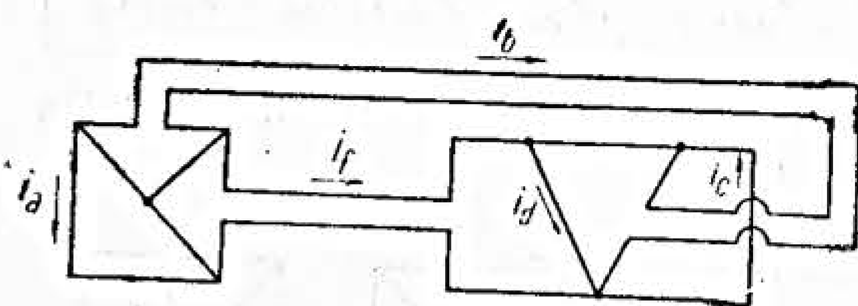


Fig. 195. — Reţea interconectată.

Se interconectează acum cele două reţele într'un mod oarecare, însă bine determinat, obţinându-se astfel reţeaua complexă R (fig. 195). In această nouă reţea, în care sunt $m = 11$ laturi, $n = 7$ noduri şi $s = 1$ subreţele, vor exista:

$$p = 11 - 7 + 1 = 5$$

curenţi independenţi, care se aleg în mod cu totul arbitrar.

Scriind, cu ajutorul primei legi a lui Kirchhoff, vechii curenţi în funcţie de cei noi, se găseşte

$$i_k = i_c$$
$$i_m = i_d$$
$$i_n = -i_d + i_f$$
$$i_s = i_a$$
$$i_t = i_c + i_d$$
$$i_u = -i_a - i_b + i_c - i_d,$$

de unde $\| C \| =$

	a	b	c	d	f
k			1		
m				1	
n				—1	1
s	1				
t			—1	1	
u	—1	—1	1	—1	

$$= \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} \| C_1 \| \\ \hline \| C_2 \| \end{vmatrix}$$

Notând cu $\| e' \|$, $\| z' \|$ şi $\| i' \|$ matricele noii reţele, rezultă

$$\| e' \| = \| C_t \| \cdot \| e \|,$$
$$\| Z' \| = \| C_t \| \cdot \| Z \| \cdot \| C \|,$$
$$\| e' \| = \| Z' \| \cdot \| i' \|.$$

Observaţie. Se poate profita de faptul că matricele reţelei primitive sunt matrice compuse şi în consecinţă să se facă calculul mai uşor. Va rezulta astfel

$$\| Z' \| = \begin{vmatrix} \| C_{1t} \| & \| C_{2t} \| \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \| Z_1 \| & \\ \hline & \| Z_2 \| \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \| C_1 \| \\ \hline \| C_2 \| \end{vmatrix} =$$
$$= \| C_{1t} \| \cdot \| Z_1 \| \cdot \| C_1 \| + \| C_{2t} \| \cdot \| Z_2 \| \cdot \| C_2 \|$$

şi

$$\| e' \| = \begin{vmatrix} \| C_{1t} \| & \| C_{2t} \| \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \| e_1 \| \\ \hline \| e_2 \| \end{vmatrix} = \| C_{1t} \| \cdot \| e_1 \| + \| C_{2t} \| \cdot \| e_2 \|.$$

418. Interconectarea reţelelor. Interconectarea prin circuite magnetice. Interconectarea mai multor reţele impune una sau mai multe ecuaţii de legătură între curenţii reţelelor primitive, ceeace face ca numărul de curenţi independenţi ai reţelei rezultante să fie mai mic decât numărul total de curenţi independenţi ai reţelelor primitive.

Ecuaţii suplimentare de legătură între curenţi se pot obţine şi dacă se introduc în reţea circuite magnetice cu reluctanţă foarte mică, sub forma:

$$\sum ni = 0. \qquad (418.1)$$

Rezolvarea are următoarele două etape pentru stabilirea matricei de conexiuni între reţeaua dată şi reţeaua transformată.

— Se scrie matricea de conexiune între reţeaua dată (reţeaua primitivă) şi reţeaua transformată, fără a se ţine seama de circuitele magnetice, procedându-se aşa cum s'a arătat mai sus. Se obţine

$$\| i \| = \| C_1 \| \cdot \| i' \|.$$

— Se elimină încă un număr din curenţii $\| i' \|$ cu ajutorul relaţiilor de legătură (418.1), şi se scrie curenţii $\| i' \|$ în funcţie de curenţii rămaşi $\| i'' \|$. Se găseşte

$$\| i' \| = \| C_2 \| \cdot \| i'' \|.$$

Eliminând curenţii $\| i' \|$ între aceste două relaţii, se obţine

$$\| i \| = \| C_1 \| \cdot \| C_2 \| \cdot \| i'' \|,$$

de unde, matricea de conexiune căutată

$$\| C \| = \| C_2 \| \cdot \| C_2 \|. \qquad (418.2)$$

Cunoscând matricea de conexiune, se poate face orice calcul, folosind relaţiile stabilite mai sus.

Z. Electricitatea atmosferică

419. Generalităţi. Aerul atmosferic se găseşte în permanenţă într'o stare electrică, detectabilă prin aparate adecvate. In mod obişnuit această stare se manifestă printr'o uşoară şi permanentă ionizare a aerului, printr'o corespunzătoare conductivitate electrică, cum şi prin existenţa de sarcini electrice negative la suprafaţa pământului, care creiază un câmp electric dirijat în jos. Această stare se modifică în spaţiu (în special la înălţimi mari unde ia un caracter deosebit de ceeace se constată la sol) şi în timp, mai cu seamă prin intervenţia norilor de furtună, care sunt imense depozite de sarcini electrostatice.

Electricitatea atmosferică interesează electrotehnica, în diferite probleme privind liniile de transport, supratensiunile, paraziţii atmosferici, etc.

a) Electricitatea timpului frumos

420. **Ionizarea aerului.** Starea de ionizare a aerului se caracterizează printr'un conţinut determinat de ioni, care variază între anumite limite, condiţionate de intensitatea agenţilor ionizanţi şi de factorii meteorologici. Factorii ionizanţi care acţionează în păturile joase ale atmosferei sunt:

— Radiaţia cosmică, a cărei intensitate de ionizare este în condiţii normale de 1,8 *I* (*I* reprezentând numărul de perechi de ioni produşi pe cm^3 de aer şi în timp de o secundă).

— Radiaţiile α, β şi γ ale substanţelor radioactive din scoarţa pământului, care acţionează în apropierea solului şi corespunzător parcursului lor mijlociu. La un metru înălţime deasupra solului, intensitatea de ionizare este în medie 4 *I*. La aceasta se mai adaugă 5 *I*, reprezentând acţiunea ionizantă a radonului şi toronului, răspândite prin scoarţa pământului în atmosferă, cum şi cea a produselor lor de desintegrare.

— Agenţi locali sau ocazionali: pulverizarea apei, spargerea picăturilor de apă, furtuni de nisip sau zăpadă, etc.

Ionii produşi de aceşti factori sunt formaţi din roiuri de 10 până la 12 molecule, şi poartă câte o singură sarcină elementară. Ei se numesc *ioni mici* şi au mobilităţi [1]) cuprinse între 1,0 şi 2,0 $\frac{cm}{s}\frac{V}{cm}$. Prin fixarea prin adsorbţie pe nucleele de condensare, ionii mici se transformă în *ioni mari* cu mobilităţi cuprinse între 0,0003 şi 0,008 $\frac{cm}{s}\frac{V}{cm}$. (Nucleele de condensare sunt firişoare extrem de fine de materie, care determină condensarea vaporilor de apă în jurul lor, pentru a forma picături). *Ionii intermediari* au mobilităţi cuprinse între 0,1 şi 0,008 $\frac{cm}{s}\frac{V}{cm}$. Aceşti din urmă ioni se observă numai atunci când umiditatea e scăzută şi se pare că sunt formaţi din picături de H_2SO_4, cu o rază al cărui ordin de mărime este de 10^{-7} cm.

Numărul ionilor mici pe cm^3 de aer în păturile joase ale atmosferei variază între 50 şi 1 500. Numărul ionilor mari este cuprins între 200 (pe ţărmul mărilor) şi 80 000 sau mai mult chiar (în oraşele mari). In general ionii mici pozitivi sunt mai numeroşi decât cei negativi, raportul lor fiind în mijlocie de 1,2. In cazul ionilor mari, acest raport e practic egal cu unitatea. Ionii mici au o viaţă scurtă; ei dispar prin recombinarea lor, prin combinarea cu ioni mari de semn contrar, sau prin fixarea pe nucleele de condensare. Dacă q este numărul ionilor mici de un acelaşi semn produşi pe cm^3 şi s, n_1 şi N_1 numărul pe cm^3 de ioni mici, respectiv mari, pozitivi şi n_2 şi N_2 numărul pe cm^3 de ioni mici, respectivi mari, negativi, iar N_0 numărul de nuclee de condensare pe cm^3 de aer, atunci variaţia în timp a numărului de ioni mici este dată de:

$$\frac{dn_1}{dt} = q - \alpha\, n_1 n_2 - \eta_{12}\, n_1 N_2 - \eta_{10}\, n_1 N_0 \quad \text{şi} \quad \frac{dn_2}{dt} = q - \alpha\, n_1 n_2 - \eta_{21}\, n_2 N_1 - \eta_{20}\, n_2 N_0$$

unde α este coeficientul de recombinare al ionilor mici, iar η coficienţii de combinare a ionilor mici cu ionii mari şi cu nucleele de condensare. Ordinul de mărime al acestor coeficienţi este de 10^{-6}. In mod obişnuit există echilibru între producerea şi dispariţia ionilor de acelaşi semn şi mobilitate; prin urmare

[1]) Prin mobilitate se înţelege viteza medie a ionului într'un câmp de intensitate egală cu unitatea.

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$$

421. **Conductivitatea aerului.** Din cauza ionizării sale, aerul posedă o uşoară conductivitate electrică γ, exprimată prin conductanţa unui cilindru cu lungimea de 1 cm şi secţiunea de 1 cm^2. Această conductivitate este suma conductivităţilor γ_1 şi γ_2 corespunzătoare ionilor mici pozitivi şi negativi:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

unde

$$\gamma_1 = n_1 e k_1 \quad \text{şi} \quad \gamma_2 = n_2 e k_2$$

k_1 şi k_2 fiind mobilităţile, iar *e* sarcina elementară. Contribuţia ionilor mari este neglijabilă din cauza mobilităţilor mici pe care le au aceştia.

Atât numărul ionilor mici cât şi conductivitatea aerului depind de condiţiile geologice locale (radioactivitatea solului) şi de cele meteorologice (umezeala aerului de exemplu). Valorile medii stabilite în diferite puncte ale globului dau pentru γ valori cuprinse între $0{,}3 \times 10^{-4}$ şi $4{,}0 \times 10^{-4}$ u C.G.S. es.

Observaţia arată că numărul ionilor mici creşte în înălţime (prin intensificarea agentului ionizat, — radiaţia cosmică, — şi prin creşterea numărului nucleelor de condensare). Datorită acestui fapt conductivitatea creşte în înălţime: la 5 km valoarea ei se dublează, pentru ca la 20 km să fie de aproximativ 10 ori mai mare decât la sol.

422. **Câmpul electric terestru.** Suprafaţa pământului prezintă o uşoară electrizare negativă. *Densitatea sarcinei electrice superficiale a solului* variază între limite mari, valorile medii aşezându-se între -10^{-4} şi -10^{-3} u C.G.S.es. Totodată excesul de ioni mici pozitivi (vezi § precedent) conferă aerului o *sarcină electrică spaţială* pozitivă. Densitatea medie a acestei sarcine este între 0,003 şi 0,6 u C.G.S.es. In anumite cazuri aerul poate avea un exces de sarcini negative.

Sarcina superficială a solului produce un *câmp electric*, care se face simţit în cuprinsul atmosferii. Deasupra unui teren plan şi orizontal, liniile de forţă sunt verticale iar suprafeţele echipotenţiale, orizontale. Deasupra unui teren accidentat, aceste suprafeţe conturează reliefurile şi obstacolele, îngrămădindu-se în părţile proeminente, coborînd şi distanţându-se în depresiuni.

In mod obişnuit, problemele electricităţii atmosferice se tratează în ipoteza unui sol plan şi orizontal. Cum în acest caz componentele orizontale ale câmpului sunt nule, câmpul electric E se exprimă prin componenta verticală

$$\overline{E} = -\,\mathrm{grad}\, V = \frac{dV}{dh}$$

unde V e potenţialul iar h înălţimea. In mod curent câmpul electric terestru se exprimă prin gradientul de potenţial, dat de variaţia în volţi a potenţialului între sol şi înălţimea de 1 m.

Variaţia câmpului cu înălţimea este dată de formula lui Poisson care în cazul nostru devine:

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\,4\pi\rho \ (\text{u C.G.S.es})$$

ρ fiind densitatea sarcinei electrice spaţiale a aerului. Formula se mai scrie:

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{dV}{dh}\right) = -4\pi\rho$$

unde paranteza reprezintă valoarea absolută a câmpului. Prin integrare:

$$\frac{dV}{dh} = -4\pi\rho h + a$$

Determinarea constantei de integrare a se face considerând cazul când $h = 0$ şi pentru care, conform teoremei lui Coulomb:

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_{h=0} = a = -4\pi\sigma$$

unde σ e densitatea sarcinei electrice superficiale a solului. Cum această sarcină e negativă:

$$\frac{dV}{dh} = -4\pi(h\rho - \sigma)$$

care este formula generală a câmpului electric terestru. Ea arată că deoarece sarcina spaţială ρ e pozitivă, câmpul (în valoare absolută) trebue să scadă în înălţime. Observaţiile confirmă acest lucru.

Gradientul de potenţial, măsurat în diferite puncte ale globului, are valori medii cuprinse între 40 şi aproape 400 V/m. In general câmpul electric terestru e dirijat în jos (câmp pozitiv conform convenţiei adoptate în fizica atmosferei, sarcină superficială negativă). Câteodată însă, pe timp frumos, se produce o inversare a câmpului, probabil datorită deplasării în regiunea de observaţie a unor mase de aer cu o apreciabilă sarcină spaţială negativă.

423. Curentul de conducţie. Sub acţiunea câmpului electric terestru, ionii pozitivi se dirijează în jos, iar cei negativi în sus, după liniile de forţă. Curentul electric rezultat poartă numele de *curent vertical* sau *curent de conducţie*. El se datoreşte ionilor mici. Densitatea lui este dată de:

$$J = J_1 + J_2$$

unde componenta pozitivă J_1 şi cea negativă J_2 sunt:

$$J_1 = \gamma_1 E \quad \text{şi} \quad J_2 = \gamma_2 E,$$

E fiind câmpul iar γ_1, şi γ_2 conductivitatea ionilor mici pozitivi şi negativi. Măsurători executate în diferite puncte ale globului arată că densitatea curentului de conducţie variază între limite mici, fiind cuprinsă între 1×10^{-16} şi 4×10^{-16} A/cm². In general curentul de conducţie tinde să rămână constant la toate latitudinile şi în înălţime. Acest fapt constitue o dată fundamentală a electricităţii atmosferice.

424. Interdependenţa mărimilor electrice şi influenţa factorilor meteorologici. Mărimile electrice mai înainte arătate şi care servesc la caracterizarea stării electrice a aerului, sunt într'o condiţionare reciprocă; totodată ele sunt puternic influenţate de factorii meteorologici.

După cum s'a văzut, conductivitatea electrică creşte cu înălţimea. Fenomenul este o consecinţă a sporirii ionizării aerului, produsă de intensificarea radiaţiei cosmice. In asemenea condiţii descreşterea observată a câmpului electric se impune ca o consecinţă a legii lui Ohm. In adevăr, una din premizele electricităţii atmosferice este că pe timp frumos nu se pot produce acumulări

de sarcini electrice în atmosferă. Prin urmare densitatea curentului de conducţie trebue să rămână constantă la toate înălţimile, ceeace implică conform legii lui Ohm, o inversă proporţionalitate între conductivitate şi câmp. Totodată conform ecuaţiei lui Poisson, descreşterea câmpului cere un exces de sarcini spaţiale pozitive. Cum se vede, între câmp şi conductivitate există o condiţionare reciprocă. Şi fiindcă conductivitatea este aceea asupra căreia acţionează agenţii ionizanţi, se poate spune că descreşterea câmpului şi sarcina spaţială pozitivă, sunt consecinţe ale creşterii conductivităţii în înălţime.

Această situaţie simplă, valabilă în înălţime, se complică în apropierea solului. Aci numărul ionilor mici pe cm³ de aer, care hotărăşte valoarea conductivităţii, nu depinde numai de intensitatea de ionizare ci şi de numărul nucleelor de condensare, practic inexistente la înălţimi mari. După cum am văzut, nucleele de condensare fixează prin adsorbţie ionii mici, transformându-i în ioni mari, care nu au vreun rol apreciabil în determinarea conductivităţii, dar care pot modifica sarcina spaţială.

In apropierea solului conductivitatea este influenţată de concentraţia în nuclee de condensare, variabilă cu condiţiile meteorologice (în special datorită vântului, care poate aduce mase de aer mai mult sau mai puţin bogate în nuclee). Ea mai depinde de ionizarea produsă de substanţele radioactive din scoarţă şi gazele radioactive degajate din scoarţă (degajarea fiind controlată de presiunea atmosferică, — de unde influenţa acesteia asupra mărimilor electrice). In fine, conductivitatea mai depinde de variaţiile temperaturii aerului (care controlează circulaţia convectivă, deci transportul dela sol în înălţime al nucleelor de condensare şi gazelor radioactive), de umezeala aerului (care are un oarecare rol în echilibrul ionic), etc.

b) Electricitatea timpului de furtună

425. Caracterele electrice ale timpului de furtună. In general, prin timp de furtună se înţelege prezenţa norilor de furtună şi căderea precipitaţiilor, care modifică starea electrică normală a aerului. Norii de furtună sunt imense depozite de sarcini electrostatice. Sub influenţa câmpurilor proprii acestor depozite, câmpul electric terestru creşte considerabil în valoare absolută, prezentând variaţii rapide şi inversări de semn. Totodată sarcinele electrice aduse de precipitaţii ca şi descărcările electrice (trăsnetul), se adaugă în mod temporar şi intermitent curentului de conducţie, mărind considerabil transportul de sarcini între atmosferă şi sol. In fine conductivitatea electrică a aerului creşte foarte mult prin apariţia de noi agenţi de ionizare, cum sunt de exemplu descărcările prin vârfuri, trăsnetul şi spargerea picăturilor de ploaie prin căderea lor pe sol.

In mod general, la apropierea norului de furtună, gradientul de potenţial al câmpului mai întâi creşte, apoi scade treptat, schimbând de semn (câmp negativ, sarcină superficială pozitivă). Inversarea se produce când norul se găseşte la o distanţă de ordinul a 10 km. Ea durează tot timpul furtunii şi încetează când, îndepărtându-se, norul ajunge la o distanţă de acelaşi ordin de mărime. Totodată câmpul sufere frecvente şi brusce variaţii cu schimbarea semnului, cauzate de descărcările electrice ale norului. Aceste fenomene se complică prin declanşarea precipitaţiilor şi evoluţia pe care o sufere între timp, norul însuşi. Amplitudinea variaţiilor câmpului pe timp de furtună poate ajunge şi depăşi chiar 20000 V/m.

Un element care joacă un rol important sub norul de furtună este sarcina electrică spaţială. Există unele indicaţii după care pe timp de furtună această sarcină este pozitivă şi excepţional de mare.

Creşterea densităţii sarcinei spaţiale sub norul de furtună se datoreşte descărcărilor electrice care se produc prin obiectele ascuţite dela sol. In condiţiile

normale ale câmpului electric terestru, sarcina superficială a solului, acumulată în vârfuri, se scurge liniştit în aerul înconjurător. Când sub acţiunea norului de furtună câmpul creşte considerabil, ionii revărsaţi prin vârfuri capătă energii suficiente pentru a ioniza prin ciocnire moleculele aerului înconjurător. La rândul lor, ionii noi astfel produşi sufăr influenţa câmpului electric: cei de semn contrar sarcinei superficiale pornesc către vârf, în timp ce ionii de acelaşi semn se îndepărtează după liniile de forţă ale câmpului. In consecinţă sarcina spaţială creşte. Şi pentrucă sub norul de furtună câmpul e deobicei inversat, această sarcină va fi pozitivă. Curentul produs de descărcarea printr'un vârf se poate calcula cu formula empirică:

$$I = a\,(E^2 - M^2)$$

unde I e curentul, în microamperi, care se scurge prin vârf în pământ, iar E câmpul în V/cm. Pentru cazul câmpurilor pozitive (curenţi pozitivi) $M = 7{,}8$ V/cm şi $a = 0{,}0008$; pentru cele negative (curenţi negativi) $M = 8{,}6$ V/cm şi $a = 0{,}0010$.

Curenţii produşi de descărcările electrice prin vârfuri pe timp de furtună constituesc unul din principalii factori care întreţin sarcina superficială a pământului. Ei aduc anual, pe fiecare km², circa —100 coulombi.

Numeroase observaţii arată că precipitaţiile transportă sarcini electrice. Astfel ploile ordinare, liniştite, aduc exces de sarcini pozitive iar aversele şi vijeliile cu ploaie (dar fără manifestaţii electrice), exces de sarcini negative. Ploile furtunilor cu manifestaţii electrice aduc exces de sarcini pozitive sau negative după caz (mai frecvent pozitive). Viscolul transportă în mod obişnuit exces de sarcini pozitive iar ninsoarea liniştită, unul de sarcini negative.

Sarcina transportată de precipitaţii variază între limite mari, dela 0,01 la 22,0 u CGSes pe cm³ de apă.

426. **Norul de furtună.** In general, manifestaţiile electrice se produc în acei nori întunecoşi şi denşi, cu o mare extensiune verticală şi generatori de averse, cărora li se spune *cumulonimbus*. Dimensiunile acestor nori sunt considerabile: în direcţie orizontală până la 10—15 km, uneori şi mai mult, iar în direcţie verticală până la 6 sau chiar 8 km. Inălţimea deasupra solului este de ordinul a 2 km. Norii cumulonimbus sunt sediul unor violenţi curenţi ascendenţi de aer, mai cu seamă în fruntea şi corpul norului.

In interiorul norului de furtună sarcinele electrice se separă după semn. Distribuţia sarcinelor se poate deduce din acţiunea pe care o are norul asupra câmpului electric terestru. Astfel, creşterea gradientului de potenţial atunci când norul e încă departe (fig. 196) arată existenţa sarcinelor pozitive în partea superioară, iar scăderea şi apoi inversarea gradientului când norul se apropie, prezenţa sarcinelor negative în partea inferioară. De fapt distribuţia sarcinelor în norul de furtună este cu mult mai complexă. Studiul variaţiilor câmpului electric terestru, ca şi sondagiile directe făcute în nori, au arătat că sub sarcinele negative inferioare există o oarecare concentraţie de sarcine pozitive, în regiunea de sub partea centrală a norului. In unele regiuni ale globului această concentraţie nu se produce.

Există numeroase teorii care caută să explice mecanismul separaţiei sarcinelor electrice în norii de furtună. După academicianul I. I. Frenkel, fenomenul trebue explicat în felul următor: Separarea şi acumularea sarcinelor electrice este un proces care se produce în orice nor, sub acţiunea gravitaţiei. Picăturile de apă şi cristalele de ghiaţă ale norilor fixează ionii negativi, lăsând în aer pe cei pozitivi. Sub acţiunea gravitaţiei, picăturile şi cristalele coboară încet, transportând sarcinele negative şi lăsând în aerul care rămâne în urmă, pe cei pozitivi. Acest fenomen capătă o mare amploare în norii de furtună şi sfârşeşte prin a determina manifestaţiile electrice.

Când depozitele de electricitate pozitivă şi negativă devin suficient de mari, se produc descărcări electrice. Dar separaţia sarcinelor continuă şi depozitele se refac repede, dând loc la alte descărcări. Descărcările se produc fie între doi nori (*fulgere*) fie între nor şi pământ (*trăsnete*).

427. **Acţiunile electrice ale norului de furtună.** S'a arătat în paragraful precedent, care este efectul câmpurilor proprii depozitelor electrice ale norilor asupra câmpului terestru. Dacă aceste depozite ar rămâne neschimbate, atunci variaţia gradientului de potenţial, produsă de deplasarea norului, ar fi cea arătată

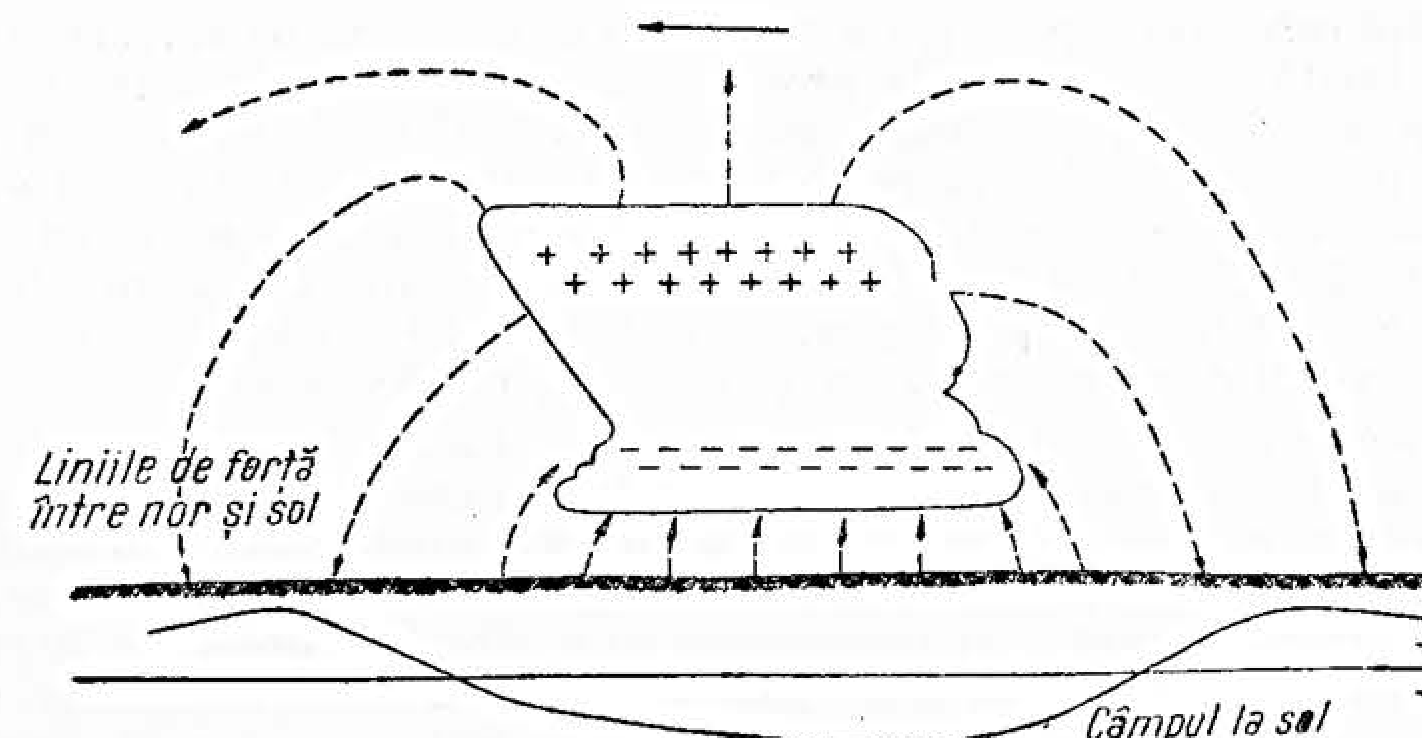


Fig. 196. — Structura electrică a norului de furtună.

de fig. 196. In realitate, din cauza descărcărilor, depozitele sufăr mari schimbări care se traduc prin variaţii brusce şi mari ale gradientului. Pe lângă aceasta descărcarea însăşi creează un regim tranzitoriu, nu mai puţin important.

La oarecare distanţă de descărcarea care se produce în nor, câmpul electric creiat prin descărcare este suma a trei termeni şi anume: *câmpul static*, *câmpul indus* şi *câmpul radiat*. Primul depinde de valoarea sarcinei prezente, cel de-al doilea de viteza ei de evoluţie, deci de intensitatea curentului produs de descărcare, iar cel de al treilea, de viteza de evoluţie a curentului. Dacă distanţa până la descărcare nu e prea mare, de exemplu sub 40 km, câmpul static este preponderent şi variaţiile sale reproduc pe cele ale sarcinei electrice. Din contra, la distanţe mai mari de 300 km, se consideră numai câmpul radiat. Acest câmp radiat de descărcările electrice ale norilor de furtună, constitue aşa numiţii *paraziţi atmosferici*, care se propagă în mod obişnuit până la depărtări de 5 000 km, şi care turbură audiţiile radiofonice.

Această structură complexă a câmpului electric al descărcărilor explică pentruce, dincolo de o anumită distanţă de nor, câmpul capătă un caracter oscilatoriu pe care descărcarea nu-l are.

Acţiunea câmpului static al descărcărilor asupra câmpului electric terestru se prezintă în felul următor:

Câmpul la sol, imediat înainte de producerea unei descărcări, are valori în general mai mici de 10 000 V/m. El este totdeauna mai slab când norul e mai îndepărtat şi revine la valoarea sa normală dacă distanţa până la nor e mai mare de 25 km. Variaţia bruscă pe care o produce descărcarea este în general mai mare decât câmpul produs de nor şi nu depăşeşte de obicei 20 000 V/m, la o distanţă de 2—3 km. Variaţia se înjumătăţeşte la 4—5 km şi scade sub 1 000 V/m dincolo de 25 km, ceeace înseamnă că sarcina negativă inferioară e cea care se neutralizează prin trăsnet.

428. **Descărcările electrice.** In cursul unei furtuni descărcările se succed la intervale care variază de obicei între 10 şi 30 s. Urma strălucitoare a descărcării pare unică (şi pentru unii în zig-zag, ceeace este inexact). In realitate de cele mai multe ori este vorba de o succesiune foarte rapidă de descărcări luminoase care, datorită perzistenţei imaginelor pe retină, iau caracterul unei descărcări unice. Adeseori descărcarea se ramifică; ramificaţiile apar pe prima urmă luminoasă şi dispar progresiv, în măsura apariţiei celorlalte urme. Ramificaţiile sunt divergente şi se opresc deobicei în aer. Uneori însă cele principale lovesc solul simultan. Trăsnetul comportă următoarele faze:

α) *Descărcarea principală (faza progresivă).* In prima descărcare, faza progresivă e formată dintr'o serie de *predescărcări*. Fiecare din acestea se prezintă sub aspectul unei linii puţin luminoasă, a cărei lungime e de ordinul a 50 m. Orice nouă predescărcare începe acolo unde s'a oprit precedenta şi ia o direcţie în general diferită. Totalitatea acestor predescărcări constitue *descărcarea progresivă prin salturi*. Intervalul de timp între două predescărcări e de ordinul a 100 microsecunde iar viteza de propagare, de ordinul a 50 000 km/s. Viteza descărcării progresive, din cauza pauzelor, este numai de 200 km/s.

β) *Descărcarea principală (faza regresivă).* Puţin înainte ca descărcarea progresivă să atingă solul, una sau mai multe egrete luminoase se ridică dela sol, în întâmpinare. Ele se unesc cu descărcarea progresivă la o înălţime de 20—150 m. Imediat după aceea are loc *descărcarea principală*, care se produce dela pământ în nor. Fruntea ei progresează cu o viteză de ordinul a 20 000 km/s. Drumul urmat de descărcarea principală rămâne luminos vreme de cel mult o jumătate de secundă. In momentul când descărcarea ajunge în dreptul unei ramificaţii, porţiunea până la sol se iluminează brusc. Fenomenul durează până în momentul când descărcarea ajunge la capătul ramificaţiei. Aceste iluminări poartă numele de *componentele* descărcării principale şi se propagă, probabil, cu viteze de peste 100 000 km/s.

γ) *Descărcările ulterioare.* Descărcările care urmează descărcării principale comportă o fază progresivă formată dintr'o predescărcare unică, pe drumul deja deschis şi cu o viteză de ordinul a 5 000 km/s. Această descărcare se face sub forma unei săgeţi care înaintează continuu şi care poartă numele de *descărcarea progresivă continuă*. Faza regresivă e în totul asemănătoare cu cea a primei descărcări.

δ) *Descărcările care nu ating solul.* Aceste fenomene comportă numai faza progresivă şi constau din una sau mai multe predescărcări progresive continui.

Toate descărcările comportă un fenomen iniţial, invizibil, anume o *descărcare-pilot*, slabă şi continuă, care deschide drumul predescărcărilor. Această descărcare înaintează relativ încet în aerul încă insuficient ionizat.

Mai trebue arătat că secţiunea transversală prin « canalul » descărcării principale, care interesează calculul debitului curentului, este de câţiva milimetri până la câţiva centimetri patraţi.

Intensitatea maximă a curentului produs de trăsnete variază între 1 000 şi 150 000 A. Ca valoare excepţională se citează 220 000 A. In cea mai mare parte a cazurilor, intensitatea maximă este sub 10 000 A. Sarcina totală neutralizată prin trăsnet este de ordinul a 30 coulombi; ea depăşeşte în unele cazuri 160 coulombi. Trăsnetele au o lungime care depinde de înălţimea bazei norului de furtună şi care este de obicei de 2 până la 3 km.

429. **Forme particulare ale descărcărilor.** Prin natura lor sau prin condiţiile în care se produc, descărcările electrice iau înfăţişări diferite:

— *Descărcările între nori* au în mod obişnuit aspectul unei urme luminoase (fulgerul obişnuit). Dacă urma e ascunsă de nor, atunci norul se iluminează (fulger difuz, fulger în suprafaţă).

— *Descărcări în interiorul norilor.* Condiţiile în care se produc aceste descărcări sunt puţin favorabile observării directe. Ele se prezintă deobiceiu sub aspectul unui slab fulger difuz.

— *Descărcări care nu ating solul.* Sunt deobicei descărcări progresive în salturi, neutralizate de sarcina spaţială dintre sol şi nor.

— *Descărcări prin părţile superioare ale norilor,* deci dirijate în sus. Asemenea descărcări se observă foarte rar şi totuşi, — se pare, — sunt destul de frecvente. Au aspectul fulgerului obişnuit sau al celui difuz.

— *Trăsnetul globular.* Este un fenomen destul de rar. Are forma unui glob luminos care coboară încet, poate pătrunde în case (prin coşuri, de ex.) şi care lovindu-se de obstacole, sare îndărăt ca o minge. Globul dispare subit, cu sau fără explozie. Stricăciunile pe care le produce sunt relativ mici dar de natură foarte variată.

— *Trăsnetul sub formă de mărgele* este fie un trăsnet globular multiplu, fie o succesiune de mici mărgele luminoase. In acest din urmă caz trăsnetul poate fi o simplă iluzie, datorită faptului că o descărcare unică nu are aceeaşi luminozitate pe tot parcursul ei şi că dacă descărcarea e slabă, ea este vizibilă numai în unele puncte.

— *Descărcările luminoase prin vârfuri.* Când câmpul electric local atinge valori de ordinul a 1 000 V/cm, descărcările prin vârfuri dau loc la fenomene luminoase. Ele se prezintă sub forma de mici flacări sau egrete luminoase, care par agăţate de vârfurile obiectelor ascuţite.

430. **Trăsnetul şi condiţiile de sol.** Natura electrodului terestru este foarte variată: sol plan şi descoperit, mai mult sau mai puţin umed; regiune accidentată, stâncoasă sau împădurită; oraşe cu clădiri foarte înalte, etc. După cum e de aşteptat, natura electrodului terestru joacă un rol foarte important în producerea trăsnetului. S'a constatat că trăsnetele care se produc pe clădirile excepţional de înalte încep cu o descărcare progresivă care porneşte, nu din nor, ci din scheletul metalic al clădirii.

S'a constatat deasemenea că în apropierea solului trăsnetele sunt dirijate de egretele luminoase care pornesc dela sol şi că aceste egrete apar pe obiectele mai înalte, mai ascuţite şi în general bune conducătoare. Acest lucru justifică folosirea paratrăsnetelor ca dispozitive pentru protejarea clădirilor împotriva trăsnetelor. Paratrăsnetul nu are vreun rol preventiv, adică nu împiedică producerea trăsnetului, cum se credea altă dată.

Cercetări recente au arătat o oarecare influenţă a naturii geologice a solului şi a conductivităţii electrice normale a aerului asupra locului de cădere a trăsnetului.

431. **Tunetul.** După cum se ştie, tunetul prezintă caractere deosebite după caz, dela un simplu sgomot strident şi fără rezonanţă (când trăsnetul se produce în apropiere), până la un huruit prelung şi caracteristic, însoţit de bubuituri. O descărcare electrică sub formă de scânteie produce întotdeauna în aer o undă care a putut fi fotografiată şi care se datoreşte creşterii brusce a presiunii pe traectul descărcării. Se presupune, că fenomene analoage dar de o amploare considerabilă şi o mare rapiditate, se produc în cazul fulgerelor şi trăsnetelor, dând naştere undelor sonore observate. Caracterele deosebite pe care le poate lua tunetul se explică prin aceea că sgomotele produse în diferite puncte ale descărcării sosesc cu întârzieri corespunzătoare distanţelor la care se găsesc aceste puncte, cum şi prin faptul că sgomotele se reflectă între nor şi sol, pe diferitele obstacole dela sol, etc.

c) Originea electricităţii atmosferice

432. **Consideraţii generale.** După cum s'a arătat la § 424, între mărimile care caracterizează starea electrică a aerului există o interdependenţă, care permite împărţirea fenomenelor electrice atmosferice în trei grupe:

α) sonorizarea aerului şi conductivitatea electrică pe care o produce;

β) sarcina superficială a solului şi câmpul produs de ea în cuprinsul atmosferii;
γ) curentul de conducţie şi excesul de sarcini pozitive în atmosferă.

Cauzele ionizării aerului, ale curentului de conducţie şi ale excesului de sarcini pozitive au fost lămurite la §§ 420, 423 şi 424. Cât priveşte sarcina superficială a solului şi câmpului electric terestru, ele se explică după cum urmează:

Transportul de sarcini pozitive la sol, pe timp frumos şi prin curentul de conducţie, ar trebui să neutralieze sarcina negativă superficială a solului în mai puţin de 15 minute. Totuşi această sarcină subsistă, ceeace înseamnă că e mereu reînoită. Reînoirea ei se datoreşte norilor de furtună care în fiecare moment şi în diferite regiuni ale globului acţionează neîncetat. Sistemul format de totalitatea acestor nori constitue o imensă maşină electrostatică, funcţionând fără încetare, care încarcă armăturile condensatorului sferic format de suprafaţa pământului şi păturile de aer, bune conducătoare electrice, situate în atmosfera înaltă. Transportul sarcinilor la sol se face prin descărcările între nor şi sol şi mai cu seamă prin cele care se produc la sol prin vârfuri, ambele adunând exces de sarcini negative. Acest transport compensează şi depăşeşte excesul de sarcini pozitive adus de precipitaţii şi de curentul de conducţie în regiunile de timp frumos. Ca urmare pământul îşi păstrează sarcina sa negativă.

Cu aceste lămuriri mecanismul menţinerii stării electrice a aerului este următorul: Electricitatea atmosferică îşi are originea în marile procese electrice care se produc în interiorul norilor şi care se alimentează din energia de care dispune atmosfera. Prin desfăşurarea acestor procese, diferenţa de potenţial între sol şi atmosfera înaltă ar trebui să crească neîncetat; această creştere e împiedicată însă prin curentul de conducţie mai cu seamă care, neutralizând sarcinile negative şi pozitive ale condensatorului sferic, menţine diferenţa de potenţial între anumite limite. Astfel, generatorului electric al atmosferei i se adaugă un element regulator: ionizarea naturală a aerului, produsă de agenţii ionizanţi cosmici şi terestri.

IV. MĂSURĂTORI ELECTRICE ŞI MAGNETICE

A. Generalităţi asupra măsurătorilor

1. **Măsurarea unei mărimi** constă în esenţă, din compararea ei cu altă mărime de acelaşi fel, luată ca unitate.

Măsurătorile pot fi *directe* şi *indirecte*.

Cele directe constau din determinarea experimentală directă a valorii mărimii măsurate.

In cele indirecte valoarea mărimii de măsurat se obţine prin calcul, făcându-se uz de o relaţie funcţională exprimată printr'o formulă. In general, expresia ia forma

$$X = F(a, b, c, \ldots A, B, C, \ldots)$$

în care

$a, b, c, \ldots$ reprezintă anumite cantităţi măsurate;

$A, B, C, \ldots$ reprezintă anumite constante

$F_i \ldots\ldots$ reprezintă o relaţie funcţională între cele de mai sus şi cantitatea X de măsurat indirect.

2. **Sistemele de unităţi** întrebuinţate în general în măsurătorile electrice sunt sistemele CGS (centimetru-gram-secundă) şi MKSA (metru-kilogram-secundă-amper).

3. **Etalonul** este realizarea materială a unităţii. Astfel, de exemplu, ohmul absolut este reprezentat cu un grad de precizie cunoscut, prin etaloanele de rezistenţă aflate în laboratoarele de metrologie ale diverselor ţări. Valoarea *etaloanelor secundare* care se construesc pentru a fi întrebuinţate în practică la diversele măsurători se determină prin comparaţie cu aceste *etaloane primare*.

4. **Valorile unei mărimi.** *Valoarea adevărată* a unei mărimi este numărul care exprimă raportul *exact* între acea mărime şi unitatea de măsură respectivă, înmulţit cu acea unitate.

Aceasta ar rezulta dintr'o măsurare neafectată de nici un fel de eroare şi este prin urmare inaccesibilă.

Valoarea măsurată (individuală) l *) este una oarecare dintr'un şir de valori ale unei mărimi, măsurate în aceleaşi condiţii.

Valoarea medie L a şirului de valori de mai sus, este media aritmetică a valorilor individuale $l_1, l_2, l_3, \ldots l_i$

$$L = \frac{\Sigma l_i}{n}.$$

Valoarea apropiată X_a a unei mărimi este valoarea obţinută prin măsurarea executată cu cele mai perfecţionate mijloace de care se dispune la un moment dat (de ex. prin măsurări absolute).

*) vezi STAS 2872-51

Ea diferă de valoarea adevărată cu cantitatea foarte mică ε

$$X_a = X \pm \varepsilon$$

şi tinde către X când ε tinde către zero.

Valoarea de referinţă X_0 a unei mărimi este valoarea obţinută prin măsurarea executată cu mijloace precise obişnuite (de ex. măsurarea prin comparaţie cu aparate etalon, prin metode de compensaţie, etc.).

5. **Erori. Definiţii.** *Eroarea* Δ [1]) a valorii măsurate a unei mărimi, este diferenţa în mărime şi semn dintre valoarea măsurată l şi valoarea de referinţă X_0

$$\Delta = l - X_0 .$$

Eroarea relativă Δ_r este raportul dintre eroarea Δ şi valoarea de referinţă adoptată X_0

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{X_0} .$$

Ea arată gradul de precizie al măsurătorii şi fiind un raport între două mărimi de aceeaşi natură, este un număr care de multe ori, se exprimă în %.

Exemplu. Dacă, măsurând o tensiune a cărei valoare de referinţă este $X_0 = 120$ V, se obţine valoarea $l = 119$ V, eroarea este

$$\Delta = l - X_0 = 119 - 120 = -1 \text{ V}$$

şi eroarea relativă în % este

$$\Delta_r = \frac{l - X_0}{X_0} 100 = \frac{-1 \text{ V}}{120 \text{ V}} 100 = -0{,}83\ \%$$

Erorile relative dau posibilitatea de a se face comparaţie între diversele grade de precizie ale măsurătorilor.

6. **Erori. Clasificare.** Erorile care pot afecta o măsurătoare se împart, după cauzele lor, în *erori propriu zise* şi *erori parazite* sau *greşeli*.

Acestea din urmă pot proveni dintr'o manipulare greşită, din alegerea nepotrivită a metodei de măsurare, din calcule neexacte, etc.

Erorile propriu zise se datoresc aparatelor de măsurat (întrebuinţate în condiţii normale), influenţei mediului exterior (câmpuri perturbatoare, temperatură, etc.) şi observatorului.

După caracterul lor, erorile propriu zise se împart în

— erori sistematice şi

— erori întâmplătoare (sau accidentale).

Erorile sistematice sunt acelea care au, în fiecare caz, o valoare determinată (constantă sau variabilă după o lege anumită) şi un semn precis. Ele pot fi în general compensate prin corecţii. Din această categorie fac parte: erorile de construcţie şi de etalonare a aparatelor, erorile de metodă şi cele datorite cauzelor exterioare (de exemplu câmpuri electrice şi magnetice constante). Ele pot fi reduse la valori neglijabile printr'o corectă etalonare a aparatelor, prin aplicarea corecţiilor impuse de erorile sistematice de metodă, etc.

Eroarea sistematică Δ_s *a unei valori măsurate* (individuale) sau *a valorii medii a unui şir de măsurători*, este considerată acea parte din eroarea care se face asupra unei valori, datorită uneia sau mai multor erori sistematice.

Corecţia C este valoarea egală şi de semn contrar cu eroarea sistematică Δ_s.

$$C = -\Delta_s .$$

[1]) În trecut denumită eroarea absolută

Adunând la valoarea măsurată a unei mărimi corecţia C cu semnul ei, mărimea de măsurat nu mai este afectată decât de celelalte erori *întâmplătoare*.

Erorile întâmplătoare sunt acelea ale căror mărime şi sens se abat la întâmplare într'o serie de măsurători executate asupra aceleiaşi mărimi, fiind datorite unor cauze multiple, ca fluctuaţiile accidentale ale influenţelor mediului exterior sau ale aparatelor de măsurat, lipsei de atenţie a observatorului, etc.

Ele nu sunt controlabile şi nu pot fi compensate prin corecţii.

Se deosebesc următoarele categorii de erori întâmplătoare:

Eroarea întâmplătoare δ *a unei valori măsurate* (individuale) este eroarea acelei valori măsurate (individuale) l faţă de valoarea adevărată X a acelei mărimi

$$\delta = l - X \qquad L = \frac{\Sigma l_i}{n} .$$

Eroarea întâmplătoare λ *a valorii medii* $L = \frac{\Sigma l_i}{n}$ *a unui şir de valori măsurate* (şi corectate de erorile sistematice) $l_1, l_2, \ldots l_i$, faţă de valoarea adevărată X este

$$\lambda = L - X .$$

Eroarea aparentă v *a unei valori măsurate (individuale)* dintr'un şir de măsurători executate în aceleaşi condiţii de precizie, este eroarea acelei valori măsurate (individuale) l faţă de valoarea medie a şirului

$$v = l - L .$$

Prezentarea rezultatului măsurării unei mărimi. Erorile întâmplătoare aparente v care constitue erorile efective ale măsurătorilor obişnuite, electrice şi de altă natură, ascultă de legea normală a probabilităţilor formulată de Gauss: curba reprezentând frecvenţa $\varphi(v)$ a producerii erorilor de aceaşi mărime $v_n = l_n - X$ dintr'un mare număr de măsurători ale aceleiaşi mărimi X, în funcţie de valoarea erorii, este dată de relaţia

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2}$$

(curba în clopot, curba probabilităţilor, curba lui Gauss din fig. 1), în care h este o constantă depinzând de precizia măsurătorilor.

Din legea de mai sus rezultă că *valoarea cea mai probabilă* a mărimii X este media aritmetică

$$L = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n} .$$

Eroarea comisă asupra acestei valori medii şi care se adoptă în general este *eroarea medie patratică* S

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n\,(n-1)}}$$

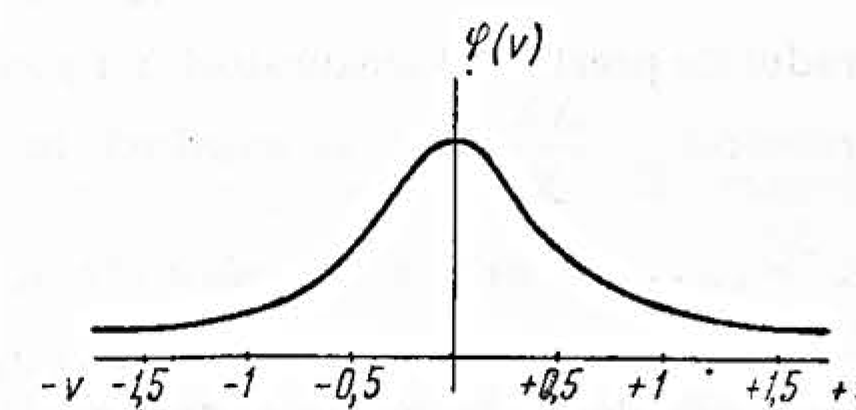


Fig. 1. — Curba lui Gauss.

în care $\Sigma v_i^2 = (v_1 - L)^2 + (v_2 - L)^2 + \ldots + (v_n - L)^2$, n fiind numărul de măsurători individuale executate.

Rezultatul final al măsurării unei mărimi X este

$$X = L \pm \sqrt{\frac{v_i^2}{n\,(n-1)}} .$$

Ca control intermediar, nici una din erorile aparente $v_1 = l_1 - L$, $v_2 = l_2 - L$, etc. nu trebue să fie mai mare decât eroarea limită λ_{lim} egală cu de trei ori valoarea erorii medii patratice S

$$v - L < 3S.$$

Exemplu de calcul. La măsurarea unei rezistenţe electrice s'au găsit într'un şir de 8 măsurători, valorile

$r_1 = 116{,}2\ \Omega$ $r_5 = 118{,}2\ \Omega$

$r_2 = 118{,}2\ \Omega$ $r_6 = 118{,}4\ \Omega$

$r_3 = 118{,}5\ \Omega$ $r_7 = 117{,}8\ \Omega$

$r_4 = 117{,}0\ \Omega$ $r_8 = 118{,}1\ \Omega$

care nu sunt afectate decât de erori întâmplătoare.

Din aceste valori se calculează:

Valoarea medie $L = \frac{\Sigma r_i}{8} = 117{,}8\ \Omega$

Erorile aparente: $v_1 = r_1 - L = 116{,}2 - 117{,}8 = -1{,}6\ \Omega$

$v_2 = +0{,}4\ \Omega$

$v_3 = +0{,}7\ \Omega$ etc.

Eroarea medie patratică

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)}} = 0{,}89\ \Omega.$$

Se constată în plus că nici una din erorile aparente nu este mai mare ca de trei ori S.

Deci $v - L < 3 \cdot 0{,}89 = 2{,}67\ \Omega$

Rezultă pentru *valoarea finală a rezistenţei măsurate*

$$r = 117{,}8 \pm 0{,}89\ \Omega \text{ sau}$$

$$r = 117{,}8 \pm 0{,}76\ \%$$

7. Calculul erorilor în măsurătorile indirecte. In cazul măsurării indirecte a unei mărimi exprimată în funcţie de alte mărimi auxiliare $a, b, c, \ldots$ etc. printr'o relaţie funcţională

$$X = F(a, b, c, \ldots)$$

gradul de precizie al măsurătorii nu poate fi definit decât de *eroarea relativă maximă probabilă* $\pm \frac{\Delta X}{X}$ care se exprimă în funcţie de erorile relative $\pm \frac{\Delta a}{a}$, $\pm \frac{\Delta b}{b}$, $\pm \frac{\Delta c}{c}$, ... ale mărimilor măsurate $a, b, c, \ldots$

Aceasta pentru motivul că aceste erori relative parţiale nu sunt în general cunoscute decât în mărime, nu însă şi ca semn.

Calculul erorii relative maxime probabile $\frac{\Delta X}{X}$ se poate face în două moduri:

α) *prin diferenţiere simplă.*

Pentru calculul erorii absolute

$$\Delta X = F(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c, \ldots) - F(a, b, c, \ldots)$$

se obţine prin desvoltarea în serie a acestei expresii, formula

$$\Delta X = \Delta a\, F'_a(a, b, c, \ldots) + \Delta b\, F'_b(a, b, c, \ldots) + \Delta c\, F'_c(a, b, c, \ldots) + \ldots \quad (7.$$

Impărţind apoi cu $X = F(a, b, c, \ldots)$ şi punând în evidenţă erorile relative parţiale $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$ etc. se obţine în definitiv:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} \frac{a}{F(a, b, c, \ldots)} F'_a(a, b, c, \ldots) + \frac{\Delta b}{b} \frac{b}{F(a, b, c, \ldots)} F'_b(a, b, c, \ldots) +$$

$$+ \frac{\Delta c}{c} \frac{c}{F(a, b, c, \ldots)} F'_c(a, b, c, \ldots) + \ldots$$

în care $F'_a(a, b, c, \ldots)$, $F'_b(a, b, c, \ldots)$, $F'_c(a, b, c, \ldots)$ etc. sunt derivatele parţiale ale funcţiei $F(a, b, c, \ldots)$ în raport cu a, respectiv b, respectiv c, etc. iar semnele erorilor relative $\pm \frac{\Delta a}{a}$, $\pm \frac{\Delta b}{b}$, $\pm \frac{\Delta c}{c}$ etc. se aleg astfel încât să rezulte pentru $\frac{\Delta X}{X}$ valoarea maximă probabilă.

β) *prin diferenţiere logaritmică.*

Deseori calculul erorii relative $\frac{\Delta X}{X}$ poate fi uşurat procedându-se în modul următor:

In expresia $X = F(a, b, c, \ldots)$ se logaritmează ambii membrii

$$\ln X = \ln F(a, b, c, \ldots)$$

Membrul al doilea se desface în general în câteva funcţii mai simple decât $F(a, b, c, \ldots)$ rezultând:

$$\ln X = \ln f_1(a, b, c, \ldots) + \ln f_2(a, b, c, \ldots) + \ln f_3(a, b, c, \ldots) \ldots$$

Se diferenţiază ambii membrii obţinându-se

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta f_1(a, b, c, \ldots)}{f_1(a, b, c, \ldots)} + \frac{\Delta f_2(a, b, c, \ldots)}{f_2(a, b, c, \ldots)} + \frac{\Delta f_3(a, b, c, \ldots)}{f_3(a, b, c, \ldots)} + \ldots$$

$\Delta f_1(a, b, c, \ldots)$, $\Delta f_2(a, b, c, \ldots)$, etc. sunt expresii de forma acelora din formula (7.1) de mai sus, adică

$$\Delta f_1(a, b, c, \ldots) = \Delta a f'_{1a}(a, b, c, \ldots) + \Delta b f'_{1b}(a, b, c, \ldots) + \Delta c f'_{1c}(a, b, c \ldots), \text{ etc.}$$

Calculul se continuă exact ca mai sus: se grupează termenii care cuprind pe Δa, respectiv Δb, repectiv Δc; se pun în evidenţă erorile relative $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$ etc. şi se aleg semnele lor astfel încât să se obţină pentru $\frac{\Delta X}{X}$ valoarea maximă probabilă.

Ambele moduri de calcul trebue să dea acelaşi rezultat, ceeace constitue o foarte utilă verificare a întregului calcul.

E x e m p l u. *Primul mod de calcul.*

Se consideră expresia $X = R\frac{a}{b}$ a unei rezistenţe măsurată la puntea Wheatstone,

$$F'_a(a, b, R) = R\frac{1}{b} \qquad F'_b(a, b, R) = -\frac{Ra}{b^2} \qquad F'_R(a, b, R) = \frac{a}{b}$$

$$\Delta X = \Delta a\frac{R}{b} - \Delta b\frac{Ra}{b^2} + \Delta R\frac{a}{b}.$$

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta R}{R}.$$

Se alege $\frac{\Delta b}{b}$ negativ pentru a obţine pentru $\frac{\Delta X}{X}$ valoarea maximă; deci

$$\left(\frac{\Delta X}{X}\right)_{\text{max. prob.}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta R}{R}.$$

Al doilea mod de calcul.

$$X = R\frac{a}{b}$$

$$\ln X = \ln R + \ln a - \ln b.$$

Diferenţiind:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}.$$

Se adoptă $\frac{\Delta b}{b}$ cu semnul — ca mai sus.

$$\left(\frac{\Delta X}{X}\right)_{\text{max. prob.}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta R}{R}.$$

Alte rezultate:

Dacă $X = a \cdot b \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

$$X = \frac{a}{b} \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$X = a + b \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{b}{a+b}$$

$$X = a - b \qquad \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a}{a-b} + \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{b}{a-b}$$

$X = \frac{a+b}{a+c}$ pentru $c > b$

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c-b}{a+c} + \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{\Delta c}{c} \cdot \frac{c}{a+c}$$

pentru $c < b$

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b-c}{a+c} + \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{\Delta c}{c} \cdot \frac{c}{a+c}$$

B Generalităţi asupra aparatelor de măsurat

8. **Erorile aparatelor de măsurat.** La aparatele de măsurat se deosebesc următoarele categorii de erori:

α) *Eroarea de indicaţie* care este diferenţa dintre indicaţia aparatului şi valoarea de referinţă a mărimii măsurate.

β) *Eroarea relativă a indicaţiei* care este raportul dintre eroarea de indicaţie şi valoarea de referinţă a mărimii măsurate.

γ) *Eroarea tolerată* care este eroarea maximă de indicaţie admisă de un standard de Stat.

9. **Gradul de precizie** a aparatelor de măsurat este exprimat prin *clasa* (*de precizie*) a aparatului.

Clasa este definită printr'o anumită valoare a erorii tolerate, (considerată pozitivă sau negativă) exprimată în procente din indicaţia maximă a aparatului de măsurat.

Sunt cinci clase definite ca mai jos:

Clasa 0,2	cu eroarea tolerată de	± 0,2 %	din scara de măsură
Clasa 0,5	» »	± 0,5 %	» »
Clasa 1	» »	± 1,0 %	» »
Clasa 1,5	» »	± 1,5 %	» »
Clasa 2,5	» »	± 2,5 %	» »

Mai există şi clasa 0.1 pentru unele aparate de mare precizie, dar neoficializată de prescripţii.

Aparatele de clasa 0,1 şi 0,2 sunt utilizate în general pentru măsurători de precizie în laborator sau la platformele de încercări.

Aparatele de clasa 0,5 sunt utilizate pentru măsurători curente în laborator şi pentru măsurători de control în exploatare.

Aparatele de clasa 1 sunt utilizate pentru măsurători curente de control.

Aparatele de clasa 1,5 respectiv 2,5 sunt utilizate ca aparate de tablou obişnuite, ca aparate înregistratoare, etc.

Nu totdeauna aparatele cele mai scumpe sunt şi cele cu care se pot executa măsurătorile cele mai precise. Aceasta depinde de o alegere potrivită a aparatelor. Este foarte important ca aparatele de măsurat să fie robuste şi să reziste condiţiilor de lucru. Se poate spune că cele mai bune aparate sunt cele care rezistă la sguduiri şi lovituri, păstrându-şi în timp gradul de precizie. Deobicei, precizia aparatelor de măsurat nu se poate garanta pentru o vreme prea îndelungată; ea scade cu timpul de întrebuinţare a aparatelor.

10. **Factorul de calitate.** Un criteriu aproximativ pentru determinarea calităţilor unui aparat de măsurat este *factorul de calitate* (factor de merit), definit de expresia:

$$y = \frac{10 \text{ cuplul activ pentru o deviaţie de } 90^\circ \text{ în g cm}}{(\text{greutatea sistemului mobil în g})^{1,5}} = \frac{10\, C_{90^\circ}}{G^{1,5}}$$

Ca valori de orientare ale factorului de calitate pentru aparate de diverse sisteme se pot lua următoarele:

Sistemul aparatului	Factorul de calitate y
cu magnet permanent	1,0 — 1,2
electrodinamic	0,45 — 0,65
electromagnetic	0,7 — 0,8
de inducţie	0,6
termic	1,5 — 2

Factorul de calitate mecanică, riguros considerat, nu este acelaşi pe toată întinderea scării, la cele mai multe aparate variind în funcţie de diferitele poziţii de pe cadran.

11. Dispozitive de citire şi împărţirea scării. Majoritatea aparatelor de măsurat sunt înzestrate cu cadran şi ac indicator. Pentru aparatele obişnuite de control, acul indicator are forma unei lănci (fig. 2). Aceeaşi formă se menţine pentru aparatele de exploatare, la care, proporţiile acului indicator cresc, întrucât indicaţiile trebue să fie citite dela distanţă. La aparatele de precizie care se citesc numai dela distanţă mică, acul indicator este foarte subţire; sub ac este aşezată o oglindă, iar citirea se face când imaginea din oglindă este acoperită de însuşi acul indicator. Prin aceasta se evită erorile provenind dintr'o citire laterală a diviziunii respective (eroare de paralaxă). Vârful acului indicator are o grosime de aproximativ $\frac{1}{20}$ mm, iar gradaţiile scării sunt distanţate cu circa 1 mm, putându-se astfel citi până la 1/10 dintr'o diviziune (fig. 3).



Fig. 2—3. — Diverse forme de ace indicatoare.

Pentru măsurători de precizie, acul arătător se înlocueşte cu o rază luminoasă care are avantajul că nu îngreunează sistemul mobil al aparatului şi măreşte totodată sensibilitatea lui. Acest sistem se construeşte fie cu *dispozitiv de citire cu oglindă şi lunetă*, întrebuinţat exclusiv pentru laborator, fie cu *dispozitiv de citire cu spot luminos* (fig. 4 şi fig. 5).

In fig. 5 lampa *L* trimite un fascicol de raze luminoase pe oglinda *S*, trecând prin lentilele *K* şi *P*. Razele se reflectă în *S*, dând un spot luminos *B* pe scara aparatului, pe care se detaşează reticulul *Z*.

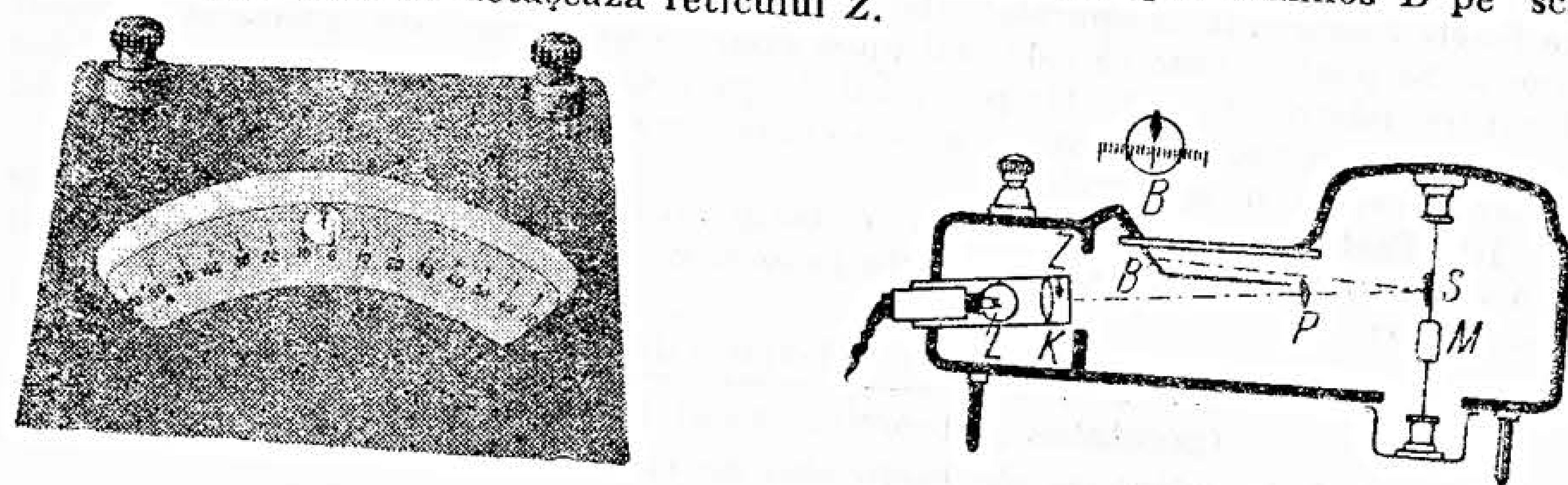


Fig. 4—5. — Vederea şi schema unui aparat cu spot luminos.

In exploatare, acolo unde este nevoie să se citească aparatele dela distanţă mare (de exemplu în sala cazanelor), nu se mai pot întrebuinţa aparate cu ac indicator, care ar trebui să aibă dimensiuni exagerat de mari.

In aceste cazuri, se utilizează aparate cu dispozitive indicatoare cu spot luminos sau cu bandă luminoasă, pentru lungimi de scară de 2—5 m, în special pentru indicarea sarcinii totale, a presiunii şi a consumului de vapori. Pentru mărirea clarităţii, se întrebuinţează la diverse aparate spoturi de diferite culori.

Scara aparatului se gradează corespunzător scopului.

Pentru aparatele de tablou (fig. 6 şi 7) scara are diviziuni puţine, putându-se citi dela distanţă. Pentru aparatele de precizie cu citire apropiată, scara este divizată

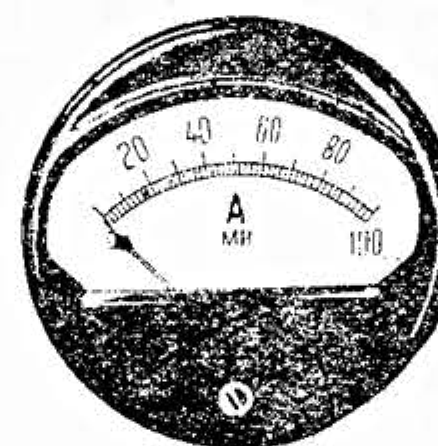


Fig. 6. — Aparat de tablou tip M N (sovietic).

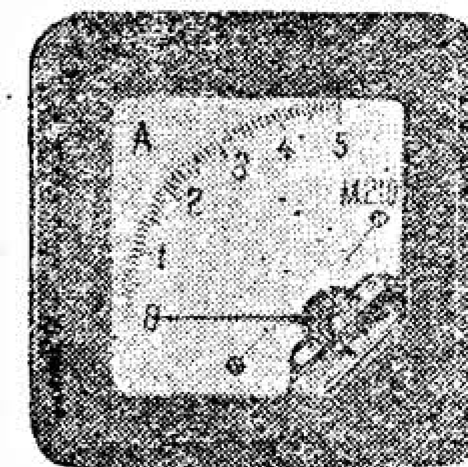


Fig. 7. — Aparat de tablou tip M 210 (sovietic).

într'un număr mare de diviziuni de circa 1 mm lăţime (fig. 8 şi 9). Scrisul trebue să fie citeţ, iar gradaţia scării să fie pe cât se poate zecimală, pentru evitarea erorilor de citire.

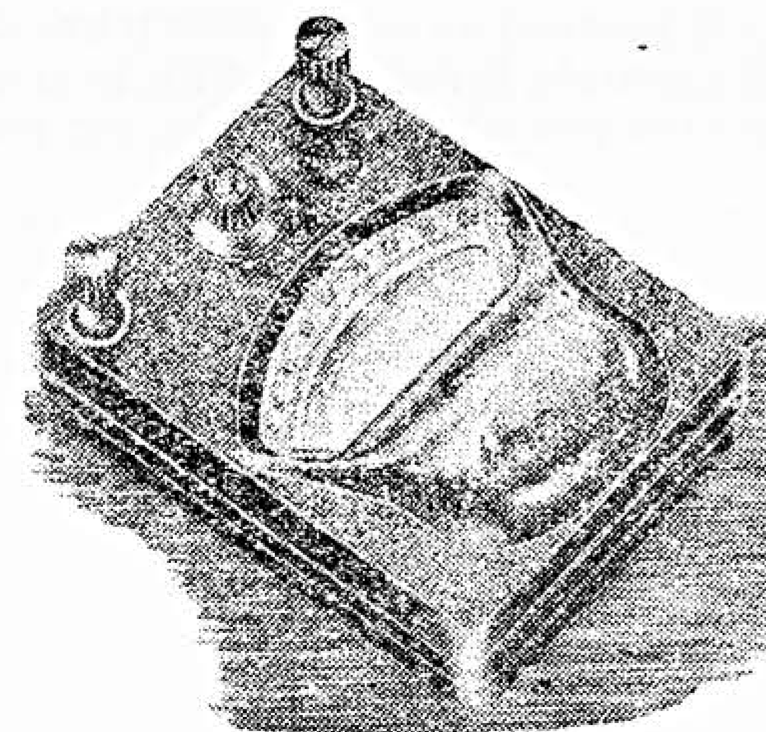


Fig. 8. — Aparat de precizie.

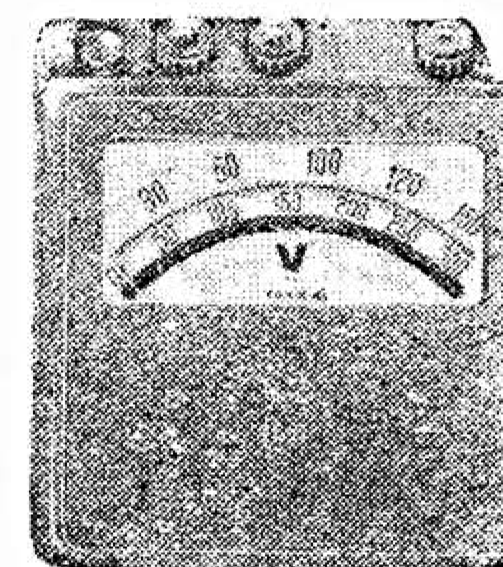


Fig. 9. — Aparat de precizie.

12. **Dispozitivele de amortizare** sunt necesare pentru evitarea oscilaţiilor prea numeroase ale acului indicator în jurul poziţiei de echilibru. Este de dorit ca amortizarea să nu fie nici prea slabă, dar nici prea puternică. In fig. 10 este reprezentată deviaţia α a aparatului în funcţie de timpul τ, pentru diverse grade de amortizare: *I* — mişcare oscilatorie amortizată, *II* — mişcare aperiodică critică şi *III* — mişcare aperiodică.

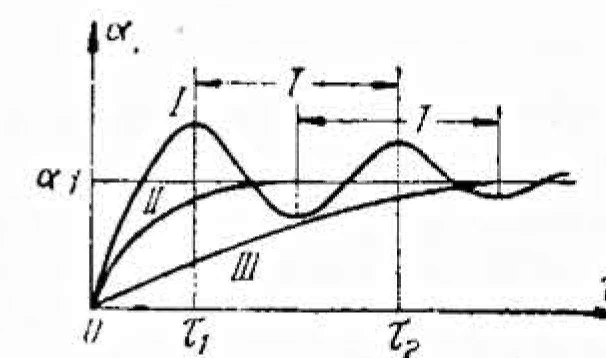


Fig. 10. — Diagrama amortizărilor: *I* — mişcarea oscilatorie amortizată; *II* — mişcarea aperiodică critică; *III* — mişcarea aperiodică tîritoare.

Timpul de amortizare al unui aparat de măsurat (după GOST) este intervalul de timp care s'a scurs din momentul de când s'a schimbat mărimea de măsurat şi până în momentul când acul aparatului nu se mai depărtează dela poziţia finală cu mai mult de 1 % din lungimea scării.

Dispozitivele de amortizare sunt de mai multe feluri. Există dispozitive *magnetice* (fig. 11) foarte puternice; acestea acţionează

prin curenţii turbionari (Foucault) care iau naştere într'un disc metalic *A*, care se mişcă odată cu acul, între polii unui magnet *M*. Amortizarea *cu aer* (fig. 12) (o paletă care se mişcă într'o cameră cu aer) este cea mai întrebuinţată, căci nu este influenţată de temperatură. Dispozitivele de amortizare *cu lichide*, deşi puternice, sunt rar utilizate din cauza dependenţei lor de temperatură. Eficacitatea unui dispozitiv de amortizare are ca măsură raportul dintre două maxime succesive în acelaşi sens ale deviaţiei sistemului mobil. Acest număr se numeşte « constanta de amortizare ».

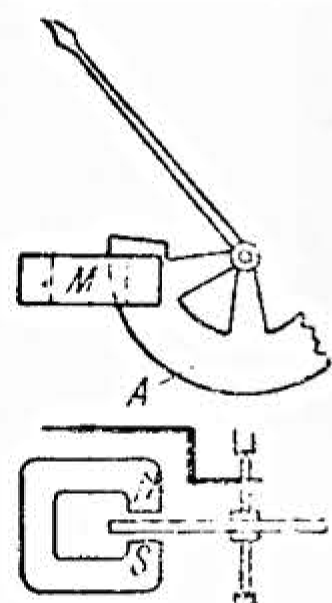
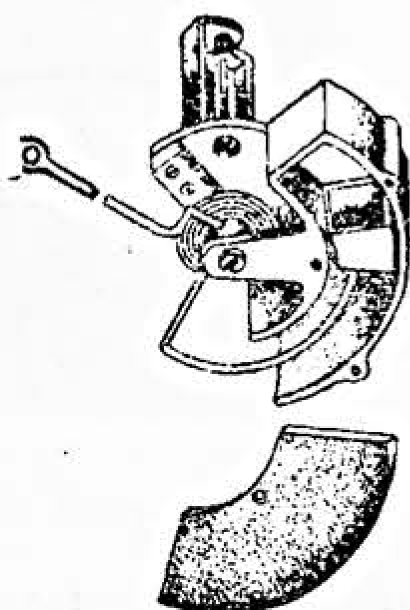


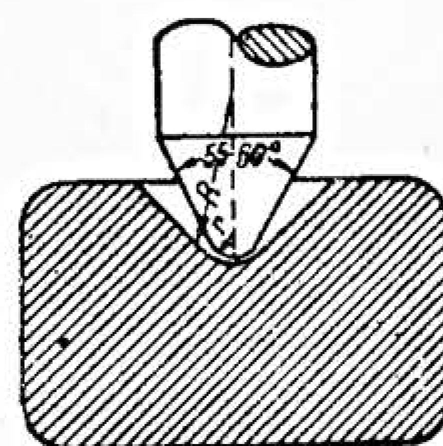
Fig. 11. — Dispozitiv de amortizare electromagnetic.

13. **Susţinerea organului mobil.** Cele mai multe organe mobile ale aparatelor de măsurat sunt aşezate pe vârfuri de oţel, cu o rază de curbură foarte mică ($r=0{,}015 - 0{,}1$ mm) (fig. 13). Vârfurile se sprijină în scobitura unei pietre preţioase, de rază *R*, deobicei safir sintetic, accesibil ca preţ. Raza de curbură a vârfului de oţel este în funcţie de greutatea organului mobil; deobicei este suficientă o rază de 0,05 mm. Cu această dimensiune se obţine o frecare redusă şi se poate merge cu greutatea organului mobil până la 2 g.

Un dispozitiv de susţinere elastic cu arcuri este, în general, complicat.

Susţinerea organului mobil pe cepuri (ca la contori) nu se întrebuinţează decât rar şi numai la aparate cu sistem mobil greu (la aparate înregistratoare). In general, acest sistem de susţinere este prea scump pentru aparatele obişnuite, iar pentru aparatele de precizie dă o frecare prea mare.


Fig. 12. — Dispotiv de amortizare cu aer.


Fig. 13. — Lagărul sistemului mobil.

14. **Punerea la zero a aparatelor de măsurat.** Aceasta este necesar să se facă prin dispozitive uşor accesibile din afara aparatelor. Pentru ca manevrarea acestor dispozitive să se facă fără pericol, trebue să existe o bună izolaţie între părţile conducătoare de curent şi aceste dispozitive. Ele sunt obligatorii pentru aparatele de măsurat de clasa 0,2 şi 0,5 şi se recomandă şi pentru instrumentele de clasa 1,5.

15. **Consumaţia proprie a aparatelor electrice de măsurat.** In tabela 1 se indică ordinul de mărime al consumaţiei aparatelor de măsurat, care interesează în mod deosebit în măsurările electrice.

Consumaţiile sunt calculate pentru 5 *A* în circuitul de curent, respectiv 100 *V* în circuitul de tensiune.

Tabela 1

Aparatul	Sistemul aparatului	Puterea absorbită în *VA* circuit de curent (5A)	Puterea absorbită în *VA* circuit de tensiune (100V)
Ampermetru	magnetoelectric	0,2 — 0,5	—
	cu redresori		
	termoelectric	1 — 2,5	—
	electromagnetic	3,5 — 10	—
	electrodinamic	4 — 7,5	—
	de inducţie	2 — 2,5	—
	termic		
Voltmetru	magnetoelectric	—	0,1 — 1
	cu redresori	—	4 — 6
	electromagnetic	—	6 — 12
	electrodinamic	—	5 — 10
	de inducţie	—	8 — 15
	termic		3 — 5
Wattmetru	electrodinamic	1,5 — 5	3 — 6
	de inducţie	2,5 — 5	
Fazmetru	electrodinamic	3,5	5 — 8
	ferodinamic		1 — 4
Contor	de inducţie	1 — 2,5	—
Ampermetru	înregistrator	5 — 15	10 — 20
Voltmetru	înregistrator	—	8 — 15
Wattmetru	înregistrator	3 — 10	

16. **Izolaţia aparatelor şi încercarea la tensiune.** Aparatele indicatoare şi înregistratoare trebue să aibă toate părţile conducătoare de curent bine izolate faţă de masa metalică, pentru a putea fi utilizate fără pericol. Tensiunile de încercare (indicate printr'o steluţă pe cadranul aparatului) în funcţie de tensiunile de serviciu sunt date în tabela 2.

Tabela 2

Tensiunea de serviciu V	Tensiunea de încercare V	Marcarea aparatelor cu o steluţă pe cadran: în trecut	Marcarea aparatelor cu o steluţă pe cadran: în prezent
40	500	neagră	In interiorul steluţei figurează cifra respectivă de exemplu 1 pentru 1 000 V, 2 pentru 2 000 V etc.
41 — 100	1 000	cafenie	
101 — 650	2 000	roşie	
651 — 900	3 000	albastră	
901 — 1 500	5 000	verde	

17. **Capacitatea de supraîncărcare a instrumentelor de măsurat.** Pentru siguranţa exploatării este necesar ca aparatele de măsurat care se întrebuinţează în instalaţiile electrice să poată suporta supraîncărcări fără a se defecta, date fiind condiţiile de exploatare în care aceste aparate vor fi destinate să funcţioneze. Solicitările aparatelor sunt de natură mecanică şi termică.

Prescripţiile din diverse ţări relative la condiţiile pe care trebue să le satisfacă aparatele de măsurat electrice prevăd anumite încercări de rezistenţă la supraîncărcări şi la şocuri de curent.

Astfel, se cere *) ca circuitul de curent ale aparatelor de măsurat să suporte timp de două ore o încărcare de 120 % din valoarea nominală a curentului.

*) In proiectul de STAS: Aparate electrice de măsurat. Condiţii generale.

După răcire până la temperatura normală, erorile aparatului nu trebue să întreacă erorile corespunzătoare clasei de precizie a aparatului.

Deasemenea, ampermetrele şi circuitele de curent ale wattmetrelor de tablou (exclusiv cele termoelectrice, termice, electrostatice şi cu redresori) trebue să suporte, fără a prezenta deteriorări mecanice, nouă şocuri de curent de zece ori mai mare ca cel nominal, de durată 0,5 s şi la intervale de un minut, şi un şoc de curent de aceiaşi mărime, durata şocului fiind de 1 s.

In general, din cauza solicitării mecanice, se distruge acul aparatului şi se defectează dispozitivul de amortisare, iar din cauza solicitării termice se poate arde înfăşurarea.

Pentru mărirea siguranţei la scurt-circuite, se întrebuinţează un transformator de intensitate pe secundarul căruia se montează aparatul de măsurat; în acest caz, transformatorul serveşte şi ca organ de protecţie a aparatului propriu zis, pentru solicitări mecanice şi termice.

18. **Influenţarea aparatelor de către câmpurile exterioare.** Aparatele de măsurat sunt influenţate de către câmpurile magnetice şi electrostatice exterioare, ceeace duce la indicaţii eronate. Diferenţa de indicaţii admisibilă poate atinge valori de ± 3 % pentru un câmp de 5 Oe. *)

După cum se ştie, intensitatea H a unui câmp magnetic într'un punct care se găseşte la o distanţă r (cm) de un conductor liniar infinit prin care circulă curentul I (A) este dată de relaţia:

$$H = \frac{2I}{10r} \cdot \text{Oe}, \quad (\text{în C.G.S.})$$

cu care se poate calcula intensitatea câmpului pentru diferite distanţe.

Acolo unde există curenţi foarte intenşi (10—20 000 A), trebue să se ia măsuri speciale (ecranare multiplă sau alte măsuri asemănătoare) pentru ca influenţa câmpurilor străine să poată fi coborîtă la o valoare admisibilă. In deosebi, influenţa este sensibilă la aparatele electrodinamice fără fier. Această influenţă poate da diferenţe de indicaţii până la 10% sau, la unele aparate de precizie chiar până la 25% pentru un câmp de 5 Oe. In cazul utilizării acestor aparate în curent continuu şi din cauza influenţei câmpului magnetic terestru, trebue făcute două citiri, inversându-se sensul curentului şi luându-se media citirilor. Pentru evitarea influenţei câmpurilor exterioare uniforme se recomandă întrebuinţarea sistemelor astatice, care au însă un cost ridicat.

Dintre câmpurile electrostatice care pot influenţa deviaţiile aparatelor de măsurat, cel produs de sarcina electrostatică a geamului aparatului, care ia naştere prin frecarea acestuia pentru ştergerea lui, poate fi deosebit de important. Acest efect poate fi în general anulat prin aburirea geamului.

19. **Influenţa temperaturii.** Cele mai multe aparate sunt influenţate de temperatura ambiantă şi de creşterea de temperatură a aparatului însuşi, produsă de consumaţia sa proprie. Efectele creşterii de temperatură sunt următoarele:

α) Rezistenţa înfăşurărilor de cupru creşte cu 4% pentru fiecare 10° C.

β) Elasticitatea arcurilor spirale scade cu aproximativ 0,2% pentru fiecare 10°C.

γ) Câmpul produs de magneţii permanenţi scade la creşterea temperaturii cu 2—3% pentru fiecare 10°C,

*) In proiectul de STAS: Aparate electrice de măsurat. Condiţii generale.

δ) Ivirea de f.e.m. termice de contact.

Toate efectele de mai sus pot apărea simultan la unele aparate, schimbând astfel precizia acestora. In consecinţă, pentru aparatele de precizie de clasa 0,1 şi 0,2 se iau, din punct de vedere constructiv, serioase măsuri pentru compensarea erorilor de temperatură, pentru ca această precizie să fie menţinută în limitele admise de prescripţii.

20. **Influenţa frecvenţei.** Variaţia frecvenţei cu ± 10 % faţă de valoarea nominală, sau în intervalul nominal de frecvenţe pentru care este construit un aparat, nu trebue să provoace erori de indicaţie mai mari decât cele corespunzătoare clasei respective *). Excepţie fac numai unele aparate ca: varmetrele, fazmetrele, etc. care sunt construite pentru anumite frecvenţe. Chiar şi la aparatele de inducţie se pot admite variaţii de frecvenţă de ± 5 % din frecvenţa nominală, fără să se nască erori inadmisibile. Din cauza inductanţei bobinelor, anumite montaje de compensare pentru eliminarea influenţei frecvenţei la voltmetre, datorită inductanţei bobinelor, se aplică numai pentru frecvenţe dela 200 până la 1 000 Hz. In unele cazuri se întrebuinţează astfel de montaje şi pentru circuitul de tensiune al wattmetrelor electrodinamice.

C. Generalităţi asupra elementelor de circuit: rezistenţe, inductanţe şi capacităţi

21. **Rezistenţe.** Unitatea de rezistenţă în sistemul MKSA este ohmul absolut (Ω). Etalonul primar de rezistenţă, ohmul absolut, a fost determinat cu mare precizie în funcţie de amperul absolut şi de timp, de către marile laboratoare de metrologie din U.R.S.S şi alte ţări.

Pentru măsurătorile efective, se întrebuinţează *etaloanele secundare*. Acestea sunt constituite din metale de mare rezistivitate, cu un coeficient de temperatură foarte redus şi au forma unor fire sau panglici. Valoarea lor se determină prin comparaţie cu etalonul primar de rezistenţă.

Rezistenţele etalon şi cele de precizie sunt construite aproape exclusiv din manganină.

22. **Manganina** este un aliaj de 84% Cu, 12% Mn şi 4% Ni care are proprietăţi electrice şi fizice relativ constante, o rezistivitate relativ ridicată (circa 0,42 Ω mm²/m), un coeficient de temperatură redus (0,00003/°C), şi f.e.m. de contact redusă, în atingere cu cuprul.

23. **Rezistenţele etalon** se construesc exclusiv din fire sau panglici de manganină înfăşurate în formă de bobine, fixate pe un capac izolant şi introduse într'o cutie metalică de protecţie, având adeseori aspectul din fig. 14.

Ele au în general patru borne, două borne de curent şi două de tensiune; la acestea două din urmă se leagă conductorii pentru măsurarea diferenţei de potenţial la bornele rezistenţei respective (de exemplu pentru măsurători de curent prin metode de opoziţie, subcap. *F*, § 98).

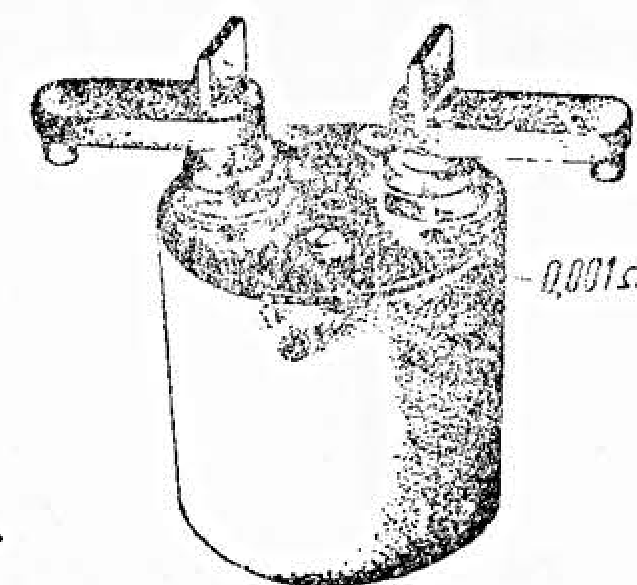


Fig. 14. — Rezistenţă etalon.

Rezistenţele etalon se construesc de obicei pentru valorile şi curenţii indicaţi în tabela 3.

*) In proiectul de STAS: Aparate electrice de măsurat. Condiţii generale.

Tabela 3

Valoarea rezistenţei Ω	Curent admisibil în amperi	
	In aer	In petrol
10 000	0,01	0,01
1 000	0,04	0,7
100	0,2	0,7
10	0,7	2
1	2	7
0,1	7	20
0,01	20	50
0,001	75	150
0,0001	200	300

Pentru utilizarea lor sub intensităţi mai mari de curent (col. 3-a din tabelă) aceste rezistenţe sunt cufundate într'o bae de petrol, înzestrată cu un agitator antrenat de un mic motor electric, astfel ca supratemperatura petrolului (ridicarea temperaturii faţă de mediul ambiant) să nu întreacă 10°C.

24. **Rezistenţele de precizie** întrebuinţate în măsurătorile curente de laborator au forma unor cutii de rezistenţe cu fişe (fig. 15, *a* şi *b*) sau cu ploturi şi manete (fig. 16, *a* şi *b*). Rezistenţele de contact ale fişelor sunt mai mici decât cele dintre ploturile şi periile respective, care ating 0,0002 — 0,0005 Ω.

Fig. 15. — Cutie de rezistenţe cu fişe de 11111 Ω; *a* — vedere; *b* — schema geometrică.

Pentru ca aceste valori să nu fie întrecute, suprafeţele de contact trebue menţinute curate.

Aceste rezistenţe sunt etalonate cu o precizie de 0,02% (pentru rezistenţele de mare precizie chiar 0,02‰) şi admit în general încărcările din tabela 4.

Tabela 4

Valoarea rezistenţei Ω	Curent admisibil A
0,1 — 0,4	1,5
1 — 4	0,8
10 — 40	0,25
100 — 400	0,08
1 000 — 4 000	0,03
10 000 — 40 000	0,008

Pentru a putea fi utilizate în curent alternativ, rezistenţele trebue să prezinte o inductanţă neglijabilă, modul de înfăşurare al firelor — respectiv al panglicilor — fiind astfel executat, încât unghiul de decalaj dintre curentul care circulă prin rezistenţă şi tensiunea aplicată la bornele acesteia să nu depăşească câteva minute. Deasemenea, rezistenţa nu trebue să aibă capacitate, iar valoarea ei trebue să fie independentă de frecvenţă.

Fig. 16. — Cutie de rezistenţe cu ploturi şi manete; *a* — vedere; *b* — schema electrică.

25. **Şunturile** (rezistenţe în derivaţie) se utilizează ori de câte ori este nevoie să se măsoare curenţi intenşi, mai mari decât pot suporta aparatele pentru măsurarea curentului (în special pentru aparatele cu bobină mobilă). Ele se construesc pentru curenţi până la 30 000 A.

Şunturile se utilizează în două forme:

α) şunturi simple (fig. 17)

β) şunturi universale (sau multiple, fig. 18)

Şunturile simple se construesc, în general, pentru o cădere de tensiune de

Fig. 17. — Şunt simplu cu cordoane.

60, 75, 100 sau 150 mV. Ele au patru borne, dintre care cele dela extremităţi se leagă de obicei la circuitul de măsură şi celelalte două, prin cordoane de rezistenţă mică, la aparatul de măsurat.

Șunturile universale sunt construite din mai multe rezistențe în serie, ansamblul fiind legat în paralel la bornele aparatului, iar extremitățile rezistențelor componente fiind legate la bornele corespunzând sensibilităților respective ale aparatului. Șunturile se montează fie în interiorul fie în exteriorul aparatului de măsurat.

Ca material pentru rezistențe se întrebuințează aproape exclusiv *manganina*, în formă de fire sau panglici. Piesele de legătură ale șunturilor sunt totdeauna suficient dimensionate pentru a se putea elimina căldura care ia naștere la punctul de contact.

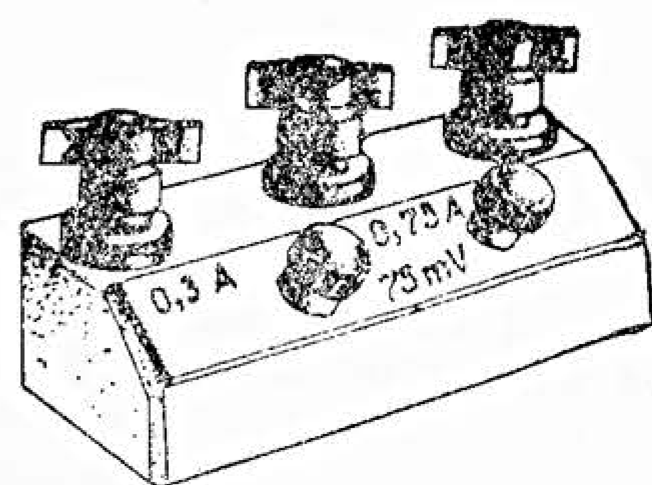
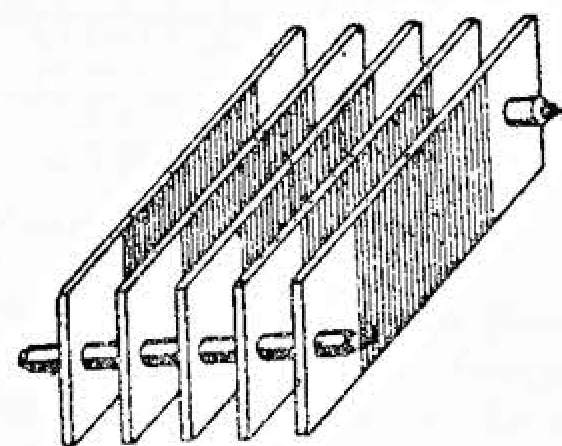
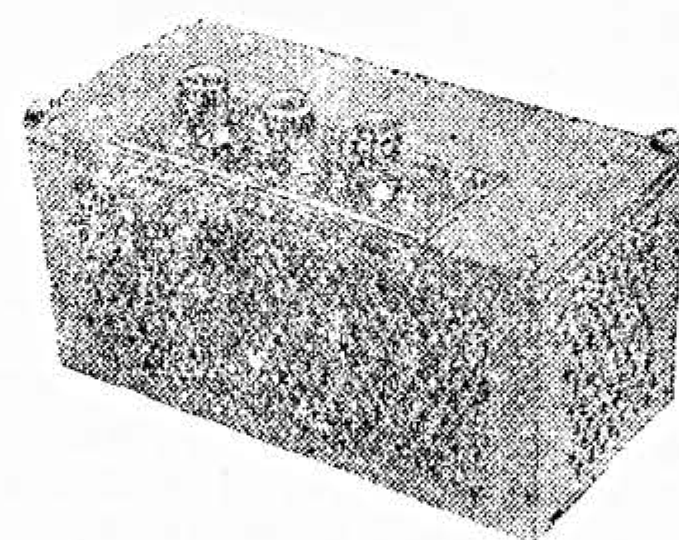


Fig. 18. — Șunt multiplu.

26. **Rezistențele adiționale** (în serie) se întrebuințează la toate aparatele de măsurat care au un circuit de tensiune, ca voltmetre (v. și subcap. *D*, § 106) wattmetre, fazmetre, etc., ori de câte ori este nevoie să se racordeze la tensiuni mai mari decât aceea pe care o poate suporta direct aparatul. Rezistențele se confecționează din fire înfășurate pe plăci izolante de preșpan, ardezie (fig. 19), sau role de porțelan. Înfășurarea bifilară pentru anularea inductanței proprii este rar întrebuințată, din cauza pericolului de străpungere între spirele înfășurării. Ca și șunturile, rezistențele adiționale se montează în interiorul sau în exteriorul aparatelor (fig. 20). Ele au două sau mai multe borne, după numărul de sensibilități pentru care sunt construite.

La rezistențele de manganină pentru voltmetre, curentul este de ordinul


Fig. 19. — Rezistență adițională.


Fig. 20. — Rezistență adițională (exterioară) pentru două sensibilități.

0,01 A pentru aparatele industriale și de 0,003 A pentru voltmetrele de precizie. Rezistențele se fac deobicei de circa 100 Ω/V pentru aparatele industriale și de circa 300—1 000 Ω/V pentru aparatele de precizie.

Pentru voltmetrele și circuitele de tensiune ale aparatelor de curent alternativ, rezistențele sunt mult mai mici, de ordinul 10 — 30 Ω/*V*.

Pentru aparate de precizie redusă (clasa 1 — 2,5) se întrebuințează rezistențe adiționale de cărbune (rezistențe chimice) care prezintă avantajul unui cost redus și al unui volum mic pentru o valoare mare a rezistenței, dar și desavantajul variației cu temperatura.

In tehnica măsurătorilor electrice, se întrebuințează și rezistențe variabile, acolo unde este necesar ca o rezistență să-și schimbe sensibil valoarea în funcție de creșterea tensiunii. De exemplu, întrebuințarea unei lămpi cu filament metalic ca rezistență adițională pentru un voltmetru cu fier mobil sau termic, face ca la

tensiuni mici, rezistența să fie circa a 10-a parte din valoarea rezistenței încălzite, curentul fiind deci la tensiune mică de 10 ori mai mare decât la întrebuințarea unei rezistențe constante, ceeace conduce la o mărire a indicațiilor la începutul scării.

27. **Reostate de reglaj al curenților și tensiunilor.** In tehnica măsurătorilor electrice se întrebuințează în special rezistențe reglabile sub formă de reostate cu cursor, constituite din fire sau benzi de constantan oxidate, sau de nichelină, înfășurate pe cilindrii izolanți de ceramică.

Ele se prezintă sub forma unui sul (reostat simplu) sau a două suluri cuplate între ele cu ajutorul cursorului (reostat dublu).

Pe placa de fabricație a reostatelor se indică rezistența lor maximă în Ω și curentul maximal admisibil în A, ca de ex. 100 Ω — 5*A*, 200 Ω — 3*A*, 780 Ω — —1,5 *A*, etc. în general curentul admisibil scăzând când numărul de ohmi crește. Pentru un reostat dublu rezistența marcată pe aparat de ex. 100 Ohmi reprezintă rezistența totală a ambelor suluri, iar curentul de ex. 5*A*, este acela pe care îl poate suporta firul din care este construit reostatul.

Aceste reostate se pot utiliza:

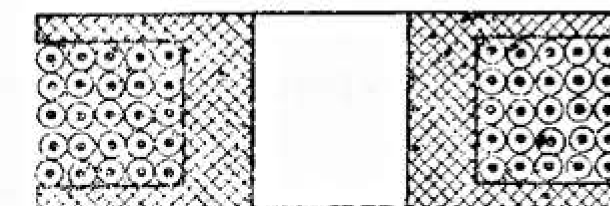
α) cu ambele suluri în serie, realizând astfel un reostat de 100 Ω — 5*A*.

β) cu ambele suluri în paralel, realizând un reostat de 25 Ω — 10*A*.

γ) în montaj potențiometric, ca aparat de reglaj al tensiunii, alimentând un reostat cu un sul cu o tensiune constantă și plecând cu circuitul de măsură dela una din bornele reostatului și dela cursor, obținându-se astfel între aceste două puncte o tensiune reglabilă, prin deplasarea cursorului, dela zero până la valoarea tensiunii de alimentare.

28. **Inductanțe.** *Unitatea* de inductanță în sistemul MKSA este Henry-ul. Un *etalon* de inductanță trebue să satisfacă următoarele condiții: constanță, reproductibilitate, coeficient de temperatură al inductanței redus și în plus, rezistență ohmică mică și variație mică a inductanței cu frecvența.

29. **Etaloanele primare de inductanță** sunt deobicei bobine din fir de cupru, înfășurate într'un singur strat pe un miez izolant și nemagnetic, a cărui formă și dimensiuni nu variază cu temperatura sau umiditatea. Inductanța este calculată din numărul de spire și din dimensiunile bobinei.


Fig. 21. — Bobină de inductanță etalon.

30. **Etaloanele secundare** de inductanță sunt tot bobine ca cele de mai sus, dar deobicei cu mai multe straturi (fig. 21), valoarea inductanței fiind determinată prin comparație cu etaloanele primare.

Miezul poate fi din bachelită, marmoră sau porțelan.

Etaloanele de inductanță proprie se construesc în general pentru valori de 0,0001 până la 1 *H*, iar cele de inductanță mutuală, de 0,001 până la 0,1 *H* și sunt astfel executate încât valoarea inductanței să nu varieze cu frecvența, dacă aceasta nu depășește 1 000 Hz.

31. **Variometrele** sunt inductanțe variabile, constituite dintr'o bobină fixă și una mobilă (sau grupuri de bobine), etalonate în inductanță proprie și mutuală pentru diverse poziții ale bobinei mobile.

32. **Bobinele de inductanță cu fier**, cu întrefier variabil, se întrebuințează în tehnica măsurătorilor electrice, ele servind fie la realizarea de circuite inductive pentru etalonări de aparate, fie la reglajul unei tensiuni alternative. Inductanța acestor bobine variază în funcție de valoarea curentului, pentru un același întrefier.

33. **Capacități.** *Unitatea* de capacitate în sistemul MKSA este faradul.

Un *etalon* de capacitate trebue să satisfacă următoarele condiții: constanță, reproductibilitate, rezistență de izolație mare, independența de tensiunea aplicată,

coeficient de temperatură al capacităţii redus şi în plus pierderi de energie nule în curent alternativ şi independenţa capacităţii de metoda de măsurare.

34. **Condensatorii** sunt ansambluri de conductori separaţi printr'un dielectric şi constituiţi astfel încât să aibă o capacitate cunoscută. Sunt alcătuiţi în general din foi de cositor, separate prin mică sau hârtie parafinată, grupurile alternative de foi fiind legate la câte o bornă comună. Intr'o cutie de condensatori sunt mai multe asemenea grupuri, care pot fi legate între ele în diverse moduri (cu ajutorul unor fişe sau cu alte dispozitive) spre a obţine diferite valori de capacitate (fig. 23).

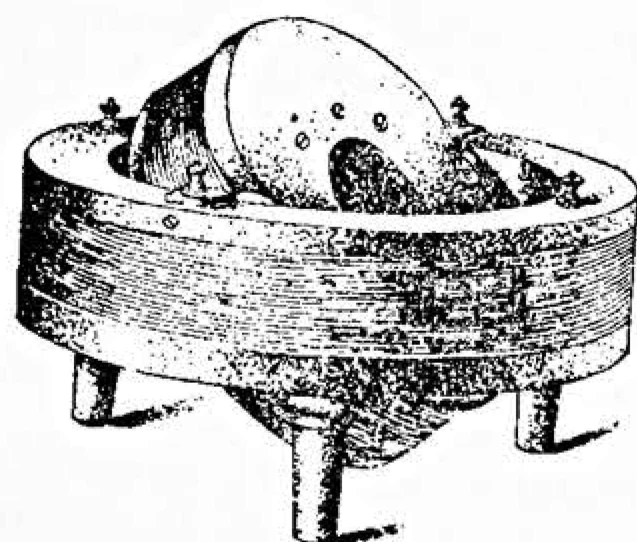


Fig. 22. — Variometru.

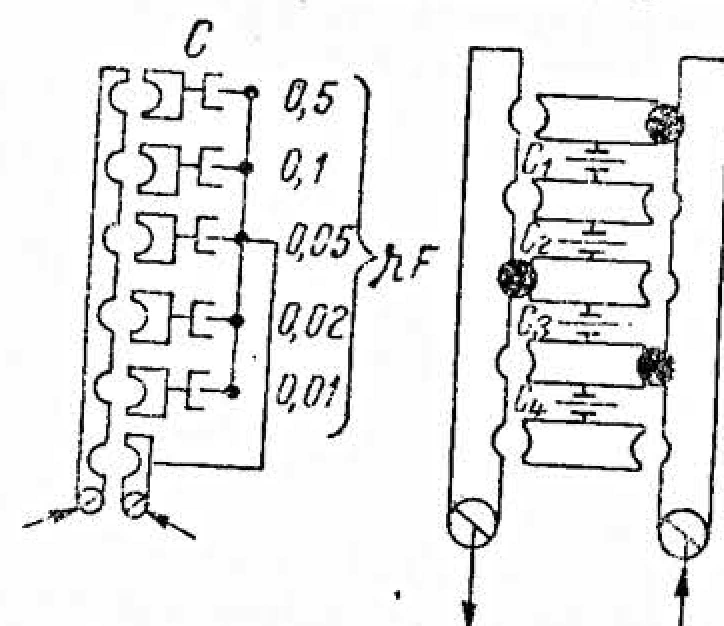


Fig. 23. — Cutie de condensatori.

Pentru frecvenţe înalte, se utilizează condensatori cu aer, una din armături fiind adeseori mobilă, şi permiţând astfel o variaţie continuă a capacităţii.

In instalaţiile de radio se întrebuinţează curent condensatori electrolitici, care permit a se realiza capacităţi mari sub volum redus.

35. **Unghiul de pierderi** δ, al unui condensator, este unghiul cu care decalajul dintre curentul capacitativ şi tensiunea aplicată la bornele condensatorului diferă de 90°.

36. **Factorul de pierderi** (sau factorul de putere) al condensatorului este $\cos(90 - \delta) = \sin\delta \simeq \operatorname{tg}\delta$.

Dacă un condensator imperfect se reprezintă printr'o capacitate C (farazi) în serie cu rezistenţă r (Ohmi), la frecvenţa f, atunci:

$$\operatorname{tg}\delta = 2\pi f C r = r C \omega.$$

Dacă un condensator se reprezintă printr'o capacitate C (farazi) în paralel cu o rezistenţă r (Ohmi) la frecvenţa f,

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{r\,C\omega}.$$

Pierderile în condensator (dielectrice şi prin curenţi de scurgere) la tensiunea U (volţi) sunt, dacă δ este mic:

$$P = 2\pi f\, C U^2 \operatorname{tg}\delta = C\omega\, U^2 \operatorname{tg}\delta \text{ waţi}.$$

37. **Condensatorii etalon** se construesc numai ca condensatori cu aer sau cu mică. Condensatorii cu aer se întrebuinţează numai pentru valori mici ale capacităţii, din cauza volumului lor prea mare. Cei cu mică sunt utilizaţi pentru valori mai mari decât 0,01 μF şi până la maximum 1 μF. Aceştia din urmă trebue să aibă absorbţia, histerezisul dielectric şi pierderile ohmice cât mai reduse. Factorul de pierderi trebue să fie mai mic de 0,001 pentru capacităţi de ordinul 0,25 μF, la audio-frecvenţe.

D. Aparate electrice de măsurat *)

38. **Clasificarea aparatelor de măsurat după principiul lor de funcţionare.** Se deosebesc următoarele tipuri principale de aparate electrice de măsurat:

α) aparate cu magnet permanent şi bobină mobilă (magneto-electrice),
β) aparate electromagnetice (cu fier mobil),
γ) aparate electrodinamice,
δ) aparate de inducţie,
ε) aparate termice,
φ) aparate electrostatice,
ψ) aparate cu redresori
λ) aparate cu termocuplu,
μ) aparate cu tuburi electronice
ν) aparate înregistratoare,
ο) oscilografe,
π) aparate de rezonanţă (de vibraţii).

39. **Marcarea aparatelor de măsurat.** Aparatele de măsurat au marcate pe cadranele lor simbolurile şi indicaţiile corespunzătoare atât felului lor de construcţie, cât şi felului curentului în care se întrebuinţează, modului de aşezare, clasei de precizie din care fac parte, etc.

---

*) Primul aparat de măsurat electric a fost construit în 1752, la Petersburg de Academicianul rus R i h m a n, colaboratorul lui L o m o n o s o v; aparatul a fost numit « Indicator electric » şi era destinat studiului electricităţii atmosferice. Acest aparat poate fi considerat ca precursorul electrometrului.

In a doua jumătate a secolului al XIX-lea şi la începutul secolului al XX-lea, savantul rus M. O. D o l i v o - D o b r o v o l s k i a desvoltat — printre altele — o activitate excepţional de importantă în domeniul tehnicei măsurătorilor electrice. In primul rând, el a construit o serie de aparate electrice pentru măsurătorile în curent alternativ ca: ampermetre şi voltmetre electromagnetice, precum şi aparate de inducţie (wattmetre şi fazmetre, cu câmp magnetic învârtitor şi organ mobil în formă de disc).

In al doilea rând, M. O. D o l i v o - D o b r o v o l s k i este autorul unei serii de lucrări de o mare importanţă pentru construcţia aparatelor de măsurat electrice, propunând realizarea de aparate ferodinamice cu un cuplu activ puternic şi independente de câmpurile magnetice exterioare, ca: wattmetre, fazmetre, etc.

In sfârşit, M. O. D o l i v o - D o b r o v o l s k i a propus şi a realizat noi metode electrice şi magnetice de măsurare, ca de exemplu metoda wattmetrică de măsurare a pierderilor în materialele feromagnetice.

Foarte importantă este contribuţia savantului rus B. S. I a c o b i (secolul al XIX-lea) la realizarea de aparate şi etaloane ale mărimilor electrice (etalonul de rezistenţă din fire de cupru şi perfecţionarea voltmetrului), care au contribuit esenţial la desvoltarea tehnicei măsurătorilor electrice şi în special la crearea sistemelor de unităţi electrice.

In acelaşi domeniu a depus o rodnică activitate şi savantul rus A. G. S t a l i t o v, către sfârşitul secolului al XIX-lea.

In sfârşit, Oficiul Central de Măsuri şi Greutăţi din Petersburg — devenit după 1917 Institutul Unional de Cercetări Metrologice Mendeleev —, în secţia sa specială de electricitate a realizat etaloanele de rezistenţă şi de forţă electromotoare, şi joacă astăzi un rol important pe plan internaţional, în tehnica măsurătorilor electrice.

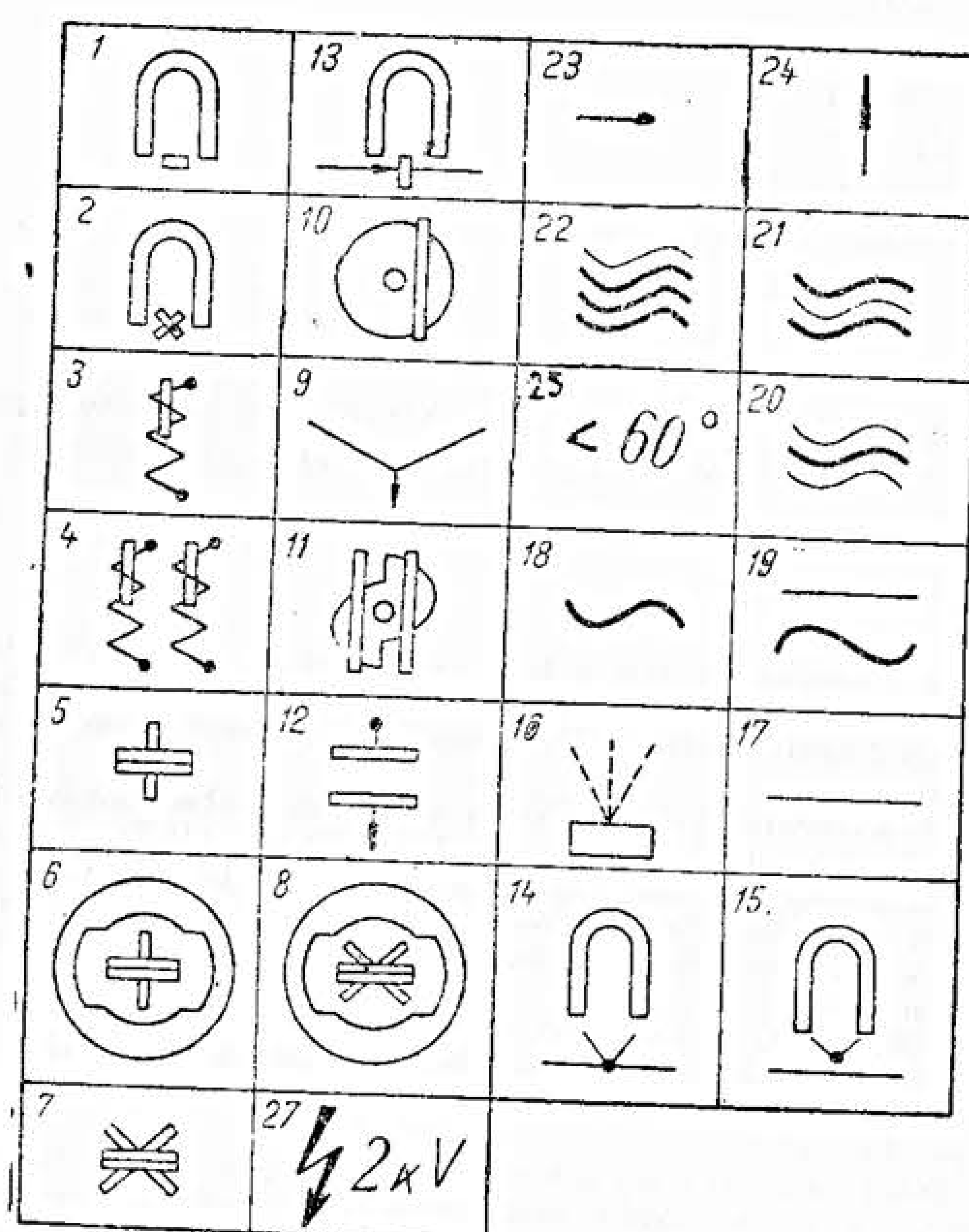
In ce priveşte industria de aparate de măsurat electrice, crearea şi desvoltarea ei au fost o consecinţă a planului de electrificare al U.R.S.S. GOELRO. In 1927 intră în funcţie fabrica de instrumente de măsurat ELECTROAPARAT, în 1929 întreprinderea PIROMETRUL, etc.

In prezent, fabricile de aparate de măsurat electrice produc cele mai variate tipuri de aparate până la acelea de cea mai înaltă clasă de precizie. Cele mai importante sunt menţionate în paragrafele respective din capitolul de faţă.

Aceste rezultate au putut fi obţinute graţie colaborării perfecte dintre Institutele de Cercetări Ştiinţifice, Institutele de Invăţământ Superior şi Intreprinderile Industriale din U.R.S.S. şi elaborării unei serii de publicaţii didactice, tehnice şi ştiinţifice, privind tehnica măsurătorilor electrice şi construcţia aparatelor de măsurat electrice (vezi Bibliografia).

In ce priveşte fabricarea aparatelor electrice de măsurat în ţara noastră, primul nostru plan cincinal prevede în programul său şi desvoltarea acestei industrii pentru a fi în stare să satisfacă nevoile impuse de planul de electrificare a ţării. Următor acestei sarcini o serie de întreprinderi, au organizat fabricarea de aparate electrice de măsurat (contori, aparate de tablou, transformatori de măsură, aparate de laborator, etc) învingând greutăţile inerente începutului, cu ajutorul în primul rând al documentaţiei tehnice pusă la dispoziţie de U.R.S.S. precum şi folosind experienţa căpătată de o serie dintre tehnicienii noştrii în practica făcută în acest domeniu în U.R.S.S.

Aceste simboluri şi indicaţii sunt:
α) Iniţiala sau numele unităţii de măsură.
β) Marca fabricii.
γ) Numărul de serie al aparatului.
δ) Simbolul aparatului arătând felul lui de construcţie, precum urmează (v. tabela de simboluri, alăturată):



Aparat cu magnet permanent şi bobină mobilă (magnetoelectric) ..... (1)
Aparat cu magnet permanent şi bobine încrucişate (fără cuplu mecanic antagonist) ..... (2)
Aparat electromagnetic (cu fier mobil) ..... (3)
Aparat electromagnetic fără cuplu mecanic antagonist ..... (4)
Aparat electrodinamic fără fier ..... (5)
Aparat ferodinamic ..... (6)
Aparat electrodinamic, cu bobine încrucişate, fără fier ..... (7)
Aparat ferodinamic cu bobine încrucişate ..... (8)
Aparat termic ..... (9)
Aparat de inducţie ..... (10)
Aparat de inducţie fără cuplu mecanic antagonist ..... (11)
Aparat electrostatic ..... (12)
Aparat cu redresori (în legătură cu un aparat cu magnet permanent şi bobină mobilă) ..... (13)
Aparat cu termocuplu (în legătură cu un aparat cu magnet permanent şi bobină mobilă) ..... (14)
Aparat cu termocuplu izolat (în legătură cu un aparat cu magnet permanent şi bobină mobilă) ..... (15)

Aparat de vibraţii (de rezonanţă) ..... (16)
ε) Simbol pentru felul curentului:
curent continuu ..... (17)
curent alternativ ..... (18)
curent continuu şi alternativ ..... (19)
curent trifazat (faze uniform încărcate) ..... (20)
curent trifazat (faze neuniform încărcate) ..... (21)
curent trifazat cu patru conductori cu faze neuniform încărcate ..... (22)
φ) Simbol pentru modul de aşezare al aparatului:
aşezare orizontală ..... (23)
aşezare verticală ..... (24)
aşezare înclinată ..... (25)
ψ) Simbol pentru frecvenţă, de exemplu 50Hz
λ) Simbol pentru tensiunea de încercare:
o steluţă cu un număr interior care indică tensiunea de încercare, sau semnul ..... (27)
μ) Un număr care arată clasa de precizie a aparatului, de exemplu.... 0,2
ν) Alte indicaţii (rezistenţa electrică, inductanţa diferitelor circuite, etc.)
Unele din indicaţiile de mai sus pot lipsi.

40. **Aparate cu magnet permanent şi bobină mobilă.** Aceste aparate pot fi considerate drept cele mai perfecţionate aparate de măsurat pentru curent continuu, putând ajunge la gradul de precizie de 0,2% sau chiar 0,1%.

Ele sunt constituite principial dintr'un magnet permanent *1*, în forma unei potcoave, confecţionat din oţeluri cu wolfram şi crom sau cobalt, cu piesele polare *2*, din fier moale. Aceste piese înconjură aproape în întregime un spaţiu cilindric, în care se găseşte un sâmbure de fier moale *3*, tot cilindric. In întrefierul dintre piesele polare şi cilindrul de fier se roteşte bobină mobilă *4*, fixată pe axul *5* într'un câmp radial şi uniform.

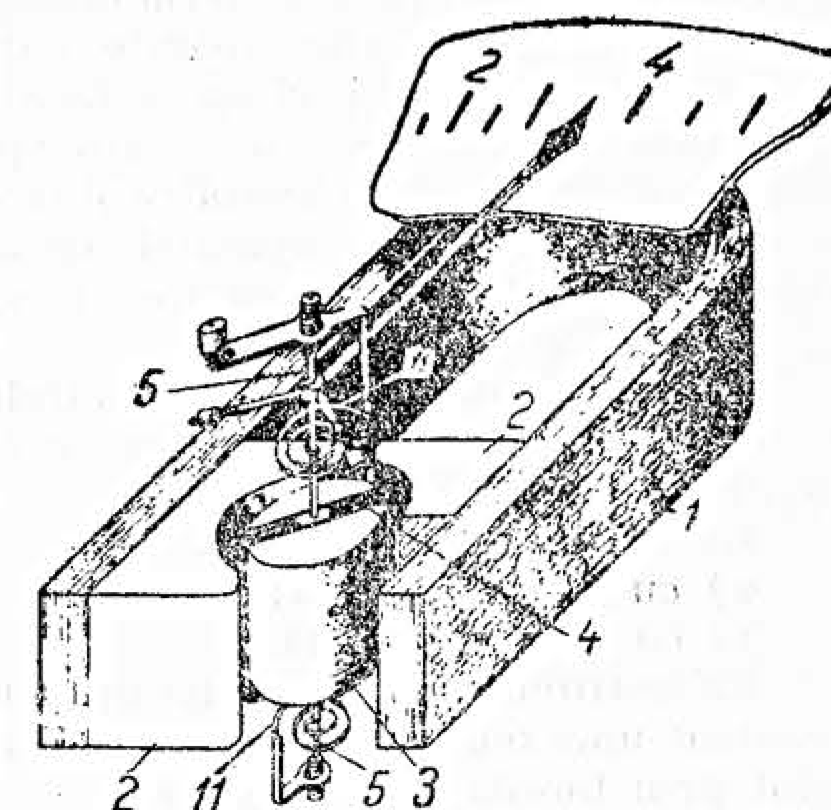


Fig. 24. — Aparat cu bobină mobilă şi magnet permanent.

Rezultă un cuplu activ M_a al aparatului, proporţional cu curentul I, $M_a = \Phi_0 I$, Φ_0 fiind fluxul total care străbate bobina mobilă. Cuplul antagonist M_r este proporţional cu deviaţia α a galvanometrului $M_r = \lambda\alpha$, rezultând la echilibru când $M_a = M_r$ relaţia $\alpha = \frac{\Phi_0}{\lambda} i$ adică deviaţiile sunt proporţionale cu curentul.

Din această cauză, diviziunile scării sunt uniforme pe toată lungimea ei. Bobina se află înfăşurată pe o ramă de aluminiu, care, mişcându-se în câmpul magnetic, este sediul unor curenţi induşi care servesc la amortisarea sistemului mobil; pentru aceste aparate, nu mai este necesar un dispozitiv special de amortisare, astfel cum posedă toate celelalte aparate de măsurat. Aducerea curentului la bobină se face prin două arcuri spirale *11*, aşezate de o parte şi de alta a bobinei, care dau naştere şi cuplului antagonist.

In prezent, magneţii permanenţi se fabrică din aliaje speciale cu proprietăţi magnetice superioare. Magneţii se execută în diverse forme, fiind mult mai uşori, pentru acelaşi câmp în întrefier, ca magneţii din oţel.

Câmpul magnetic variază după construcţia aparatelor, având valoarea de 200—3 000 Oe în întrefier, iar inducţia în fier variază între 100 şi 6 000 gauşi. Acul arătător este format dintr'un tub metalic foarte subţire, cu vârful în formă de cuţit.

Aceste aparate pot fi utilizate numai pentru curent continuu; pentru curent alternativ se vor utiliza în unire cu un redresor sau un termocuplu (subcap. *D*, § 63).

Ele se construesc adesecori ca milivoltmetre de 30—100 mV, cu rezistenţe interioare de valori rotunde de 1 Ω, 2 Ω, 10 Ω, etc., care pot fi uşor combinate cu rezistenţe adiţionale *R*, respectiv cu şunturi *S*, pentru ca aparatul să poată fi întrebuinţat ca voltmetru (fig. 25), respectiv ca ampermetru (fig. 26).

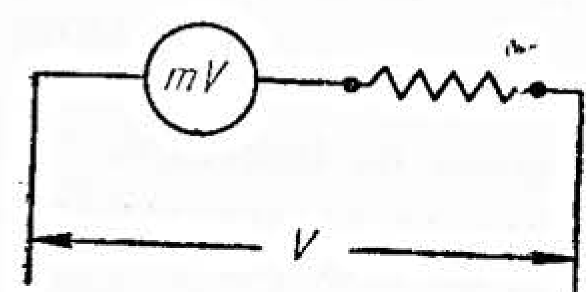


Fig. 25. — Milivoltmetru cu rezistenţă adiţională (voltmetru).

Rezistenţa uzuală a voltmetrelor este cuprinsă între 100 şi 300—1 000 Ω/V, iar curentul între 0,5 şi 30 mA.

Influenţa temperaturii este neglijabilă, fiind de ordinul 0,01—0,02% pentru fiecare grad Celsius.

Scara aparatelor poate fi gradată cu diviziunea zero la începutul scării, în care caz, pentru ca deviaţiile să fie în sensul bun, curentul trebue să circule într'un anumit sens în bobina aparatului (aparatul are deci o anumită polaritate). In cazul când diviziunea zero este la mijlocul scării, acul aparatului va devia înspre dreapta sau înspre stânga lui zero, după sensul curentului în bobină.

Există execuţii speciale de aparate cu bobina mobilă; acestea sunt tipurile cu *bobine încrucişate*, numite *logometre*, care funcţionează pe principiul măsurării raportului a doi curenţi. Aceste aparate se întrebuinţează mult în tehnica măsurării temperaturilor cu ajutorul termometrelor cu rezistenţă, sau pentru alte aparate care măsoară rezistenţa. Dacă întrefierul nu se face uniform ca la aparatul descris mai sus, scara aparatelor cu bobină mobilă se poate modifica şi face cu diviziuni neegale de pildă la aparatele de măsurat rezistenţa de izolaţie (ohmmetre, megohmmetre, etc. (subcap. *F* § 193 bis).

41. **Galvanometre.** Galvanometrele sunt aparate de măsurat cu ajutorul cărora se pot măsura curenţi electrici foarte mici.

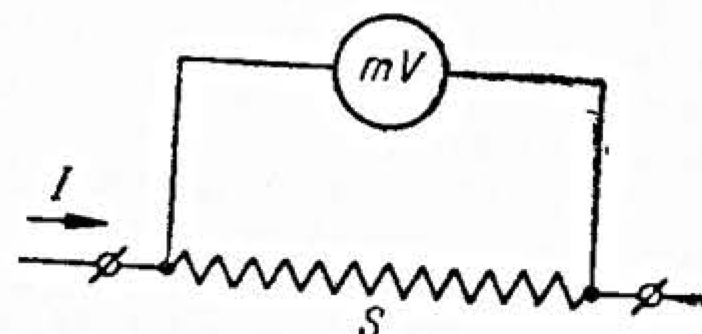


Fig. 26. — Milivoltmetru cu şunt (ampermetru).

Ele sunt de două tipuri:

α) **cu** magnet mobil;

β) cu bobină mobilă.

La instrumentele de primul tip, un magnet de dimensiuni reduse este suspendat în centrul unei bobine prin care circulă curentul de măsurat. Acest tip este reprezentat prin busola de tangente.

Galvanometrele cu bobină mobilă şi cu magnet permanent sunt astăzi întrebuinţate aproape exclusiv, fie sub formă de galvanometre de curent continuu pentru măsurarea curenţilor foarte mici, fie sub forma diferitelor aparate de curent continuu cu bobină mobilă şi magnet permanent (§ 39).

Galvanometrele cu oglindă au fixată pe axul aparatului (aici un fir de suspensie) o oglindă plană sau sferică. Ele sunt de două tipuri:

— cu citire subiectivă (oglindă plană);

— cu citire obiectivă (oglindă sferică).

La cele cu citire subiectivă, dispozitivul de citire este compus dintr'o lunetă înzestrată cu un reticul, cu ajutorul căreia se observă imaginea unei scări gradate,

reflectată de oglinda aparatului, astfel cum se vede în fig. 27. La mişcarea organului mobil, imagina scării se plimbă prin faţa reticulului din lunetă. Pentru a se putea face citirile, indicaţiile scării sunt înscrise invers.

La galvanometrul cu citire obiectivă, razele de lumină emise de o lampă specială trec printr'un condensor (purtând un reticul) şi cad pe oglindă; aici, reflectându-se, dau naştere pe scara aparatului, unui spot luminos (o pată luminoasă), având pe el imagina reticulară. Dispozitivul este reprezentat în fig. 28.

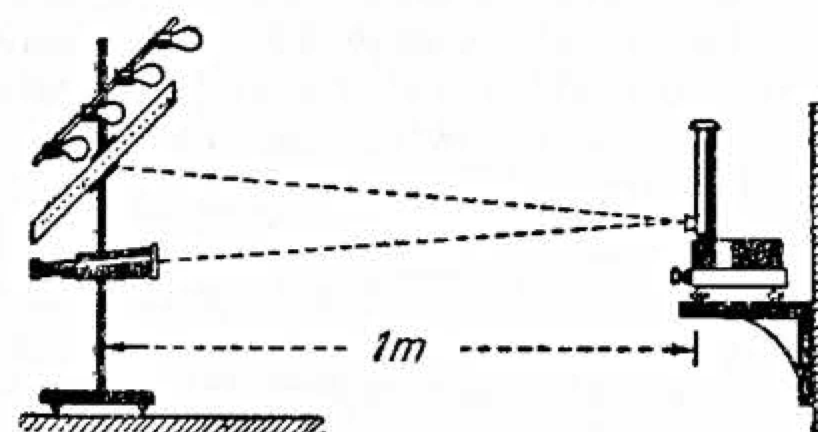


Fig. 27. — Galvanometru cu citire subiectivă

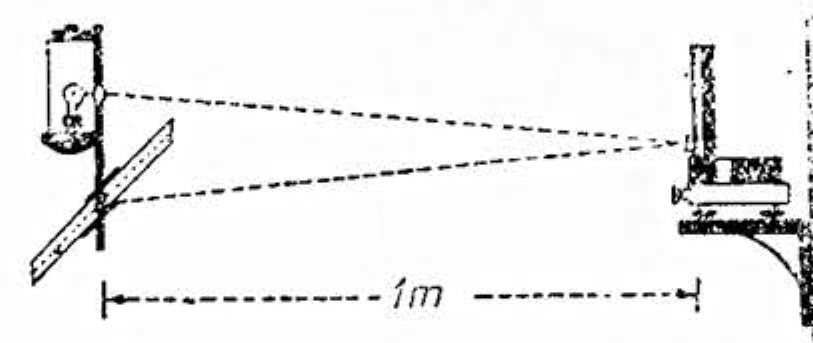


Fig. 28. — Galvanometru cu citire obiectivă.

Scara aparatului poate fi exterioară, ca în figură, sau interioară.

Suspensia organului mobil al galvanometrelor cu oglindă este simplă, bobina mobilă fiind suspendată la partea ei superioară, sau dublă, — bobina mobilă fiind întinsă între două fire fixate de cutia aparatului. Pentru suspensia simplă în special, aparatul trebue să fie perfect orizontal, el având în acest scop şuruburile de reglaj necesare şi o nivelă. Un exemplu interesant de galvanometru care nu are nevoie de o orizontalizare specială este galvanometrul autonivelator sovietic, imaginat de A. V. Ulitovschi. Orizontalizarea acestui aparat se face în mod automat, prin propria sa greutate, aparatul fiind dotat cu suspensie cardan.

42. **Sensibilitatea, perioada şi rezistenţa critică de amortisare.** Galvanometrele sunt caracterizate prin *sensibilitatea, perioada* şi *rezistenţa lor critică de amortisare*.

Sensibilitatea de curent a unui galvanometru este valoarea curentului care, trecând prin aparat, dă o deviaţie de 1 mm pe o scară dispusă la 1 m distanţă de oglindă sau o diviziune pe scara proprie a aparatului. Valoarea numerică a acestui curent este *constanta de curent* a aparatului.

Sensibilitatea de tensiune a unui galvanometru este valoarea tensiunii care, aplicată la bornele aparatului, în serie cu o rezistenţă egală cu rezistenţa critică de amortisare (vezi mai jos) dă o deviaţie de 1 mm pe o scară dispusă la 1 m distanţă de oglindă sau o diviziune pe scara proprie a aparatului. Valoarea numerică a acestei tensiuni este *constanta de tensiune* a aparatului.

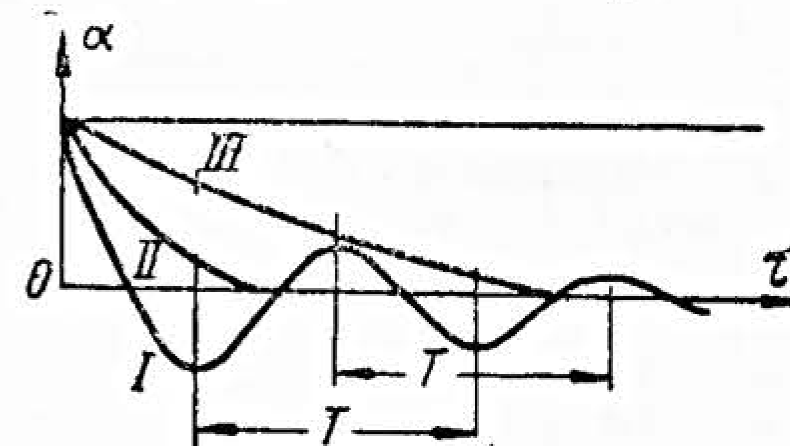


Fig. 29. — Variaţia deviaţiei galvanometrului în funcţie de timp.

După mărimea rezistenţei circuitului pe care este închis un galvanometru, mişcarea echipajului mobil poate fi oscilatorie amortizată (*I*), aperiodică critică (*II*), sau aperiodică (*III*), după cum se vede în fig. 29; aceasta înseamnă că indicaţia aparatului, pornind dela o valoare iniţială, fie că revine la zero după ce a executat o serie de oscilaţii, fie că revine la zero printr'o singură oscilaţie în timpul cel mai scurt, fie că revine la zero tot printr'o singură oscilaţie dar în timp mai îndelungat (mişcare târâtoare).

Idealul este ca aparatul să funcţioneze astfel încât să revină la zero (sau să atingă o deviaţie permanentă pornind dela zero) printr'o singură oscilaţie, în timpul cel mai scurt (mişcare aperiodică critică), ceeace se întâmplă când galvanometrul este închis pe o anumită rezistenţă, denumită *rezistenţa critică de amortizare*.

Sensibilitatea unui galvanometru de curent continuu poate fi variată comod prin întrebuinţarea unui *şunt universal*, în unire cu galvanometrul. Acesta este compus dintr'o rezistenţă egală cu rezistenţa critică de amortizare a aparatului. Rezistenţa comportă mai multe secţiuni, o parte din ele putând fi legate în paralel cu aparatul iar celelalte în serie (cu ajutorul manivelei M, fig. 30) astfel ca galvanometrul să rămână închis pe rezistenţa critică respectivă (aceasta în ipoteza că circuitul de utilizare al galvanometrului are o rezistenţă mare faţă de rezistenţa sa critică).

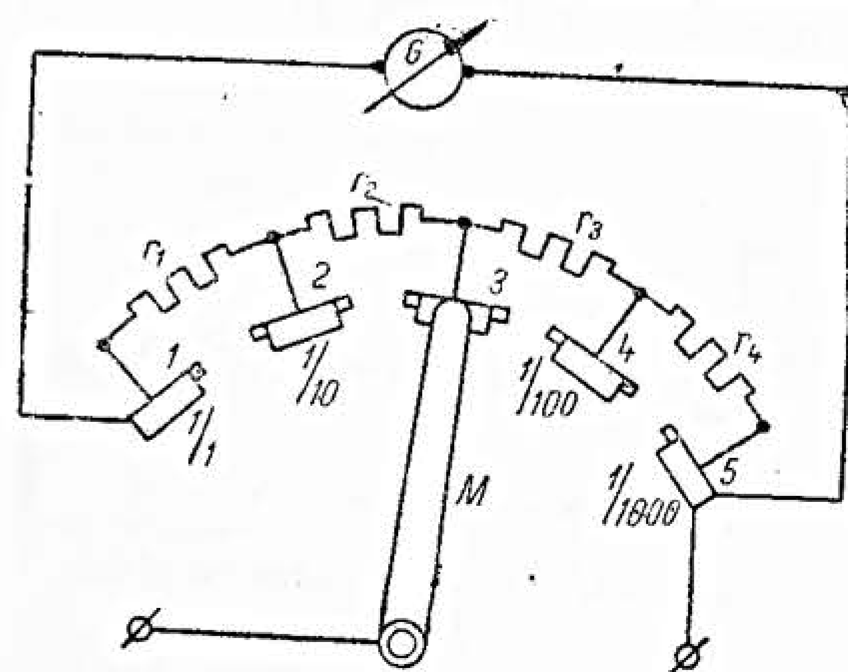


Fig. 30. — Galvanometru cu şunt universal.

Rezistenţele secţiunilor sunt deobicei astfel calculate încât sensibilitatea să se reducă zecimal.

Galvanometrele cu oglindă se construesc pentru sensibilităţi dela circa $1 \cdot 10^{-7}$ A, până la maximum $1 \cdot 10^{-11}$ A. Pentru sensibilităţi mai mici decât $1 \cdot 10^{-7}$ A, galvanometrele se fac în general cu ac indicator şi cu o suspensie cu pivoţi, cuplul antagonist fiind dat de un arc spiral.

Perioada unui galvanometru este timpul dintre două treceri succesive prin zero, în acelaşi sens, ale deviaţiei galvanometrului (sau dintre două maxime de acelaşi sens).

Pentru comoditatea măsurătorilor, este de dorit ca perioada să fie cât mai scurtă. Totuşi, din motive constructive, galvanometrele de mare sensibilitate au şi perioada mare. In tabela 5 sunt date caracteristicele unor galvanometre de construcţie sovietică:

Tabela 5

Nr.	Tipul	Sensibilitatea A/mm	Rezistenţa interioară Ω	Rezistenţa exterioară critică Ω	Perioada sec.	Fabrica
1	—	$1 \cdot 10^{-8}$	3 000	15 000	7	« Etalon »
2	3-I	$1 \cdot 10^{-8}$	30	30	5	Universitatea « Jdanov » Leningrad
3	3-VIII	$0{,}5 \cdot 10^{-9}$	3 000	15 000	7	
4	I	$0{,}5-1 \cdot 10^{-8}$	50–70	50–150	5–9	Institutul de Cercetări Arctice
5	II	$0{,}25-0{,}4 \cdot 10^{-8}$	100–250	200–500	5–9	»
6	III	$0{,}16-0{,}22 \cdot 10^{-8}$	450–600	600–1 500	5–9	»
7	IV	$0{,}1-0{,}14 \cdot 10^{-8}$	700–1 000	2 000–3 000	5–9	«
8	M_{21}	$0{,}16 \cdot 10^{-8}$	500	16 000	5	« MEP »
9	M_{21}/I	$0{,}16 \cdot 10^{-9}$	1 000	80 000	12	»
10	G–I	$0{,}149 \cdot 10^{-6}$	8,5	7,9	0,31	Instititutul Electrotehnic din Leningrad « Ulianov »

Rezistenţa critică creşte cu sensibilitatea, ceeace face ca un galvanometru foarte sensibil să nu poată fi utilizat în condiţii bune decât în circuite cu rezistenţă foarte mare; acesta este dealtfel cazul în măsurătorile de izolaţie, unde se utilizează deobicei astfel de galvanometre.

43. **Galvanometrul balistic** este folosit pentru măsurarea cantităţilor de electricitate. Este construit pe principiul punerii în mişcare numai după ce întreaga cantitate de electricitate care se descarcă prin aparat a trecut prin acesta.

In consecinţă, trebue să aibă o perioadă mare faţă de timpul de descărcare, ceeace se realizează construind aparatul cu un moment de inerţie mare.

Constanta (sensibilitatea) galvanometrului balistic este cantitatea de electricitate care, trecând prin aparat, dă o *elongaţie* (prima deviaţie) de 1 mm pe o scară aşezată la o distanţă de 1 m de oglinda aparatului, sau o diviziune pe scara proprie a aparatului.

Valoarea constantei se dă în C/mm la 1 m sau în C/diviziune, şi variază, ca şi perioada aparatului, cu rezistenţa de amortizare (rezistenţa totală a circuitului pe care este închis aparatul). Pentru acest motiv, galvanometrul balistic trebue etalonat totdeauna în condiţiile experienţei.

44. **Alte tipuri de galvanometre.**

Galvanometrele cu coardă, pentru măsurători de laborator, au bobina mobilă constituită dintr'o bandă întinsă între polii unui magnet permanent. Cu un fir pe cuarţ argintat se pot obţine sensibilităţi ridicate ale aparatului.

Oscilografele electromagnetice, utilizate pentru observarea şi înregistrarea curbelor de curenţi şi de tensiuni în curent alternativ (v. subcap. *D*, § 69).

Galvanometre de vibraţii, care se întrebuinţează ca aparate de zero în curent alternativ (v. subcap. *D*, § 76).

45. **Aparate electromagnetice cu fier mobil.** Aceste aparate sunt de două tipuri: cu atracţie sau cu repulsie.

Aparatele cu atracţie (fig. 31) sunt constituite dintr'o bobină plată *1*, în interiorul căreia poate fi atrasă o bucată de fier *2*, care se poate roti în jurul unui ax excentric *3*, de care este fixat atât acul indicator al aparatului, cât şi dispozitivul de amortisare *5*, *6*. Cuplul antagonist este dat de un resort spiral *4*.

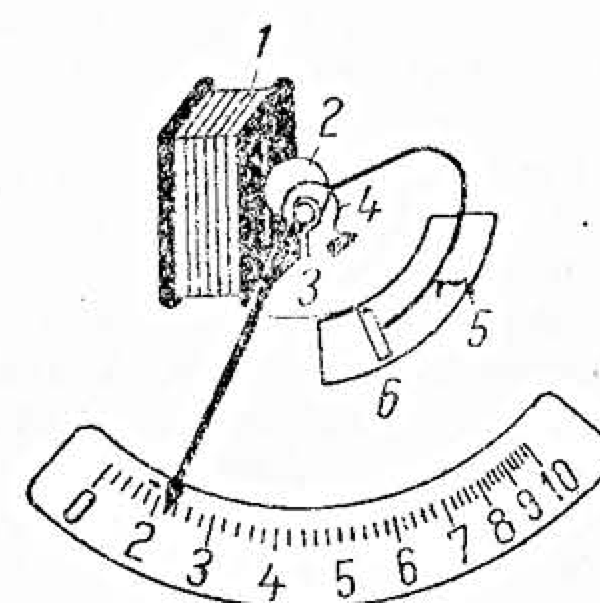


Fig. 31. — Aparat electromagnetic de tipul cu atracţie.

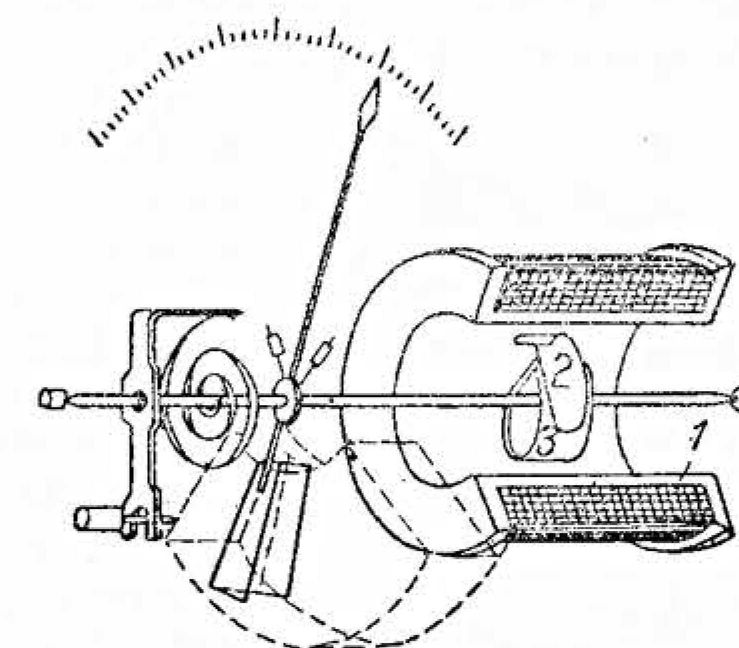


Fig. 32. — Aparat electromagnetic de repulsie.

Aparatele cu repulsie (fig. 32) sunt compuse dintr'o bobină rotundă *1* în interiorul căreia sunt două piese de fier, una fixă *2*, şi cealaltă *3* mobilă în jurul unui ax, aşezat în centrul bobinei; pe ax este fixat acul indicator şi dispozitivul de amortizare.

La trecerea curentului în bobină, cele două piese se magnetizează în acelaşi fel şi se resping, producând rotaţia axului.

In ambele tipuri de aparate, cuplul activ M_a are valoarea $M_a = \frac{dL}{dt} I^2$, iar cuplul rezistent dat de un resort spiral, valoarea $M_r = \lambda\alpha$ și deci deviația $\alpha = \frac{1}{\lambda} \frac{dL}{dt} I^2$ este funcție de patratul curentului care trece prin bobină, aparatele putându-se întrebuința atât în curent continuu cât și în curent alternativ.

Pe acest principiu se construesc ampermetre și voltmetre utilizate în special în curent alternativ, precum și alte aparate de tipul logometrelor pentru măsurarea și a altor mărimi electrice.

46. **Ampermetrele și voltmetrele electromagnetice.** Indicațiile acestora sunt funcție de patratul valorii curentului continuu, respectiv de patratul valorii eficace a curentului alternativ.

Scara aparatului este neuniformă, patratică, cu diviziunile îndesite spre valorile mici, care nu se citesc cu precizie satisfăcătoare decât dela o valoare de circa 20% din maximul scării.

Forma scării aparatului se poate schimba prin modificarea formei pieselor de fier fixe sau mobile și a poziției lor inițiale față de bobina aparatului, obținându-se diverse scări potrivit nevoilor de exploatare; se poate astfel obține o scară cu diviziunile rărite la începutul sau la mijlocul ei, sau o scară comprimată, permițând citirea comodă nu numai a valorilor normale ale curentului, dar și a valorilor de două, trei ori mai mari, cum ar fi necesar de exemplu, pentru măsurarea aproximativă a curentului de pornire la motoarele electrice.

La utilizarea în curent continuu, se face simțită influența fenomenului de histerezis, aparatul dând indicații diferite pentru valori crescătoare, respectiv descrescătoare, ale curentului de măsurat; efectul însă este foarte redus la aparatele moderne bine construite.

Totuși, aparatele electromagnetice nu pot fi etalonate în curent continuu.

In ce privește precizia acestor aparate, ele se construesc azi în mod obișnuit ca aparate de control până la clasa 0,5; ele pot atinge și clasa 0,2 și rivalizează cu aparatele de laborator electrodinamice de mare precizie, prin întrebuințarea de materiale speciale, ca aliaje de feronichel și prin realizarea de aparate astatice, insensibile câmpurilor exterioare. Aparatele electromagnetice se utilizează pe o scară întinsă și ca aparate de tablou, fiind robuste, de un preț scăzut și având calitatea de a suporta bine suprasarcini pentru intervale reduse de timp.

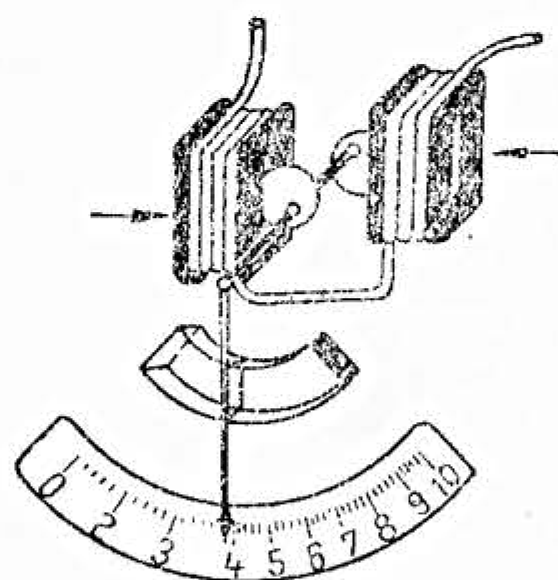


Fig. 33. — Aparat electromagnetic astatic.

In fig. 33 este reprezentată schema principială a unui aparat electromagnetic astatic. Aparatul are două bobine, înfășurările fiind astfel făcute încât câmpurile date de acestea să aibă direcții opuse. Câmpul exterior se adună deci unuia dintre aceste câmpuri și se scade din celălalt, acțiunea lui fiind nulă. Piesele mobile din fier sunt astfel așezate încât ambele să rotească axul aparatului în același sens.

Ca ampermetre, ele se construesc în general pentru intensități reduse, 5—10 A, extinderea domeniului de măsurare făcându-se prin fracționarea bobinei de curent în două sau patru secțiuni și legarea lor în serie, în serie paralel, sau în paralel, ceeace schimbă domeniul de măsurare, în raportul 1:2:4. Se merge astfel până la intensități de 50—100 A, rareori până la 200 A pentru aparatele de tablou.

Pentru intensități mai mari, se utilizează transformatori de măsură.

Cu astfel de aparate nu se utilizează șunturi.

Ca voltmetre, se construesc pentru tensiuni dela 7,5 V la 600 V, extinderea domeniului de măsurare făcându-se cu rezistențe adiționale.

47. **Aparate electromagnetice de tipul logometrelor.** (fără cuplu mecanic antagonist). După cum s'a spus și la § 40, se numesc logometre aparatele care funcționează pe principiul măsurării raportului a doi curenți. Ele permit măsurarea altor mărimi electrice decât curentul, tensiunea, puterea sau energia, ca de exemplu: măsurarea factorului de putere, a frecvenței, a capacității, a rezistenței, etc.

Aceste logometre se construesc și pe principiul aparatelor electromagnetice și sunt constituite în general din două aparate identice de atracție sau de repulsie A și B (fig. 34), montate pe același ax și în opoziție, în sensul că cuplul unuia din ele se opune cuplului celuilalt, constituind cuplul antagonist de natură electrică. Astfel de aparate nu mai posedă și cuplu antagonist de natură mecanică.

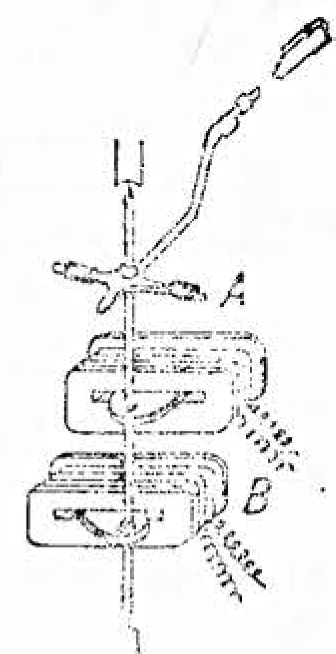


Fig. 34. — Logometru electromagnetic.

48. **Aparate electrodinamice.** Sunt de deosebit două feluri de asemenea aparate: *electrodinamice fără fier* și *electrodinamice cu fier* (ferodinamice).

49. **Aparatele electrodinamice fără fier** sunt constituite (fig. 35) dintr'o bobină fixă, compusă din două jumătăți identice A și traversată de un curent I, și o bobină mobilă B, parcursă de un curent I', care se mișcă în interiorul bobinei fixe în câmpul produs de aceasta.

Cuplul rezistent este dat de două arcuri spirale, care servesc și la aducerea curentului la bobina mobilă.

Cuplul activ al aparatului în curent continuu este de forma:

$$M_a = KII'$$

în care K este un coeficient constant în cazul unui câmp radial, iar în curent alternativ:

$$M_a = KII' \cos \psi,$$

n care I și I' sunt valorile eficace ale curenților (de aceeași frecvență), iar ψ — decalajul dintre aceștia.

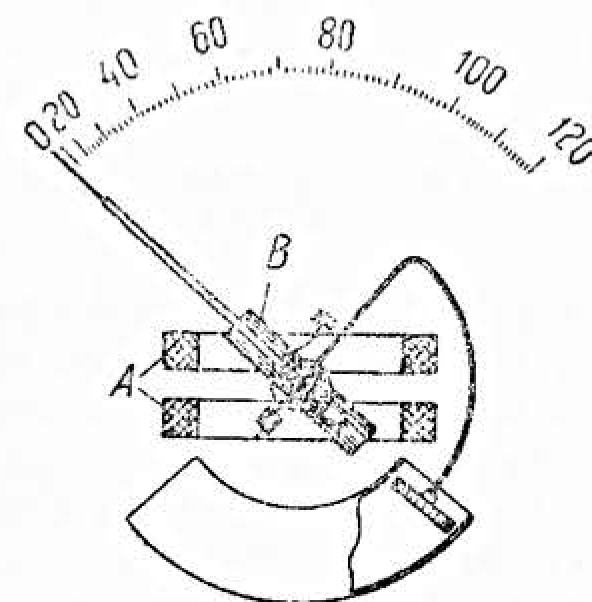


Fig. 35. — Aparat electrodinamic fără fier.

Rezultă pentru deviația aparatului $\alpha = \frac{K}{\lambda} II'$

în care λ este cuplul antagonist unitar.

Sensul indicației aparatului depinde de sensul curenților din cele două bobine și deci nu se schimbă dacă sensul curentului se inversează în ambele bobine.

Aceste aparate se întrebuințează ca voltmetre, ampermetre și wattmetre, în curent continuu și alternativ.

Bobina mobilă se leagă sau în serie cu bobina fixă (miliampermetre și voltmetre), sau în derivație, pe un șunt care este în serie cu bobina fixă (ampermetre).

Pentru wattmetre, bobina fixă este parcursă de curentul principal, iar bobina mobilă în serie cu o rezistență adițională este supusă la tensiunea de alimentare.

Indicațiile ampermetrelor și voltmetrelor sunt proporționale cu patratul valorii curentului sau tensiunii continue, sau cu pătratul valorii eficace a curentului sau tensiunii alternative, scara aparatului fiind neuniformă.

Indicaţiile wattmetrelor sunt aproximativ proporţionale cu puterea, scara acestor aparate fiind aproape uniformă.

Aparatele fără fier se întrebuinţează pentru măsurători de precizie, construindu-se ca aparate de clasa 0,2. Ele sunt sensibile la acţiunea câmpurilor exterioare, ceeace poate fi remediat prin executarea lor sub formă de aparate astatice.

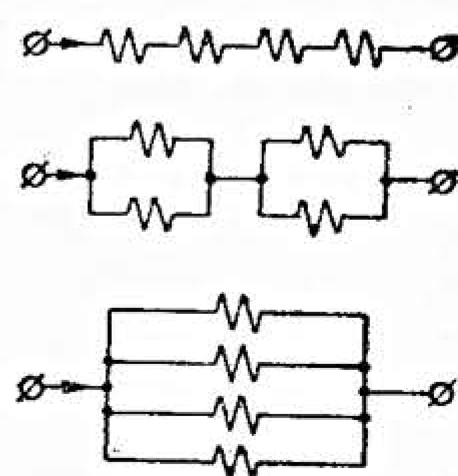


Fig. 36. — Schema cuplării secţiunilor bobinei fixe pentru extinderea domeniului de măsurare.

Extinderea domeniului de măsurare la ampermetre şi la bobina de curent a wattmetrelor se face, în general, prin cuplarea celor două jumătăţi ale bobinei fixe în serie sau paralel, sau chiar prin secţionarea fiecărei jumătăţi de bobină fixă în câte două secţiuni egale şi cuplarea celor patru secţiuni în serie, în serie-paralel şi în paralel, astfel cum se vede de exemplu în fig. 36 în care este reprezentată schema legăturilor bobinei fixe a unui aparat, pentru trei sensibilităţi de curent în raportul 1 : 2 : 4. Aceste legături se realizează cu ajutorul unui sistem de fişe.

Aparatele se construesc în general pentru intensităţi maxime de circa 50 A. Pentru valori mai mari, se întrebuinţează transformatori de măsură.

La voltmetre, schimbarea sensibilităţii se realizează prin introducerea de rezistenţe adiţionale, interioare sau exterioare aparatului.

Consumaţia proprie a bobinei fixe este de circa 1,5 — 5W pentru 5A; curentul absorbit în bobina de tensiune este de circa 30 mA.

50. **Aparatele electrodinamice cu fier (ferodinamice)** sunt constituite după cum se vede în schema principială din fig. 37 dintr'o bobină fixă *A*, al cărei flux se închide prin fierul electromagnetului *M*, în întrefierul căruia se mişcă bobina mobilă *B*. Prin această construcţie, la aceeaşi consumaţie proprie a aparatului, cuplul activ al instrumentului se ridică la o valoare de circa 20 de ori mai mare decât la aparatele fără fier, iar efectul influenţei câmpurilor magnetice exterioare este redus la a suta parte din acest efect la aparatele fără fier.

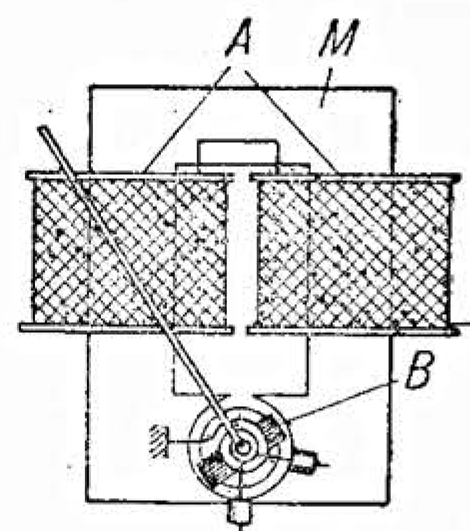


Fig. 37. — Aparat ferodinamic.

Aparatele ferodinamice se întrebuinţează în special acolo unde se cere un cuplu activ mare, deci în special pentru aparate înregistratoare şi pentru relee şi în acele cazuri în care aparatele sunt supuse unui tratament mai greu, ca vibraţii, zguduituri, etc.

51. **Aparate electrodinamice cu bobine mobile încrucişate** (fără cuplu mecanic antagonist). Intocmai ca şi aparatele electromagnetice, cele electrodinamice se construesc şi sub formă de logometre, în sensul că bobina mobilă este formată din două bobine calate pe un ax comun şi ale căror plane fac între ele un unghi anumit de 60°, 90° sau de o altă valoare. Cele două bobine dau cu bobina fixă cupluri de sens contrar, unul din ele jucând rolul de cuplu antagonist electric, astfel încât aparatul nu mai posedă şi un cuplu antagonist de natură mecanică.

Astfel de aparate — care şi ele se pot construi cu şi fără fier — sunt de exemplu cosfimetrele electrodinamice, frecvenţmetrele electrodinamice, etc.

52. **Aparate termice.** Sunt constituite dintr'un fir de platin-iridium, platin-argint sau oţel-nichel, prins între două cleme, una fixă *A* şi cealaltă reglabilă *B*.

De acest fir este prins, în punctul *C*, un al doilea fir de bronz fosforos, fixat la celălalt capăt *D* de batiul aparatului; de acest al doilea fir este prins, în *E*, un

al treilea fir, de mătase, trecut după o mică rolă *R*, care se roteşte în jurul unui ax purtând şi acul indicator; la cealaltă extremitate firul este întins de un resort *F*

Dispozitivul de amortisare este constituit din sectorul de aluminiu *W* care se mişcă între polii magnetului *M*.

Curentul de măsurat, trecând prin firul principal îl încălzeşte; firul se dilată şi graţie resortului a cărui extremitate se deplasează spre stânga, rola se învârteşte şi acul indicator se mişcă spre dreapta.

Mişcarea acului fiind funcţie de căldura desvoltată în firul principal, adică de patratul curentului, scara aparatului este neuniformă, patratică, aparatul putându-se întrebuinţa şi în curent continuu şi în curent alternativ.

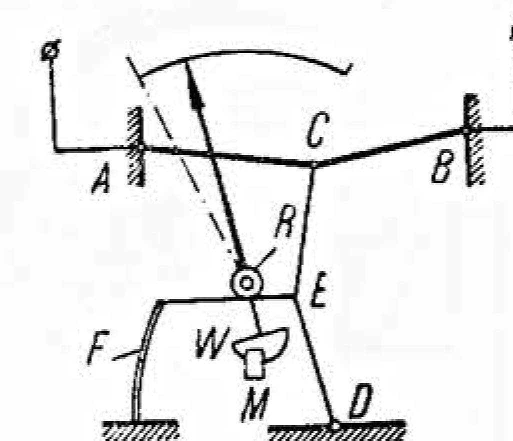


Fig. 38. — Aparat termic.

Pe acest principiu se construesc ampermetre şi voltmetre al căror domeniu de măsurare se extinde prin şunturi la ampermetre şi prin rezistenţe adiţionale la voltmetre.

Rareori se construesc şi wattmetre termice.

Avantajul acestor aparate constă în special în aceea că indicaţiile lor sunt practic independente de frecvenţă şi de forma curentului alternativ şi nu sunt influenţate de câmpurile exterioare.

Au însă desavantajul că indicaţiile depind de temperatura ambiantă, ceeace produce o foarte supărătoare instabilitate a poziţiei de zero a acului, chiar dacă aparatul are dispozitive de compensaţie a acestei influenţe.

Mai au deasemenea desavantajul că inerţia calorică a firului produce o întârziere a stabilirii deviaţiei acului şi în fine acela că nu se pot supraîncărca aproape deloc.

Deaceea, pentru nevoile curente, ele au fost înlocuite pe scară largă cu aparatele electromagnetice cu fier mobil, care sunt şi mai ieftine; astăzi domeniul de întrebuinţare a aparatelor termice se limitează la înalta frecvenţă şi, pentru valori medii ale acesteia, la măsurarea curenţilor nesinusoidali.

53. **Aparate de inducţie.** Aparatele de inducţie sunt utilizabile numai în curent alternativ şi se împart în două clase principale: aparate cu *fluxuri multiple* şi aparate cu *flux unic*.

54. **Aparatele de inducţie cu fluxuri multiple** sunt constituite dintr'un organ mobil, care poate fi un disc sau un tambur de aluminiu şi din doi electromagneţi ale căror înfăşurări sunt alimentate de curenţi alternativi.

Fluxurile celor doi electromagneţi, care trebue să fie decalate între ele spaţial şi electric, traversează discul sau tamburul organului mobil şi produc în aceştia curenţi de inducţie.

Din acţiunea fluxurilor asupra curenţilor induşi se produce un cuplu mediu activ, a cărui valoare este de forma:

$$M_a = K\,\Phi_1\Phi_2 \sin\psi,$$

Φ_1 şi Φ_2 fiind valorile eficace ale fluxurilor celor doi electromagneţi, iar ψ unghiul de decalaj dintre acestea; sau:

$$M_a = K' I_1\, I_2 \sin\psi$$

I_1 şi I_2 fiind curenţii alternativi din înfăşurările electromagneţilor care dau naştere fluxurilor Φ_1 şi Φ_2.

Cuplul antagonist este dat de unul sau de două arcuri spirale.

Aparatele cu tambur se construesc ca ampermetre, ca voltmetre şi mai ales ca wattmetre, iar aparatele cu disc aproape exclusiv ca wattmetre şi în special sub formă de contori de energie electrică, cu care sunt aproape identice din punct de vedere al construcţiei.

In fig. 39 este reprezentată schema unui wattmetru de inducţie cu tambur. El este format dintr'o carcasă cu patru poli şi două circuite: circuitul de curent *II* prin care trece curentul principal, înfăşurat pe doi din cei patru poli diametral opuşi şi circuitul de tensiune S_1S_2 (alimentat de tensiunea de utilizare) înfăşurat pe ceilalţi doi poli. *T* este un tambur de aluminiu.

Pentru ca cuplul aparatului

$$M_a = K\, \Phi_1\, \Phi_2 \sin(\Phi_1\, \Phi_2)$$

să fie proporţional cu puterea de măsurat, curentul din bobina mobilă trebue să fie decalat cu 90° faţă de tensiunea ei de alimentare, ceeace se realizează pentru o anumită frecvenţă prin introducerea unei inductanţe în acest circuit şi prin întrebuinţarea unui montaj special în punte, ca acela din fig. 40 în care S_1 şi S_2 sunt două bobinaje alcătuind circuitul de tensiune; R_1, R_2, R_3, sunt rezistenţe neinductive, iar *II* este circuitul de curent.

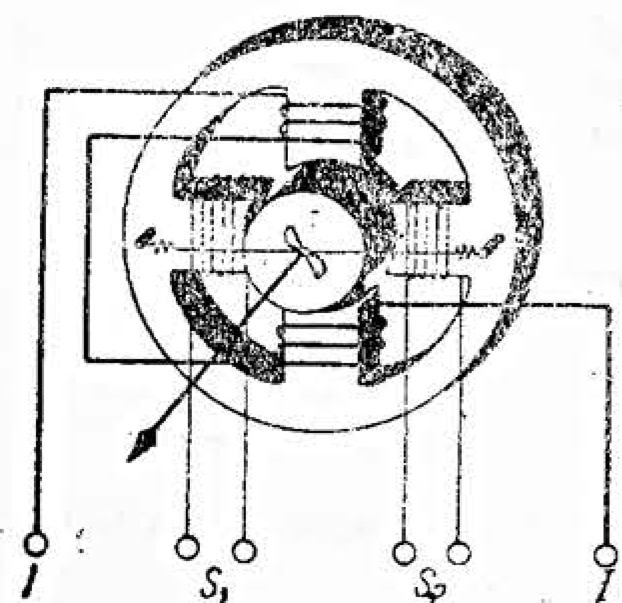


Fig. 39. – Wattmetru de inducţie cu tambur.

Indicaţiile aparatului sunt astfel aproximativ proporţionale cu puterea, scara fiind uniformă.

La voltmetrele de inducţie, cele două circuite ale aparatului sunt alimentate în paralel pe tensiunea de măsurat, unul conţinând o rezistenţă iar celălalt o inductanţă, pentru obţinerea unui cât mai mare decalaj ψ între curenţi şi deci al unui cuplu cât mai mare.

La ampermetrele de inducţie, cele două circuite în paralel ca mai sus sunt traversate, fiecare, de o parte a curentului de măsurat.

Indicaţiile acestor aparate sunt proporţionale cu patratul valorii eficace a tensiunii sau a curentului de măsurat, având deci o scară neuniformă patratică.

Aceste aparate au avantajul că desvoltă un cuplu mare şi deci sunt robuste; au apoi o scară mare, putând atinge teoretic 360°, ceeace le face vizibile dela distanţă; în sfârşit nu sunt sensibile la câmpurile exterioare.

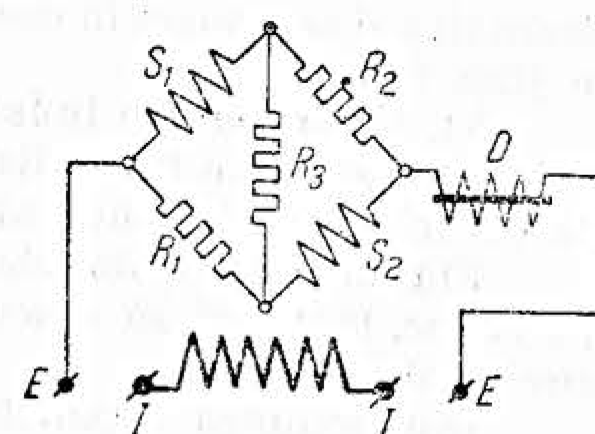


Fig. 40. – Montaj în punte.

Desavantajul principal al aparatelor de inducţie este influenţa temperaturii, care modifică indicaţiile aparatului cu 2—3% pentru fiecare variaţie de 10°C a temperaturii ambiante.

Deasemenea indicaţiile acestor aparate sunt funcţie şi de variaţiile tensiunii şi ale frecvenţei, ele neputând fi construite ca aparate de precizie ci cel mult de clasa 1 – 1,5.

Intrebuinţarea practică a acestor aparate este redusă; ele sunt scumpe faţă de aparatele electromagnetice atât pentru ampermetre cât şi pentru voltmetre, pe când pentru wattmetre se întrebuinţează mai ales aparatele electrodinamice fără fier şi mai ales cele cu fier.

55. Aparate de inducţie cu flux unic. Acestea se compun dintr'un singur electromagnet, în întrefierul căruia se poate mişca un disc de aluminiu.

Polii electromagnetului sunt despicaţi şi înconjuraţi, pe jumătate din suprafaţa lor, de câte un inel metalic de scurtcircuit, graţie căruia curentul de alimentare al înfăşurării electromagnetului dă naştere la două fluxuri (în loc de unul) decalate spaţial şi electric şi traversând discul; acesta este astfel supus unui cuplu proporţional cu patratul curentului.

Cuplul antagonist este dat de un resort spiral.

Astfel de aparate se pot construi numai ca ampermetre şi voltmetre — indicaţiile fiind proporţionale cu patratul valorii eficace a curentului sau a tensiunii de măsurat — însă sunt foarte rar întrebuinţate.

Adevărata formă de utilizare a acestor aparate este aceea a releelor de inducţie, pentru protecţia reţelelor electrice.

56. Aparate de inducţie fără cuplu antagonist. Şi aceste aparate se pot construi sub formă de logometre, adică formate din două organe mobile — în special două discuri — cuplate pe acelaşi ax, astfel încât cuplul unuia din discuri să fie opus cuplului celuilalt disc, iar aparatul să nu mai aibă nevoie de cuplu antagonist mecanic.

57. Aparate electrostatice. Aparatele electrostatice sunt bazate pe principiul atracţiei a două piese metalice, între care există o diferenţă de potenţial.

Ele se întrebuinţează în special ca voltmetre, întrucât au marea calitate de a permite măsurarea tensiunilor fără consum de curent.

In afară de voltmetre se mai construesc şi alte aparate electrostatice ca: wattmetre, oscilografe, sincronoscoape, etc.

Voltmetrele electrostatice sunt de două tipuri principale: de joasă tensiune şi de înaltă tensiune.

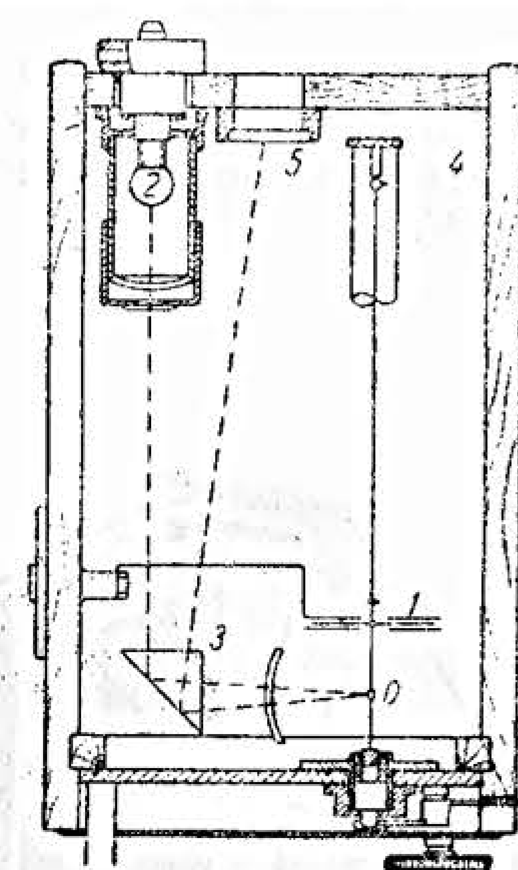
58. Voltmetre electrostatice de joasă tensiune. Se construesc pentru domenii de măsurare de 20 V până la 600—1 000 V.

Ele derivă din *electrometrul cu cadrane*, care este compus dintr'o parte fixă, de forma unei cutii cilindrice plate, împărţită în patru cadrane prin două tăieturi după direcţiile a două diametre normale şi dintr'o parte mobilă de forma unei palete uşoare de aluminiu suspendată de un fir purtând dispozitivul indicator al deviaţiilor aparatului, care poate fi o oglindă cu spot luminos, sau un ac indicator, care se mişcă în faţa unei scări gradate. Cele patru cadrane se leagă două câte două (diametral opuse) în scurtcircuit, tensiunea de măsurat racordându-se între cele două perechi de cadrane.

Acul indicator se leagă la una din perechile de cadrane.

In fig. 41 este reprezentat un astfel de voltmetru electrostatic de 20 V, cu citirea obiectivă a deviaţiilor acului.

La alte tipuri de voltmetre — cele mai răspândite — se suprimă una din cele două perechi de cadrane, tensiunea de măsurat aplicându-se între a doua pereche de cadrane şi organul mobil al aparatului, constituit dintr'o paletă metalică de care este fixat acul indicator.


Fig. 41. – Voltmetru electrostatic de joasă tensiune cu citire obiectivă; 1 – cadrane; 0 – oglindă; 2 – lampă; 3 – prismă cu reflecţie totală; 4 – dispozitiv de suspensie; 5 – spot luminos.

In fig. 42 este reprezentat voltmetrul electrostatic de tipul multicelular, care se construeşte pentru tensiuni până la 600—1000 V.

In sfârşit, unele tipuri de voltmetre electrostatice au o singură pereche de cadrane şi un ac indicator, mobil în jurul unui ax, cuplul antagonist fiind dat de un arc spiral.

Cuplul în voltmetrele electrostatice de mai sus este aproximativ proporţional cu patratul tensiunii:

$$Ma \cong KU^2,$$

aceste aparate putându-se utiliza atât în curent continuu cât şi mai ales în curent alternativ de frecvenţă până la 10^6 Hz şi chiar dincolo de această valoare, deviaţiile lui fiind proporţionale cu patratul tensiunii continue, respectiv cu patratul valorii eficace a tensiunii alternative. Scara aparatului este deci patratică, neuniformă, ea ameliorându-se prin alegerea unei anumite forme pentru cadrane şi acul indicator. Aceasta rezultă din faptul că adevărata expresie a cuplului activ M_a este în general

$$M_a = \frac{dC}{d\alpha} \cdot U^2$$

în care C este capacitatea condensatorului format de cadranele voltmetrului şi paleta mobilă (acul indicator).

Fig. 42. — Voltmetru electrostatic multicelular; 1 şi 2 — cadrane; 3 — fir de suspensie, purtând acul indicator sau oglinda.

59. **Voltmetre electrostatice de înaltă tensiune.** Se deosebesc în special două categorii şi anume:

Voltmetrele cu placă mobilă formate dintr'o placă fixă şi o placă mobilă, între care se aplică tensiunea de măsurat (fig. 43) şi care se construesc pentru tensiuni până la circa 30 kV.

În figura 43, C este placa fixă, B placa mobilă, A un ecran, iar D o tijă care, trecând printr'o deschizătură din ecranul A, acţionează axul purtând acul indicator.

Voltmetre cu calotă mobilă tip Abraham Villard (fig. 44) bazate pe principiul atracţiei exercitată între armăturile unui condensator AA când sunt supuse la o diferenţă de potenţial. Ele se construesc pentru tensiuni dela 10 kV până la sute de kV.

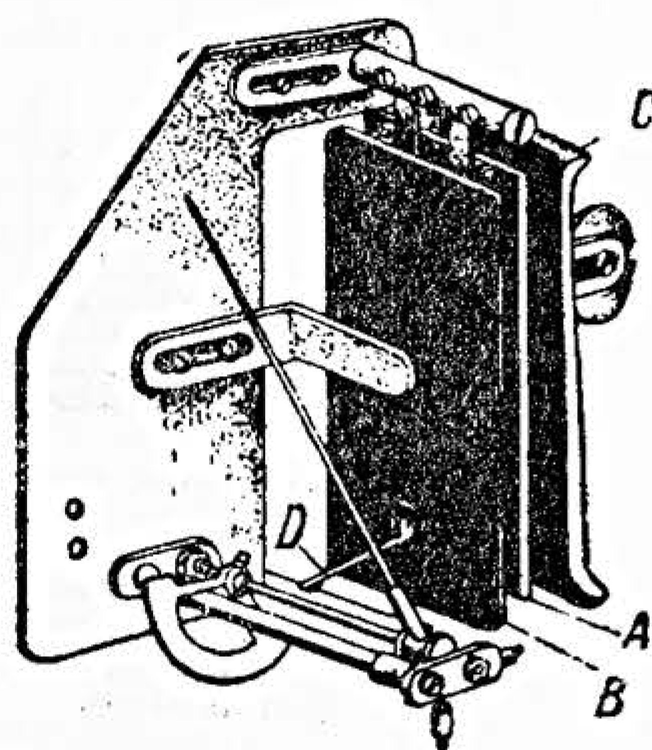


Fig. 43. — Voltmetru electrostatic cu placă mobilă.

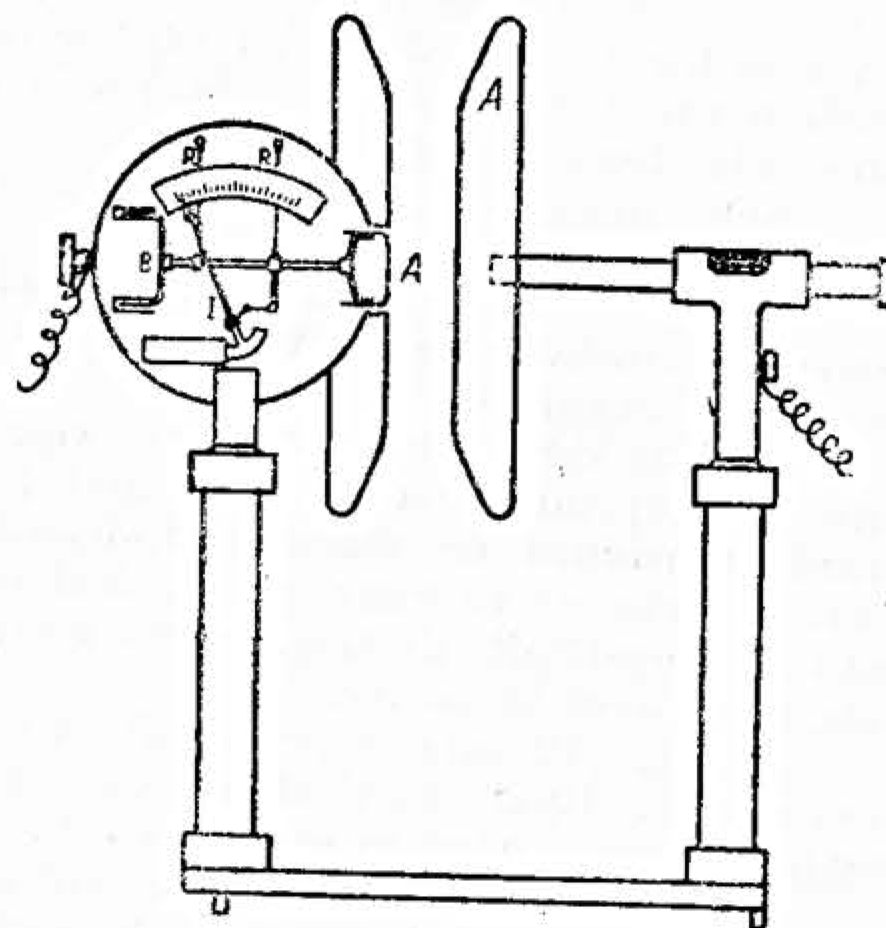


Fig. 44. — Voltmetru electrostatic cu calotă mobilă.

60. **Extinderea domeniului de măsurare** al voltmetrelor electrostatice, construite pentru racordarea directă pentru tensiuni până la 30 kV, se face cu ajutorul condensatorilor de înaltă tensiune, voltmetrul electrostatic montându-se fie în serie cu un astfel de condensator, fie în derivaţie pe unul din condensatorii unui ansamblu de condensatori montaţi în serie şi constituind un divizor de tensiune capacitiv. Se pot măsura astfel tensiuni înalte de ordinul a 500 kV şi chiar mai mari.

61. **Aparate cu redresori uscaţi.** Pentru măsurarea curenţilor şi tensiunilor alternative, se întrebuinţează şi aparate de curent continuu cu magnet permanent şi bobină mobilă în legătură cu redresori uscaţi cu seleniu, dar mai ales cu redresori cu oxid de cupru, care sunt cei mai utilizaţi.

Redresorii transformă curentul alternativ în curent simplu redresat (redresarea unei singure semiperioade), sau dublu redresat (redresarea ambelor semi-perioade), adică într'un curent pulsatoriu a cărui valoare medie se măsoară cu aparatul de curent continuu.

Pe acest principiu se construesc mai ales ampermetre şi voltmetre (care sunt cele mai utilizate); se construesc deasemenea şi alte aparate speciale, ca wattmetre (mai rar), frecvenţmetre, aparate pentru măsurarea factorului de formă şi altele.

62. **Ampermetre, voltmetre şi voltampermetre cu redresori uscaţi.** Calitatea esenţială a acestor aparate este că permit pe de o parte să se măsoare, cu o consumaţie proprie de curent foarte redusă, valori foarte mici de curenţi şi tensiuni alternative, iar pe de altă parte să se realizeze, într'un volum extrem de redus, voltampermetre universale de curent alternativ şi continuu, cu multe domenii de măsurare, cunoscute în comerţ sub denumirile de Multavi, Multizett, Avomet, etc.

Inconvenientul principal al acestor aparate este acela că, fiind etalonate în fabrică în curent alternativ sinusoidal, indicaţiile lor nu mai sunt valabile când se întrebuinţează în curent alternativ nesinusoidal; mărimea erorii comise depinde de abaterea factorului de formă al curentului nesinusoidal faţă de valoarea 1,11 a acestui factor în curent sinusoidal. Erorile pot fi foarte mari din această cauză.

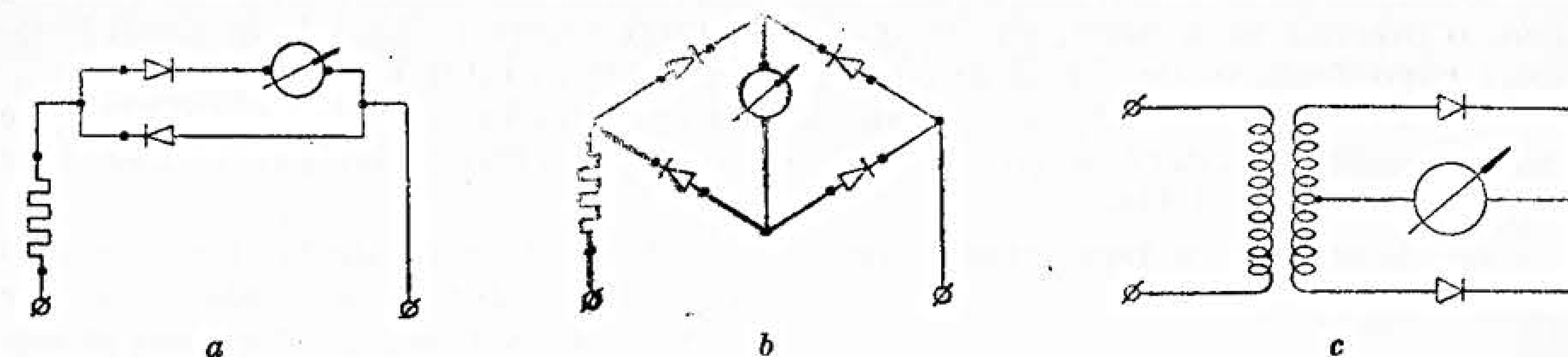


Fig. 45. — *a*, *b*, *c*, — Scheme de aparate cu redresori.

Indicaţiile aparatelor cu redresori mai depind şi de temperatura ambiantă (din cauza variaţiei cu temperatura a caracteristicelor de funcţionare a redresorilor uscaţi), precum şi de frecvenţa curentului alternativ de măsurat (din cauza capacităţii proprii a redresorilor, care se face simţită la valori mari ale frecvenţei).

Pentru combaterea acestor cauze de erori, se iau anumite măsuri de compensare de ordin constructiv.

In fig. 45 sunt redate schemele de montaj ale aparatului cu bobină mobilă faţă de redresorii respectivi; cea mai simplă schemă (fig. 45 *a*) este aceea a legării în paralel a doi redresori (prin aparat trecând curentul redresat corespunzător unei semi-perioade), iar cele mai întrebuinţate sunt montajul cu redresori montaţi pe transformator (de volum extrem de redus) (fig. 45, *c*) şi montajul în punte, cu patru redresori, (fig. 45, *b*), ultimele două montaje redresând ambele semi-perioade.

In fig. 46, *a* este reprezentat un voltampermetru de curent continuu şi alternativ cu 6 domenii de măsurare pentru curenţi şi 5 domenii de măsurare pentru tensiuni, iar în fig. 46, *b* este redată schema electrică a aparatului.

Când aparatul este utilizat în curent continuu, redresorii sunt scoşi din circuitul de măsurare cu ajutorul unui comutator, aparatul transformându-se într'un

simplu aparat cu magnet permanent și bobină mobilă, având șunturi și rezistențe adiționale.

Pentru acest caz, scara aparatului este perfect uniformă.

Pentru utilizarea aparatului în curent alternativ, acesta are o a doua scară de măsurare, a cărei gradație este aproape uniformă pe toată lungimea, cu excepția unei mici porțiuni la începutul ei.

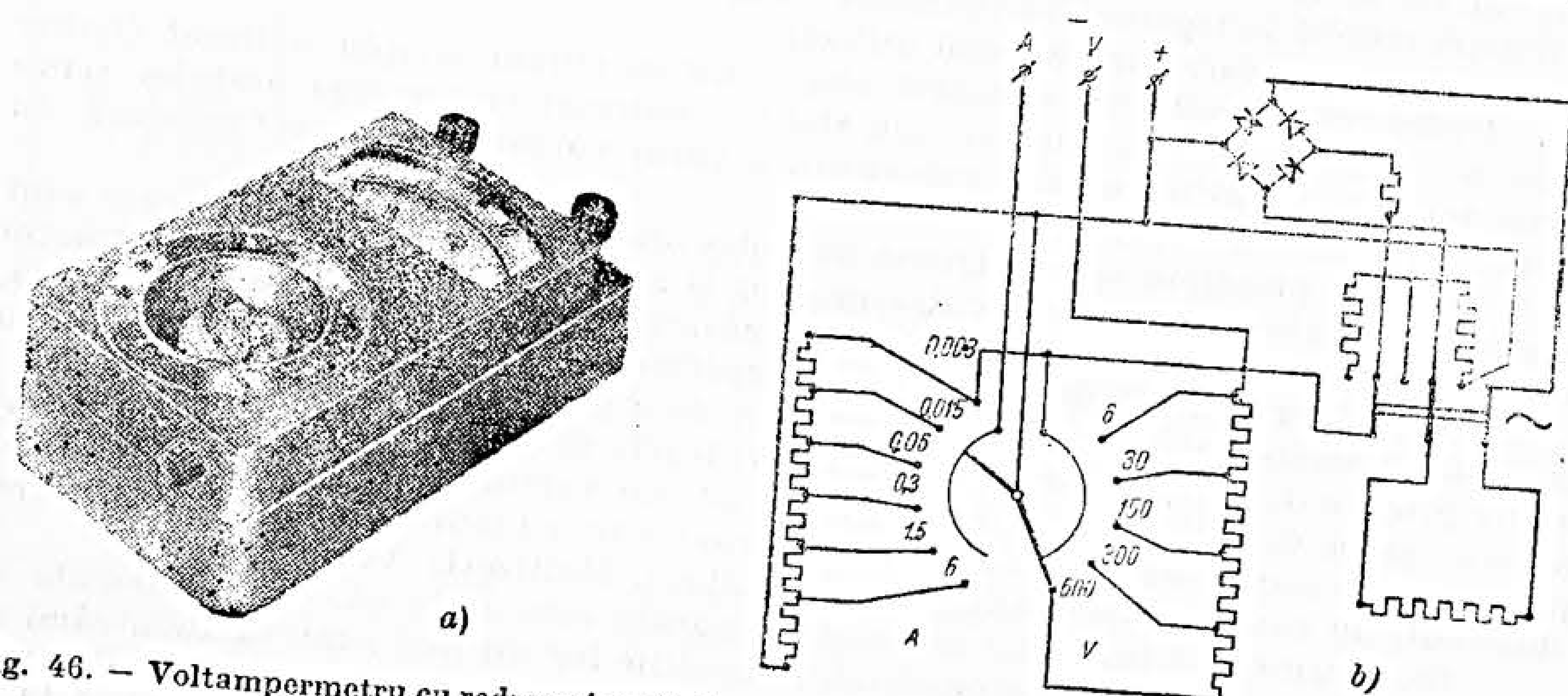


Fig. 46. — Voltampermetru cu redresori cu 11 domenii de măsurare; *a* — vedere; *b* — schema electrică.

Datorită atât cauzelor de erori menționate, cât și altora, aparatele cu redresori nu au o precizie prea mare, ele atingând cel mult precizia clasei 1, în cazul bineînțeles când factorul de formă al curentului este de ordinul 1,111.

Ele au însă avantajele menționate, la care se adaugă și faptul că pot fi utilizate cu erori acceptabile, dacă se iau măsuri de compensare a frecvenței, pentru frecvențe până la circa 10 000 Hz.

63. Aparatele cu termocuplu. Aceste aparate sunt destinate în special măsurării valorilor mici ale curenților și tensiunilor și mai ales în domeniul frecvențelor înalte.

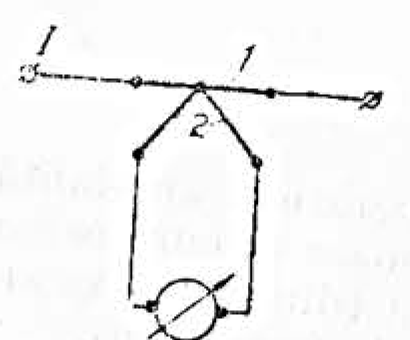


Fig. 47. — Aparat cu termocuplu cu contact direct; *1* — fir încălzitor; *2* — termocuplu.

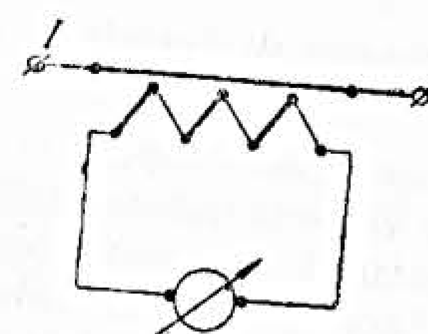


Fig. 48. — Aparat cu termocupluri în serie (încălzire prin radiație).

Ele sunt constituite dintr'un termocuplu (două metale diferite sudate împreună, sudura — capătul cald — fiind încălzită de un fir metalic prin care trece curentul de măsurat) și un aparat de curent continuu cu magnet permanent și bobină mobilă, legat la cele două capete reci ale termocuplului (subcap. *H* § 267).

Există două tipuri de astfel de aparate, după cum termocuplul *2* este încălzit prin contact direct cu firul încălzitor *1* prin care trece curentul de măsurat (fig. 47) sau este separat de firul încălzitor dela care pornește căldura prin radiație. In ultimul caz se pot monta mai multe termocupluri în serie (fig. 48).

Pe acest principiu se construesc ampermetre și voltmetre.

Avantajul principal al acestor aparate este acela că indicațiile lor sunt independente de frecvență, astfel că pot fi utilizate până la frecvențe de ordinul a câtorva MHz. Apoi ele permit să se măsoare, cu o consumație redusă, valori mici ale curenților și tensiunilor și posedă un zero stabil, spre deosebire de aparatele termice pe care le-au înlocuit mai ales în domeniul frecvențelor înalte.

Au desavantajul că se pot deteriora la supraîncărcări, că au și ele o inerție calorică care provoacă o întârziere uneori destul de mare (câteva secunde până la stabilirea deviației permanente) și că indicațiile lor sunt variabile cu timpul și deci trebue să fie etalonate în curent continuu înainte de utilizare în curent alternativ.

64. Aparatele înregistratoare industriale sunt de mai multe feluri. Cele mai utilizate sunt cele cu înregistrare prin curbe continue sau prin puncte.

Aparatele cu înregistrare prin curbe continue au nevoie de un cuplu mai mare de circa 3—10 gcm, pentru învingerea frecării peniței pe hârtia înregistratoare; precizia acestor instrumente este redusă, fiind numai de clasa 2,5, ceeace este însă suficient pentru controlul în exploatare.

Inregistrarea se face pe o hârtie specială, pe care curbele se trasează cu ajutorul unor penițe de diferite forme; tubulară, conică, cu tăietură, cu tub capilar (cea mai întrebuințată este penița tubulară conică). Pentru ca mișcarea circulară a peniței să se transforme într'o mișcare rectilinie, se utilizează diferite sisteme, printre care cel mai întrebuințat este dispozitivul eliptic (fig. 49).

In fig. 49, *M* este organul mobil al aparatului, care acționează acul indicator *D* prin intermediul pârghiei *B*, articulată în punctul *C*. Extremitatea superioară a acului înzestrată cu o rolă, se mișcă într'un ghidaj vertical *R*. Punctul *C* descrie arcuri de elipsă, iar extremitatea *F* a acului care poartă penița, descrie linii drepte.

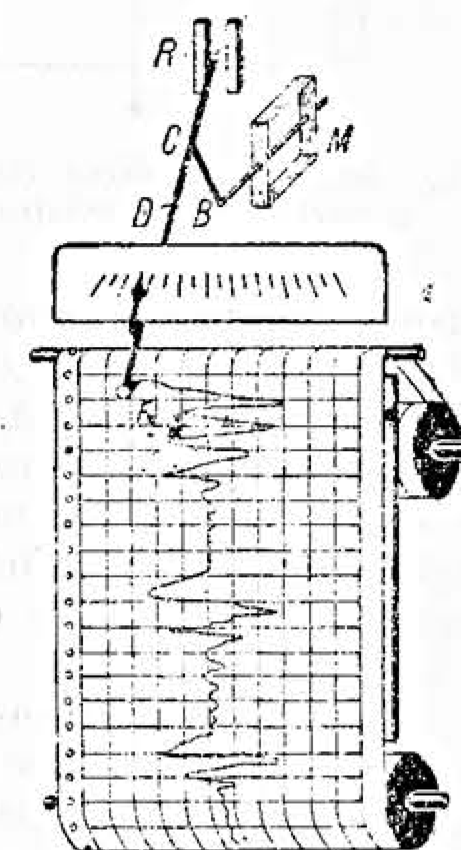


Fig. 49. — Dispozitivul de înregistrare al unui aparat cu scriere cu cerneală.

Hârtia întrebuințată este în formă de bandă și are trasate pe ea linii orizontale și verticale. Liniile verticale se referă la determinarea cantității care se înregistrează, liniile orizontale se referă la timp. In general astăzi nu se mai întrebuințează scrierea pe hârtie de formă circulară, aceste formate utilizându-se totuși pentru înregistrări termice (la cazane cu aburi, etc.). La cele mai multe aparate, hârtia de înregistrare are o lățime de 70—120 mm. Există hârtii până la 300 mm lățime, care se utilizează pentru mai multe aparate, ele înregistrând simultan pe această bandă.

Mișcarea hârtiei este sau o mișcare continuă, sau o mișcare prin impulsuri. In cazul mișcării continue, se utilizează un mecanism de ceasornic, care, prin mijlocirea unor roți dințate, transportă hârtia. Viteza de transport a hârtiei este de 3 până la 240 mm/h. De cele mai multe ori, viteza de 20 mm/h este suficientă. La viteze mari se pierde multă hârtie și diagrama este greu de citit. Numai în cazuri de încercări speciale, se ajunge până la o viteză de 240 mm/h.

Pentru acționarea electrică a transportului, se utilizează dispozitive cu electromagneți, care primesc impulsuri dela un ceasornic central de contact. Avantajul acestui dispozitiv de transport este că ceasornicul poate acționa simultan mai multe aparate, acestea transportând hârtia cu viteze sincrone, sau cu anumite viteze determinate după nevoi, de mecanismele respective. Impulsurile se dau de către o baterie de curent continuu (fig. 50).

In figură, *M* este un electromagnet cu armătura *A*, împinsă în sus de resortul *F*. La închiderea circuitului, armătura este atrasă, iar clicul *K*, rotește roata dințată *Z*; prin ajutorul șurubului fără fine *T*, acesta rotește roata *G*, care deplasează hârtia.

Prin acţionarea electrică se obţine şi o precizie mai mare în transportul hârtiei, putându-se ajunge până la ± 1 minut pe zi (7 minute pe săptămână).

Aparatele cu înregistrare prin puncte (fig. 51) se utilizează în cazurile când aparatul de măsurat nu are suficientă putere pentru a învinge frecarea peniţei pe hârtie. In acest caz, se apasă pe hârtie acul indicator Z mişcat de organul mobil M, la diferite intervale, printr'un dispozitiv special F. Sub hârtia înregistratoare se află o panglică B îmbibată cu cerneală. Prin această apăsare, în dreptul coamei S apare pe dosul hârtiei un punct, vizibil pe faţa hârtiei transparente. Succesiunea mai multor puncte formează o curbă, care trebue trasată prin unirea lor. Intervalul de înregistrare trebue să fie de cel puţin 10 s, pentru ca acul indicator să poată lua liber o nouă poziţie; deobicei, acest interval este de 20—30 s.

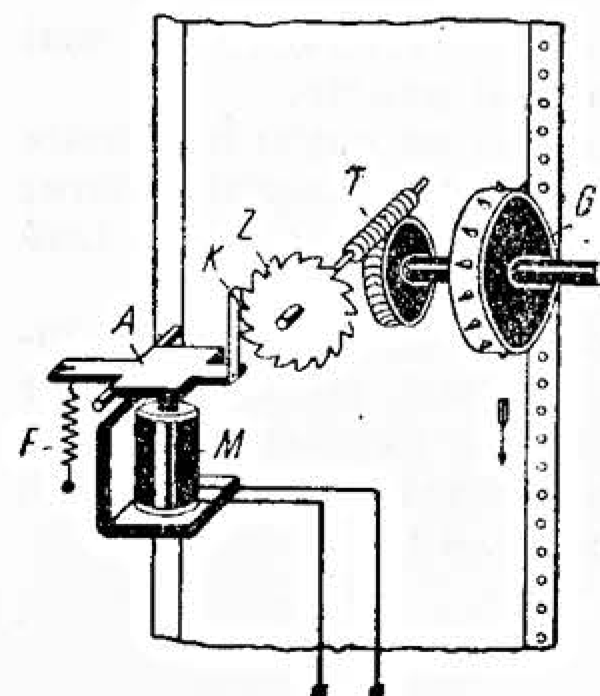


Fig. 50. — Acţionarea electrică a hârtiei de înregistrare.

Cu ajutorul unor comutatori speciali, un astfel de aparat poate înregistra două sau mai multe curbe. Pentru a evita confuziile, fiecare curbă se înregistrează cu o culoare diferită, fiecărei poziţii a comutatorilor corespunzându-i o panglică de o anumită culoare pe ruloul dispozitivului de înregistrare.

Aparatele de acest tip se întrebuinţează curent în termotehnică.

Dispozitivele de înregistrare care trasează curba pe hârtie înnegrită se întrebuinţează în aparate cu totul speciale, de foarte mică putere. Se întrebuinţează şi hârtia colorată, care este acoperită cu un strat subţire de ceară. Prin sgârierea acestui strat de ceară, apare hârtia colorată, care marchează înregistrarea respectivă. Un alt mod de marcare este cel utilizat la indicatoarele de maximum, la care un vârf de argint alunecă pe o hârtie cu barit, realizându-se înregistrări mai curate decât cele obţinute cu peniţă şi cerneală.

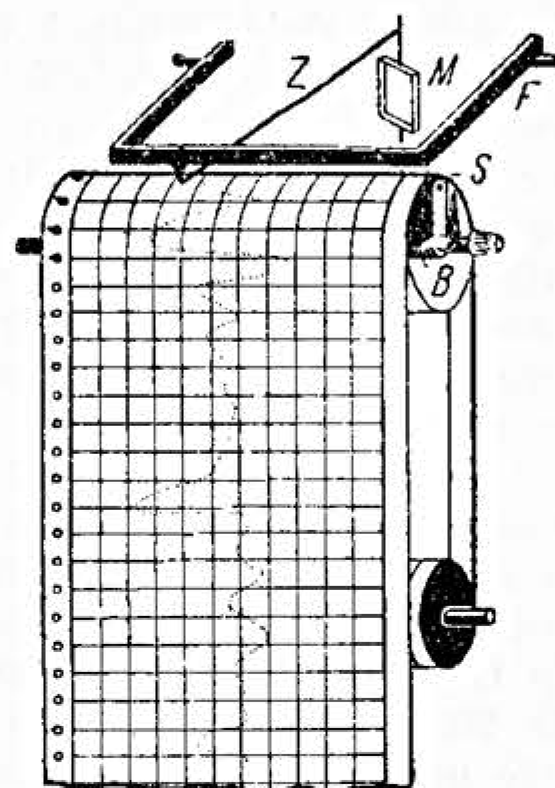


Fig. 51. — Aparat cu înregistrare prin puncte.

65. **Inregistratorii cu rază luminoasă** sunt aparatele cu înregistrare fotografică, începând cu galvanometrele înregistratoare cu oglindă şi mergând până la oscilografe (respectiv şi oscilografele catodice).

66. **Inregistrarea defectelor** este de o mare importanţă în reţelele electrice şi din această cauză, la punctele principale, se pun aparate speciale de înregistrare. Din cauză că oricând poate surveni un defect, aceste aparate sunt totdeauna gata de înregistrat, marcând începutul şi sfârşitul defectului. Hârtia înregistratoare, care are o viteză normală, ia la apariţia defectului o viteză foarte mare, prin acţionarea mecanismului de către relee speciale, pentru ca să se poată urmări toate fazele defectului. Declanşarea funcţionării în cazul unui defect se face în mai puţin de 1/100 s.

Hârtia care în mod normal rulează cu o viteză de 20 mm/h, se mişcă la apariţia defectului cu o viteză de 20 mm/s deci de 3 600 ori mai repede.

Cuplarea pentru viteza ridicată se face, în general, pentru un interval de 24 s; dacă defectul durează mai mult, se cuplează automat şi pentru al doilea interval şi aşa mai departe.

Pentru înregistrare, este nevoie de aparate cu organe mobile repede şi uşor mişcătoare.

67. **Aparatul cu bimetal** este un aparat ieftin pentru înregistrarea curenţilor şi tensiunilor; echipajul mobil are o mişcare foarte amortisată.

La acest aparat, poziţia de echilibru este atinsă abia după circa 5 min. Aparatul va înregistra deci o curbă medie a valorilor.

Iuţeala hârtiei este foarte redusă: 3—10 mm/h. Mecanismul de ceasornic funcţionează pentru viteza de 10 mm/h, timp de 7 zile; pentru viteza de 3 mm/h, timp de 4 săptămâni. Se întrebuinţează, în general, cu transformatori de măsură dând 5 A pe secundar. Precizia aparatului este de circa ± 5%. Pentru înregistrarea tensiunilor, dispozitivul se construeşte pentru tensiunea de 120 V şi 220 V care alimentează aparatul propriu zis sub tensiune redusă şi curent relativ mare, prin intermediul unui transformator. Precizia dispozitivului este în acest caz de ± 2%.

68. **Oscilografe.** Oscilografele sunt aparatele care permit fie observarea pe un ecran, fie fotografierea formei curbei de variaţie a curenţilor şi tensiunilor alternative în funcţie de timp.

Ele se împart în două clase principale, după principiul lor de funcţionare şi anume: *oscilografe electromagnetice şi oscilografe electronice* sau catodice.

69. **Oscilografele electromagnetice.** Sunt aparatele care se întrebuinţează până la frecvenţe maxime de 10—15 kHz. In fig. 52 este redată schema principială a unui oscilograf cu trei bucle de măsurare.

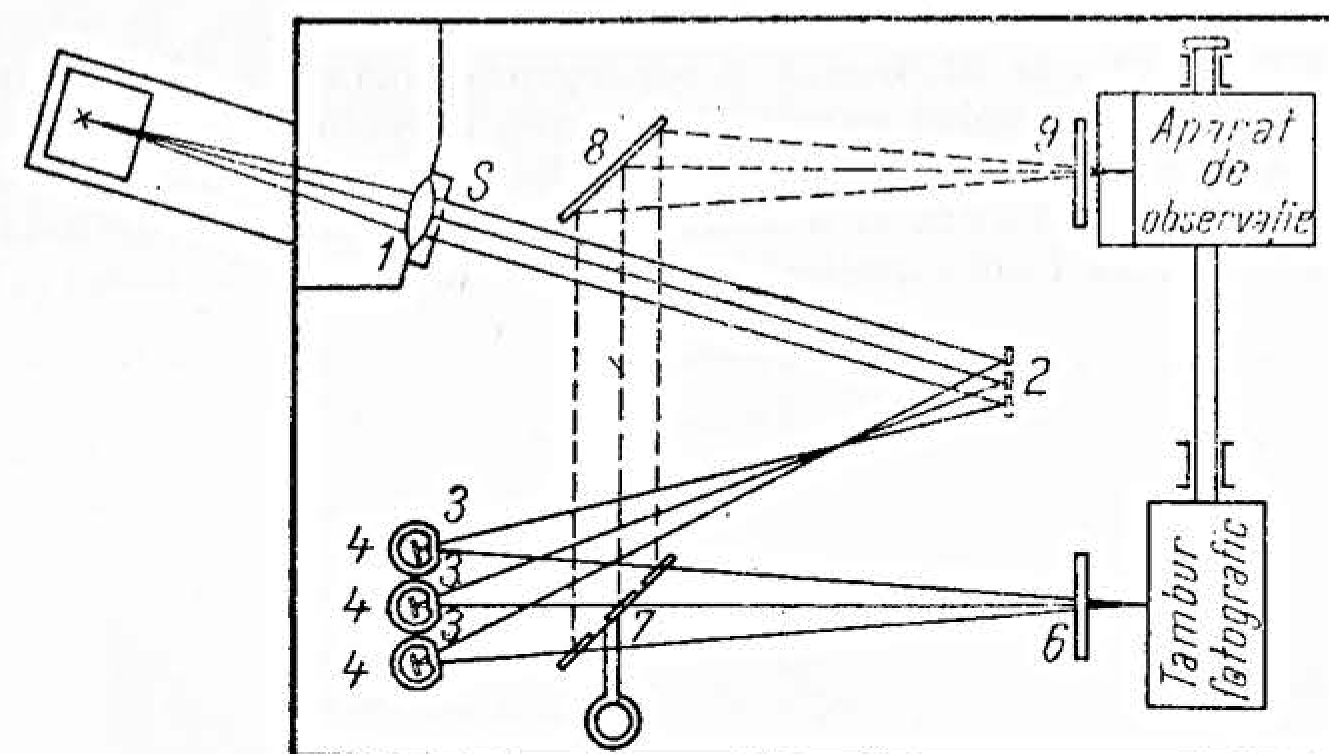


Fig. 52. — Schema principială a unui oscilograf cu trei bucle de măsurare.

Partea esenţială o constitue echipajul galvanometric, format dintr'o singură spiră întinsă între două mici traverse şi constituind bucla de oscilograf *4*, care se montează într'un rezervor cu ulei de parafină ca mediu amortisant şi se introduce între polii unui electromagnet de curent continuu foarte puternic.

La mijlocul ei, bucla are fixată o mică oglindă *3* care produce — datorită unei surse luminoase auxiliare care poate fi o lampă cu arc sau cu incandescenţă, cu condensorul respectiv *4* — un spot luminos; acest spot luminos este proiectat fie pe un aparat de observaţie, fie pe un tambur cu hârtie fotografică, antrenate cu viteză uniformă de un mic motor sincron. Razele luminoase emise de lampa L trecând prin lentila L şi prin trei fante reglabile prevăzute în ecranul S care este perpendicular pe direcţia razelor luminoase (care ies paralele din lentila L), ajung la oglinzile *2* care îndreaptă razele luminoase pe oglinzile buclelor *3*. Apoi se reflectă în oglinzile *7* şi *8* şi ajung prin lentila plan-convexă *9*, la aparatul de observaţie, sau direct la tamburul fotografic, prin lentila plan-convexă *6*, oglinzile *7* fiind rabătute din poziţia lor.

Curentul de studiat, trecând prin bucla de oscilograf, produce deviaţii proporţionale cu valorile momentane ale curentului; mişcarea sincronă, fie a dispozitivului de observare (constituit în general dintr'o oglindă prismatică de secţiune poligonală), fie a tamburului fotografic, produce deplasarea spotului luminos pe un ecran sau pe hârtia fotografică, într'o direcţie normală pe direcţia deplasării spotului, datorită curentului din buclă; spotul luminos descrie astfel pe ecranul dispozitivului de observare sau pe hârtia fotografică, curba de variaţie cu timpul a curentului.

Pentru studiul unei curbe de tensiune, se oscilografiază curentul (în fază cu aceasta) dat de această tensiune într'o rezistenţă neinductivă (de câteva mii de ohmi).

Amplitudinea curentului se reglează în bucla de oscilograf cu ajutorul unor şunturi variabile în mod continuu, care permit oscilografierea curenţilor mari.

Oscilografele pot avea trei sau mai multe bucle de măsurare, mergând până la şase sau opt; se pot astfel înregistra simultan mai multe curbe de curent şi de tensiune.

Deasemenea, cu unele oscilografe se pot studia şi curbele de variaţie cu timpul a puterii unui circuit.

Oscilograful permite fotografierea şi observarea nu numai a fenomenelor periodice, ci şi a celor tranzitorii.

Fotografiile se pot lua pe benzi de hârtie de circa 20 cm × 8 cm sau pe filme de 4—5 m lungime.

Pentru nevoile curente de oscilografiere, în laboratoare, la platformele de încercări industriale, etc. se utilizează şi oscilografe portative mai simple—osciloscoape — care permit în general numai observarea curbelor, nu şi fotografierea lor.

In fig. 53 este reprezentat mersul razelor luminoase într'un osciloscop. *L* este o lampă, *S* un ecran cu fantă, *C* o lentilă plan-convexă, *R* o oglindă plană, *P* o oglindă poligonală, *M* bucla osciloscopului şi *T* un geam de observaţie, mat.

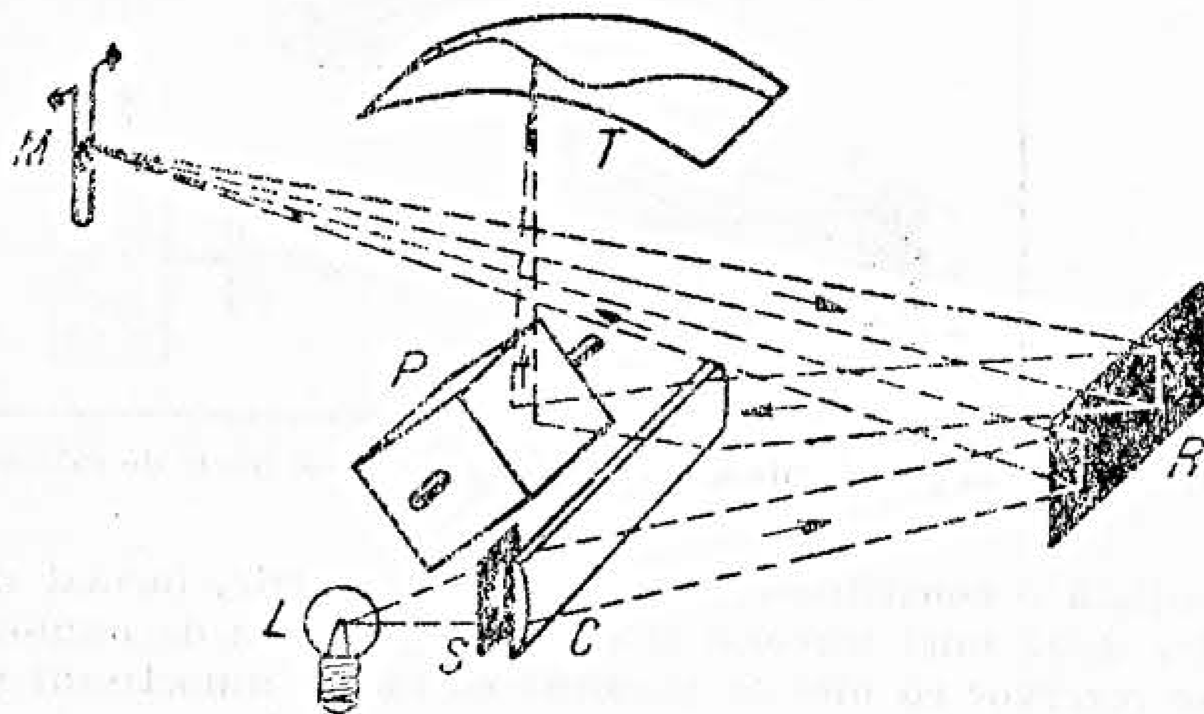


Fig. 53. — Schema principială a unui osciloscop.

Un tip perfecţionat de oscilograf electromagnetic este tipul sovietic MPO-2 [1]) cu 8 bucle de măsurare, putând înregistra pe film cinematografic fenomene cu frecvenţe de 1 200—10 000 Hz.

70. Oscilograful catodic. Se întrebuinţează pentru înregistrarea curenţilor şi tensiunilor alternative care depăşesc frecvenţa de 10 000—15 000 Hz, pentru

[1]) Conceput şi realizat de V. O. Arutiunov, A. M. Danovschi, B. A. Ciliber şi A. C. Voscoboinoc, distinşi pentru aceasta cu premiul Stalin.

care oscilografele electromagnetice nu mai pot da satisfacţie, din cauza inerţiei echipajului mobil.

In oscilografele catodice, organul mobil îl constitue un fascicol de raze electronice lipsite de inerţie, ceeace permite înregistrarea fenomenelor celor mai rapide, de câteva sute de MHz.

Elementul principal al oscilografului catodic este un tub cu vid; acesta are o porţiune cilindrică, iar restul este de formă conică după cum se vede în fig. 54.

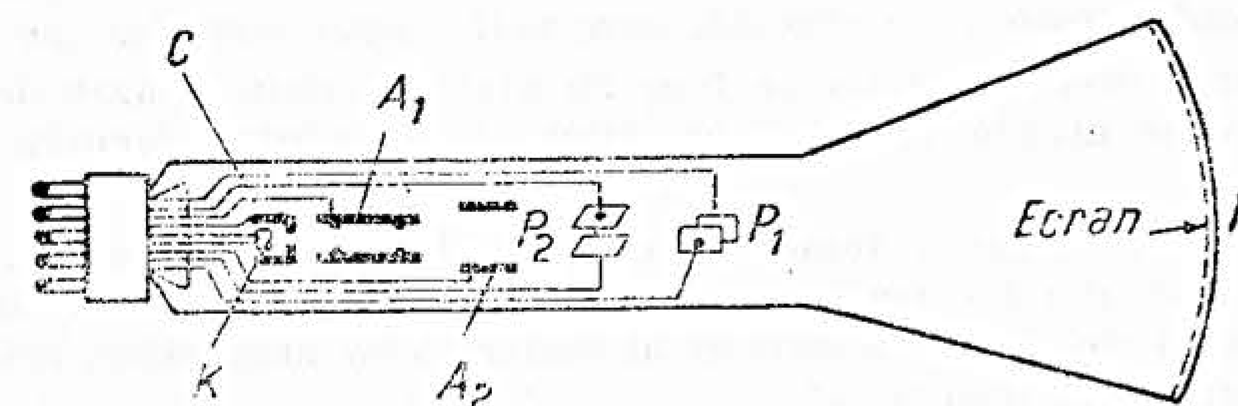


Fig. 54. — Tubul oscilografului catodic.

Porţiunea cilindrică se termină cu un soclu metalic, în care sunt fixaţi electrozii pentru alimentarea tubului.

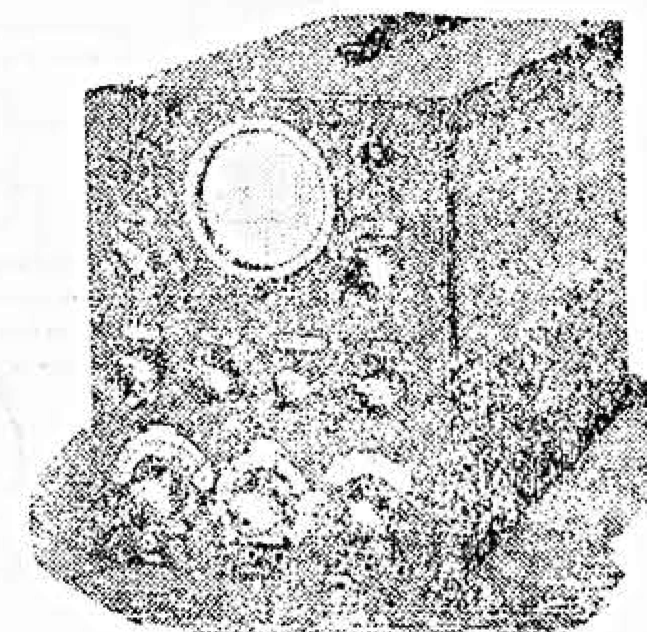
Partea conică se termină cu o suprafaţă sferică, acoperită cu un strat de substanţă fluorescentă şi constituind ecranul oscilografului, pe care se formează un spot luminos, când este atins de un fascicol de electroni.

In interiorul tubului, lângă soclul metalic, se găseşte catodul *K*, care, încălzit, emite electroni.

Graţie cilindrului metalic *C* din jurul catodului şi a celor doi anozi A_1 şi A_2, fascicolul de electroni este concentrat, îngustat şi, ajungând la ecranul fluorescent *F*, produce un spot luminos fin.

Fascicolul de electroni trece prin două perechi de plăci deviatoare paralele, plăcile verticale P_2 şi plăcile orizontale P_1.

Dacă se aplică două tensiuni alternative plăcilor P_1 respectiv P_2, fascicolul de electroni este deplasat în sens orizontal respectiv vertical, iar spotul luminos descrie pe ecranul fluorescent o curbă caracteristică denumită *figura lui Lissajoux*, a cărei formă depinde de amplitudinile, frecvenţele şi decalajele celor două tensiuni şi care permite să se determine frecvenţa şi decalajul unei tensiuni faţă de cealaltă tensiune cunoscută.


Fig. 55. — Oscilograf catodic portativ.

Pentru înregistrarea formei unei curbe de tensiune alternativă, se aplică această tensiune plăcilor de deplasare verticală P_2, iar plăcilor P_1 de deplasare orizontală li se aplică o tensiune auxiliară specială, în formă de dinţi de ferestrău, care variază liniar cu timpul în intervalul unei perioade a curentului, revenind brusc la valoarea zero, la sfârşitul perioadei.

In aceste condiţii, spotul luminos descrie pe ecranul fluorescent curba de variaţie a tensiunii cu timpul.

O curbă de curent se înregistrează oscilografiind căderea de tensiune într'o rezistenţă ohmică, parcursă de curentul respectiv.

In afara tubului propriu zis, oscilograful catodic mai comportă o serie de alte accesorii, montate împreună cu tubul într'o cutie metalică, portativă. Punerea în funcţiune se face imediat, prin racordarea aparatului la o priză de curent alternativ de 120—220 V.

In fig. 55 este redată vederea şi în fig. 56 schema principială a legăturilor interioare ale unui oscilograf catodic portativ.

Inregistrarea simultană a două curbe de tensiune se realizează prin utilizarea unui comutator special, fie mecanic fie electronic, care alimentează plăcile P_2 alternativ cu cele două tensiuni de studiat, care astfel apar simultan pe ecran.

Fotografierea oscilogramelor se face cu ajutorul unui aparat de fotografiat, al cărui obiectiv se aşează în faţa ecranului oscilografului, ferindu-l de lumină străină.

In afară de observarea fenomenelor periodice şi neperiodice, oscilograful catodic permite studiul a diverse probleme din tehnica măsurătorilor electrice, ca de exemplu observarea ciclului de histerezis al materialelor magnetice, ridicarea caracteristicelor tuburilor electronice, etc.

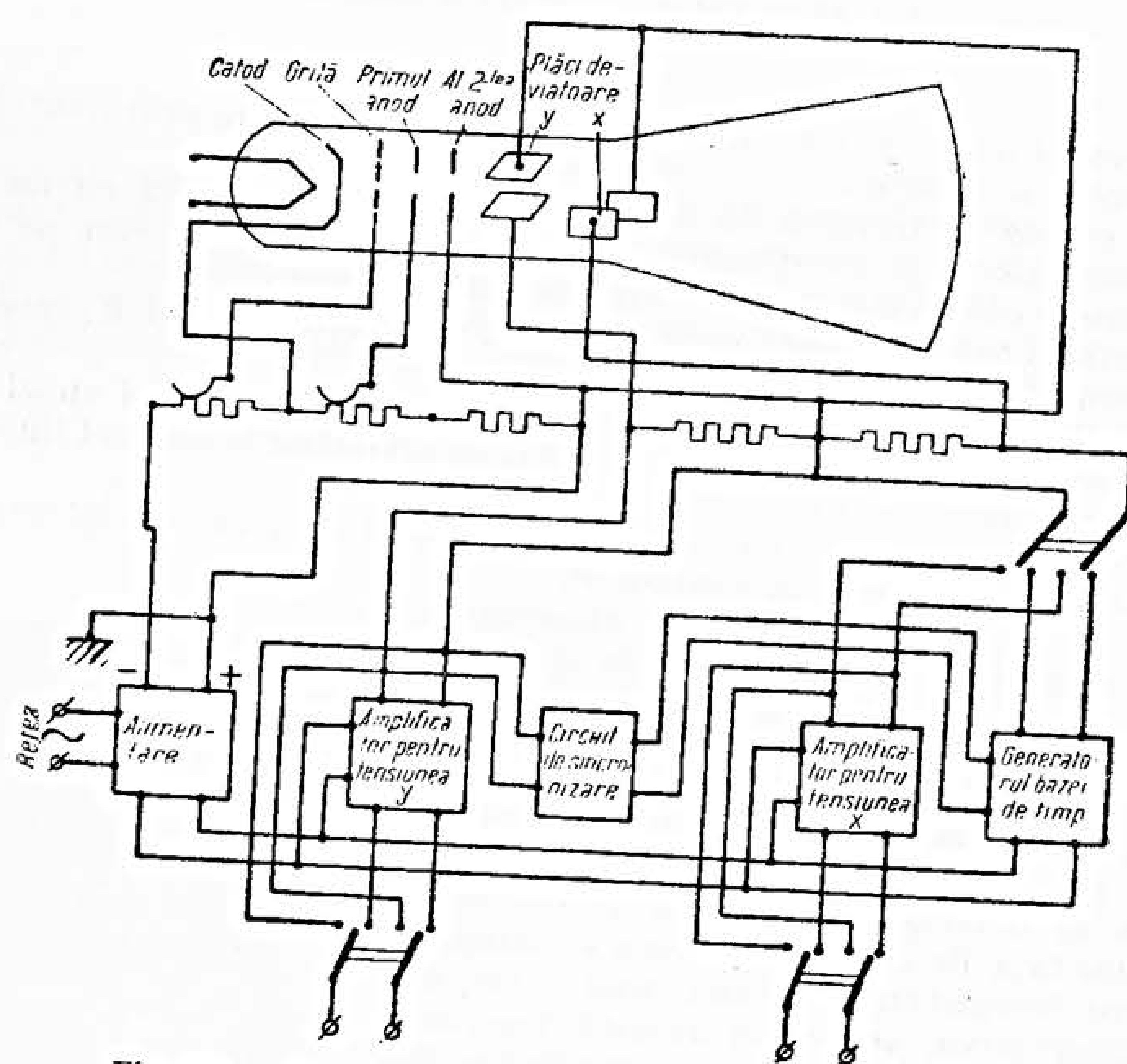


Fig. 56. — Schema principială a unui oscilograf catodic.

71. Oscilografele catodice de înaltă tensiune. Pentru studiul şi fotografierea fenomenelor ultrarapide, de exemplu efectul trăsnetului asupra aparatelor de protecţie a reţelelor de transmisie, fenomenul întreruperii la întrerupătorii automaţi de înaltă tensiune, înregistrarea formei undelor de tensiune la încercările de şoc ale izolatorilor de înaltă tensiune, etc., se întrebuinţează oscilografe catodice de înaltă tensiune, de o construcţie mult mai complicată decât aceea a oscilografelor portative dela § 70 de mai sus.

72. Clidonograful este un aparat portativ care serveşte la înregistrarea tensiunilor electrice variabile. Aparatul se bazează pe principiul *figurilor lui Lichtenberg*, care se formează pe un ecran de sticlă acoperit cu pulbere de sulf şi supus unor descărcări electrice.

După aspectul şi mărimea figurilor, se poate deduce felul tensiunii cercetate, forma undei de tensiune şi valoarea aproximativă a tensiunii.

Cu toată precizia redusă a acestor aparate ($\pm$20%), ele sunt întrebuinţate cu folos în reţelele de înaltă tensiune.

73. Aparate de rezonanţă. Acestea utilizează principiul fie al rezonanţei mecanice, fie al rezonanţei electrice.

Dintre primele aparate fac în special parte frecvenţmetrele cu lamele vibrante şi galvanometrul de rezonanţă, ambele aparate purtând şi denumirea de aparate « de vibraţii ».

74. Frecvenţmetrele de rezonanţă cu lamele vibrante sunt de două categorii:

— cu acţionare directă;
— cu acţionare indirectă.

α) *Frecvenţmetrul cu acţionare directă* este compus dintr'un număr de lamele de oţel (13—21—25 sau 31) de 3—7 mm lăţime şi de 30—60 mm lungime, fixate pe o traversă de metal.

Lamelele sunt astfel executate, încât fiecare dintre ele să aibă o anumită frecvenţă proprie de oscilaţie.

In faţa lamelelor se găseşte un electromagnet, a cărei înfăşurare este alimentată de tensiunea a cărei frecvenţă f se măsoară.

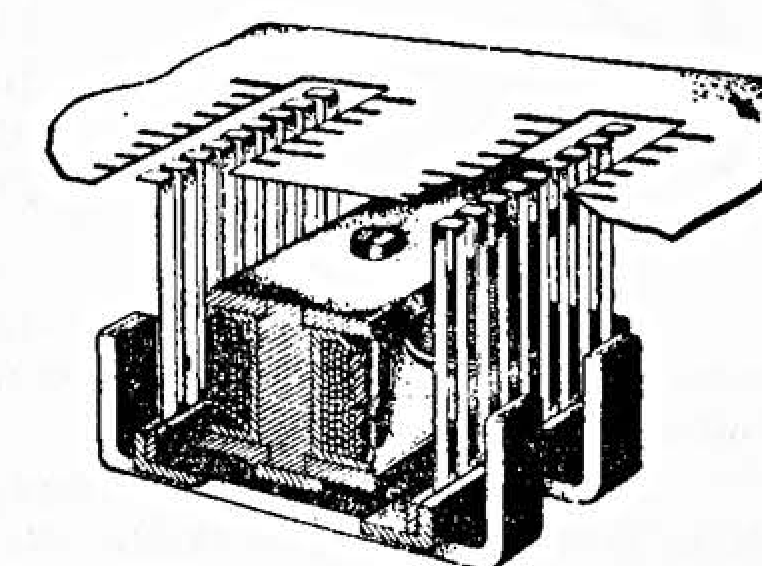


Fig. 57. — Frecvenţmetru cu acţionare directă.

Principiul de funcţionare este următorul:

Electromagnetul, fiind alimentat cu un curent alternativ de frecvenţă f, atrage lamelele de $2f$ ori pe secundă şi le face să vibreze cu o amplitudine foarte redusă, afară de lamela a cărei frecvenţă proprie de oscilaţie a fost potrivită la valoarea $2f$ Hz şi care, intrând în rezonanţă mecanică, vibrează cu o amplitudine mare, vizibilă la distanţă, graţie unui steguleţ dela extremitatea lamelei, vopsit în alb, care descrie o dâră albă.

Fiecare din lamele va vibra pentru o anumită valoare a frecvenţei,

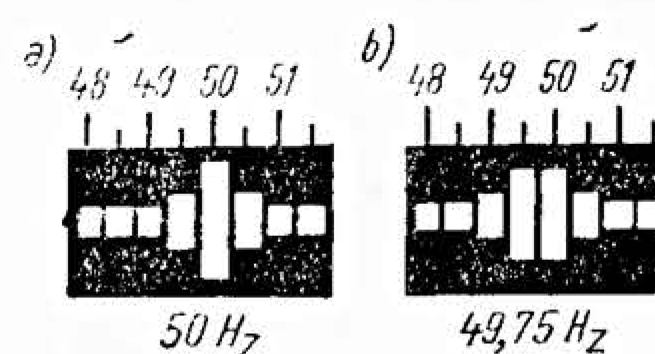


Fig. 58. — Citirea la frecvenţmetru (a — 50 Hz, b — 49,75 Hz...).

Astfel, pentru un frecvenţmetru de 50 Hz, aparatul posedă în general 21 lamele, potrivite pentru frecvenţe proprii de oscilaţii de 90, 91, 92 ... 110 per/s, astfel încât să permită măsurarea frecvenţelor între 45 şi 55 Hz din 0,5 în 0,5 perioade.

In realitate, se pot citi şi fracţiuni mai mici decât această valoare, datorită vibraţiei complexe a mai multor lamele alăturate, astfel cum se vede în fig. 58.

β) *Frecvenţmetrul cu acţionare indirectă.* La acest aparat, lamelele sunt fixate pe o traversă metalică, de care mai este prinsă paralel cu lamelele şi o plăcuţă de fier de circa $2 \times 3 \times 0,2$ cm, traversa fiind ea însăşi fixată pe două benzi metalice ca în fig. 59.

Electromagnetul atrage plăcuţa de fier care vibrează şi transmite vibraţiile traversei şi deci lamelelor, restul funcţionării fiind identic cu cel descris mai sus.

Avantajul acestor aparate este că aci electromagnetul este mult mai mic şi consumaţia lui este mult mai redusă.

Ele se construesc pentru frecvenţe între 10—100 Hz şi sunt cele mai întrebuinţate frecvenţmetre.

Frecvenţmetrele cu acţiune directă au avantajul unei sensibilităţi mai mari şi deci al unei citiri mai exacte a frecvenţei.

In plus ele se pot întrebuinţa pentru frecvenţe mari, până la 1 000 — 1 500 Hz.

La frecvenţmetrele cu acţiune indirectă, se poate întrebuinţa în locul electromagnetului obişnuit un electromagnet polarizat, în care miezul de fier este înlocuit cu un magnet permanent, al cărui flux slăbeşte, respectiv întăreşte fluxul dat de curentul alternativ în cursul a două semiperioade vecine, cu rezultatul că electromagnetul polarizat atrage lamelele numai de f ori în loc de $2f$ ori pe secundă.

Fig. 59. — Frecvenţmetru cu acţionare indirectă.

Se pot astfel construi frecvenţmetre cu un domeniu dublu de măsurare, care să conţină doi electromagneţi: unul polarizat, pentru frecvenţa $f = 50$ Hz de pildă, iar altul nepolarizat, pentru frecvenţa de $f/2 = 25$ Hz de pildă, fiecare acţionând asupra unei plăcuţe de fier fixată de aceeaşi traversă, iar lamelele fiind construite pentru o frecvenţă proprie de f Hz.

Frecvenţmetrele se construesc pentru tensiuni de 120 V, 240 V, 380 V, 500 V, punându-se în serie cu bobina de excitaţie a electromagnetului rezistenţe adiţionale adecvate. Racordarea lor la reţea se face ca şi aceea a voltmetrelor: în derivaţie.

75. **Galvanometrul de vibraţii sau de rezonanţă** este aparatul care serveşte la detectarea curentului alternativ în punţile şi montajele de joasă şi înaltă tensiune.

Există două categorii principale de astfel de galvanometre:
— cu plăcuţă de fier mobilă;
— cu bobină mobilă.

α) *Galvanometrul cu plăcuţă de fier mobilă* se compune în esenţă dintr'un electromagnet GM (fig. 60) alimentat cu curent continuu, între ale cărui piese polare (de formă specială) se găseşte o plăcuţă de fier N de 4 × 5 mm, fixată de un fir metalic întins în jurul căruia poate oscila şi pe care este fixată o mică oglindă S, luminată de o lanternă, pentru măsurarea obiectivă cu spot luminos a deviaţiei plăcuţei.

Piesele polare W poartă câte o înfăşurare de magnetizare, prin care trece curentul alternativ de măsurat, transformându-se astfel în câte un electromagnet de curent alternativ cu câte doi poli.

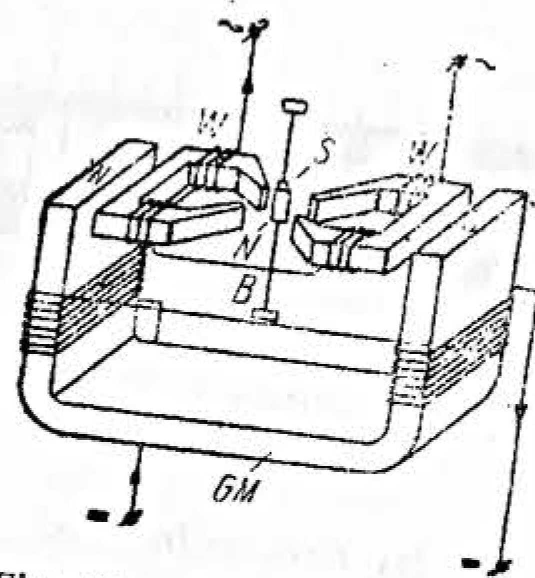


Fig. 60. — Galvanometru de vibraţii cu placă de fier mobilă.

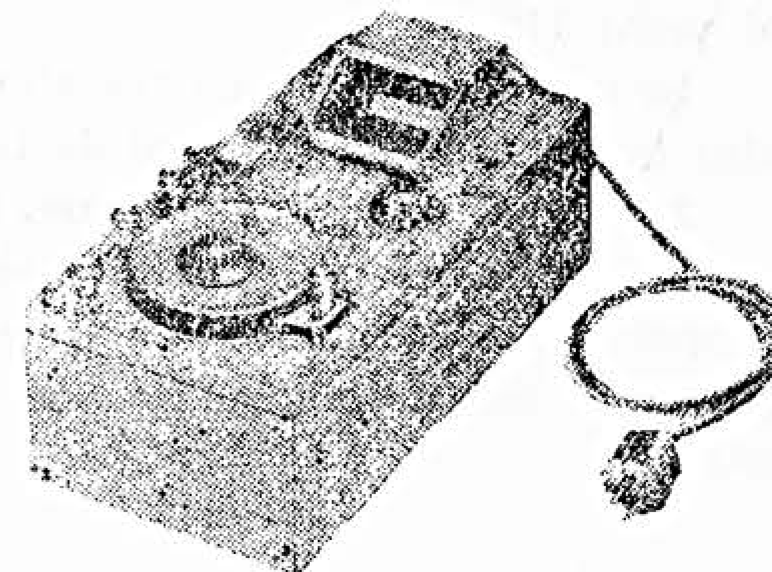
Principiul de funcţionare este următorul:

Câmpul magnetic al electromagnetului de curent continuu magnetizează plăcuţa de fier, care capătă o anumită polaritate; curentul alternativ de măsurat excită electromagneţii formaţi de piesele polare, iar aceştia atrag şi resping plăcuţa de fier şi o fac să oscileze cu o frecvenţă de f Hz.

Spotul luminos reflectat de oglinda S, descrie pe rigla dispozitivului de citire al aparatului o bandă luminoasă, a cărei lăţime este proporţională cu dublul valorii maxime a curentului alternativ, care astfel poate fi măsurat.

Pentru a mări sensibilitatea aparatului şi a obţine deviaţii cât mai mari, se variază curentul continuu, variindu-se astfel cuplul antagonist al plăcuţei, până când frecvenţa proprie de oscilaţie a acesteia coincide cu frecvenţa curentului de studiat şi deci plăcuţa intră în rezonanţă mecanică şi dă maximum de amplitudine a deviaţiei şi deci şi a benzii luminoase pe riglă.

Sensibilitatea acestor aparate este de ordinul de $0{,}25 \times 10^{-7}$ A/mm. Ele se construesc pentru frecvenţe de 25—100 Hz. Alimentarea cu curent continuu se face dela o baterie de circa 24 V, sub un curent de circa 0,2 A.


Fig. 61. — Galvanometru de vibraţii cu plăcuţă de fier şi magnet permanent.

In locul electromagnetului de curent continuu se poate întrebuinţa un magnet permanent, reglajul rezonanţei făcându-se prin variaţia întrefierului circuitului magnetic. La acest aparat plăcuţa mobilă este înlocuită printr'un mic magnet mobil.

In fig. 61 este reprezentat un astfel de aparat industrial portativ.

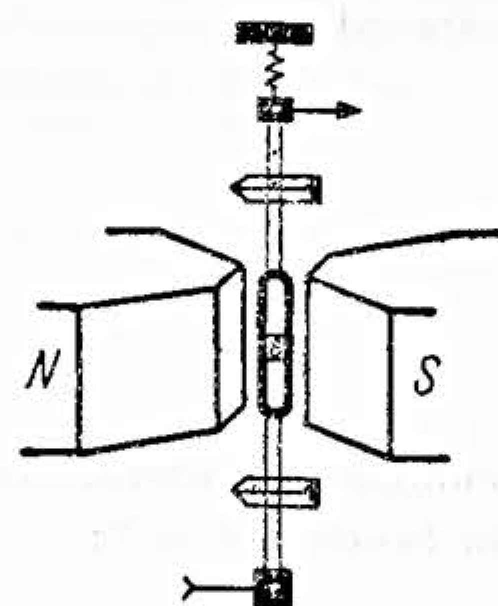


Fig. 62. — Galvanometru de vibraţii cu bobină mobilă.

β) *Galvanometrul de rezonanţă cu bobină mobilă şi magnet permanent* este de o construcţie similară cu aceea a unui galvanometru de curent continuu, curentul alternativ de măsurat trecând printr'o bobină dublu suspendată de un fir şi aşezată între polii unui magnet permanent, ceeace produce oscilaţia cu frecvenţa f a bobinei, întocmai ca la un oscilograf.

Reglajul rezonanţei se realizează prin variaţia tensiunii firului de suspensie a bobinei, ca în fig. 62.

Avantajul galvanometrelor de rezonanţă cu magnet permanent este acela că nu reclamă întrebuinţarea unei surse auxiliare de curent continuu.

E. Transformatori de măsură

76. **Generalităţi.** Transformatorii de măsură au scopul de a înlesni măsurarea curenţilor şi tensiunilor alternative mari, care întrec domeniul obişnuit al aparatelor de măsurat, adică în general curenţi mai mari decât 50—100 A şi tensiuni mai mari decât 600—1000 V.

Apoi, pentru măsurătorile sub tensiune înaltă, transformatorii servesc şi la protecţia personalului, care astfel nu vine în contact decât cu aparatele montate pe partea de joasă tensiune a transformatorilor.

Aceştia au în general două bobinaje izolate între ele şi înfăşurate pe un sâmbure de fier, care constitue circuitul magnetic al transformatorului, în acelaşi mod ca la transformatorii de forţă. Se deosebesc două feluri de transformatori:
— transformatori de intensitate;
— transformatori de tensiune.

Transformatorii de intensitate au bobinajul primar dimensionat pentru intensitatea de măsurat, iar bobinajul secundar pentru o intensitate de 5 A sau, în anumite cazuri, 1 A.

Transformatorii de tensiune au bobinajul primar construit pentru întreaga tensiune de măsurat, iar bobinajul secundar pentru o tensiune de 100 V (la modele mai vechi 110 V).

Se poate spune că un transformator de curent funcţionează ca un transformator în scurtcircuit, iar unul de tensiune, ca un transformator în gol.

77. **Raportul de transformare.** Orice transformator de măsurat este definit prin *raportul său de transformare*, care arată de câte ori mărimea din circuitul primar este mai mare decât aceea din secundar. Astfel, la transformatorii de intensitate raportul de transformare este:

$$K = \frac{I_n}{5},$$

în care I_n este intensitatea nominală în circuitul primar;
5 — intensitatea nominală în circuitul secundar.

La transformatorii de tensiune, raportul de transformare este:

$$K = \frac{U_n}{100},$$

în care U_n este tensiunea nominală în circuitul primar;
100 — tensiunea nominală în circuitul secundar.

Curenţii respectiv tensiunile nominale şi sarcinile secundare standardizate (după GOST) pentru transformatorii de măsură sunt daţi în tabelele 6 şi 7:

Tabela 6. Transformatori de intensitate

Curentul nominal primar I_1	5 A 7,5 A 10 A 15 A 20 A 30 A 40 A	50 A 75 A 100 A 150 A 200 A 300 A 400 A 600 A	750 A 1 000 A 1 500 A 2 000 A 3 000 A 4 000 A 5 000 A 6 000 A	7 500 A 10 000 A 15 000 A
Curentul nominal secundar I_2	5 A; în cazuri speciale 1 A			
Puterea nominală $=RI_2^2$	Rezistenţa R a aparatelor care se leagă pe secundar, incluziv conducte: R = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,2; 1,6; 2 Ω pentru 5A R = 5; 10; 15; 20; 30 Ω pentru 1 A			

Tabela 7. Transformatori de tensiune

Tensiunea nominală primară U_1	380 500 3 000 6 000	10 000 20 000 35 000 110 000 154 000	220 000
Tensiunea nominală secundară U_2	100 V		
Sarcina nominală în VA	25; 30; 40; 50; 80; 100; 120; 200; 320; 480; 500; 600; 1 000; 1 200; 2 000;		

78. **Tensiunile de încercare** ale transformatorilor sunt determinate în funcţie de tensiunile lor nominale. In tabela 8 sunt date, pentru tensiunile nominale standardizate, tensiunile de încercare şi tensiunile maxime de utilizare.

Tabela 8

Tensiunea nominală, în kVef	0,5	3	6	10	15*	20*	35	60	110	154*	220
Tensiunea maximă de serviciu, în kVef	0,6	3,3	6,6	11	16,5	22	38,5	69	121	169	242
Tensiunea de încercare în kVef	10	24	32	42	50	63	95	152	260	360	500

Aceste tensiuni sunt valabile când transformatorii se montează în reţele aeriene. Pentru cazul când se utilizează în reţele subterane pentru tensiuni până la 6 kV, tensiunile respective sunt cele din tabela 9.

Tabela 9

Tensiunea nominală, în kVef	0,5	3	6
Tensiunea maximă de serviciu, în kVef	0,6	3,3	6,6
Tensiunea de încercare, în kVef	5	12	20

Conform prescripţiilor, tensiunea de încercare aplicată între înfăşurarea de înaltă tensiune a transformatorului pe de o parte, şi înfăşurarea de joasă tensiune legată cu masa, de altă parte, trebue să fie suportată timp de un minut, fără ca izolaţia transformatorului să fie străpunsă.

Izolaţia înfăşurării de joasă tensiune faţă de masă se încearcă totdeauna la o tensiune de 2 kV.

---

*) Aceste tensiuni nu sunt cuprinse în STAS 930-50.

79. **Erorile transformatorilor de măsură.** La transformatorii de măsură se deosebesc două feluri de erori:

— o eroare de raport (de curent, respectiv de tensiune);

— o eroare de unghi.

Eroarea procentuală de curent este definită de relaţia:

$$\varepsilon_i\% = \frac{K_n I_2 - I_1}{I_1} \times 100$$

în care K_n este valoarea nominală a raportului de transformare;

I_1 — curentul primar;

I_2 — curentul secundar.

Eroarea procentuală de tensiune este definită de relaţia:

$$\varepsilon_u\% = \frac{K_n U_2 - U_1}{U_1} \times 100,$$

în care K_n este valoarea nominală a raportului de transformare;

U_1 — tensiunea primară;

U_2 — tensiunea secundară.

Eroarea de unghi la transformatorii de măsură (de intensitate sau tensiune) este unghiul de decalaj dintre vectorul reprezentativ al mărimii primare (curentul primar sau tensiunea primară) şi vectorul reprezentativ al mărimii secundare, rotit cu 180°, eroarea considerându-se pozitivă când vectorul mărimii secundare rotit cu 180° este decalat înaintea vectorului mărimii primare.

La transformatorul de intensitate eroarea de unghi este în cele mai multe cazuri pozitivă, atât timp cât încărcarea transformatorului de măsură nu este inductivă. Numai la încărcări inductive mari ale transformatorului de intensitate, există o eroare de unghi negativă.

La transformatorii de tensiune, eroarea de unghi este în general pozitivă.

Eroarea relativă ε_P (exprimată în %) la măsurarea puterii monofazate cu transformatori de măsură are ca expresie

$$\varepsilon_P\% = \frac{P' - P}{P} \times 100 = \varepsilon_i\% + \varepsilon_u\% - 0{,}0292\,(\delta_u - \delta_i)\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

în care:

P' este puterea măsurată (la wattmetrul montat pe transformatori de măsură);

P — puterea reală;

$\varepsilon_i\%$ — eroarea procentuală de curent a transformatorului de intensitate

$\varepsilon_u\%$ — eroarea procentuală de tensiune a transformatorului de tensiune

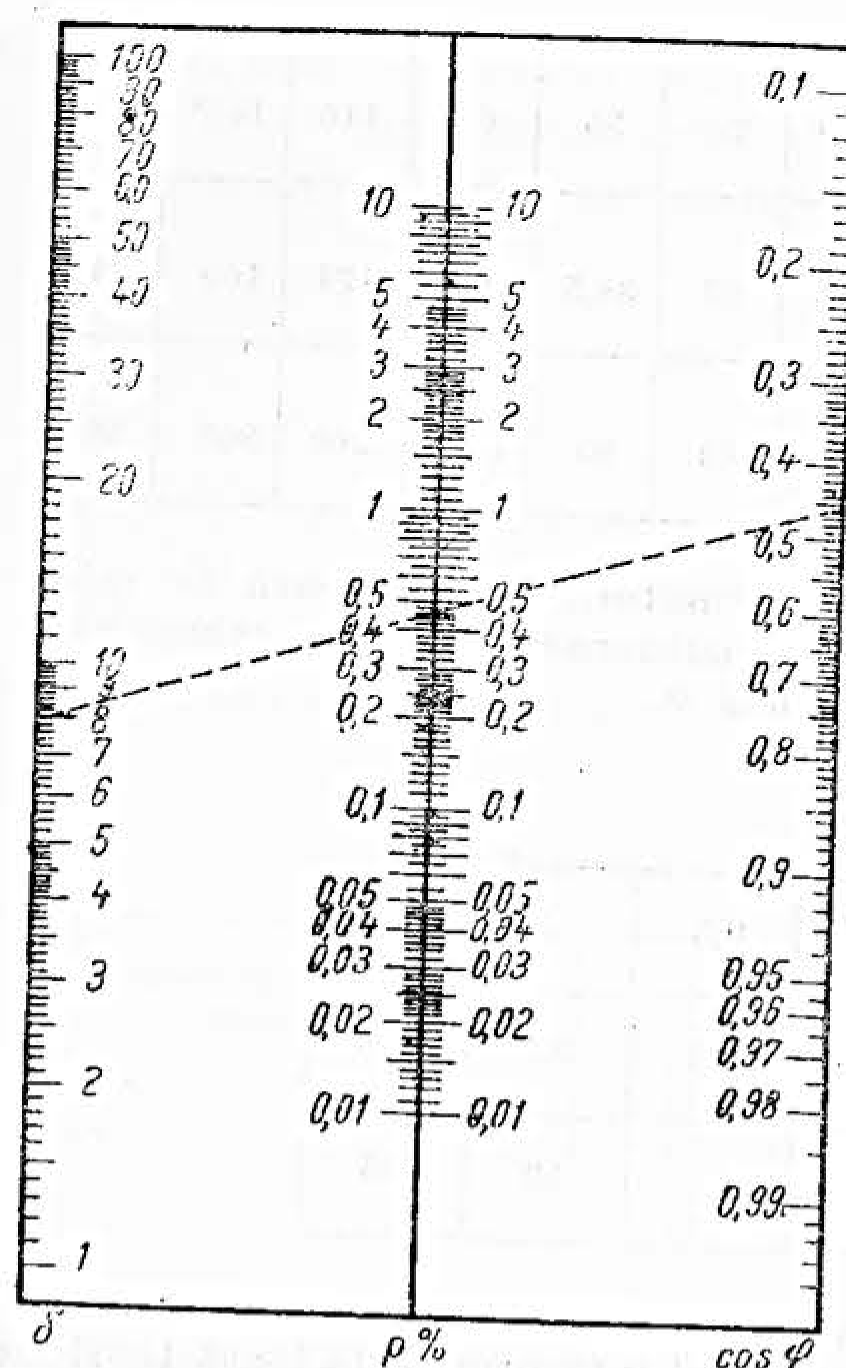


Fig. 63. — Nomogramă pentru calculul corecţiei datorită erorii de unghi a transformatorului de măsură, la măsurări de puteri.

δ_i şi δ_u — eroarea de unghi a transformatorului de intensitate respectiv de tensiune, exprimate în minute;

φ — decalajul între curentul şi tensiunea primară.

Pentru calculul erorii ε_P, se observă că expresia de mai sus se poate scrie

$$\varepsilon_P\% = \varepsilon_i\% + \varepsilon_u\% - 0{,}0292\,\delta_u\,\mathrm{tg}\,\varphi + 0{,}0292\,\delta_i\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Calculul corecţiilor procentuale $0{,}0292\,\delta_u\,\mathrm{tg}\,\varphi$ datorită transformatorului de tensiune şi $0{,}0292\,\delta_i\,\mathrm{tg}\,\varphi$ datorită transformatorului de intensitate poate fi uşurat

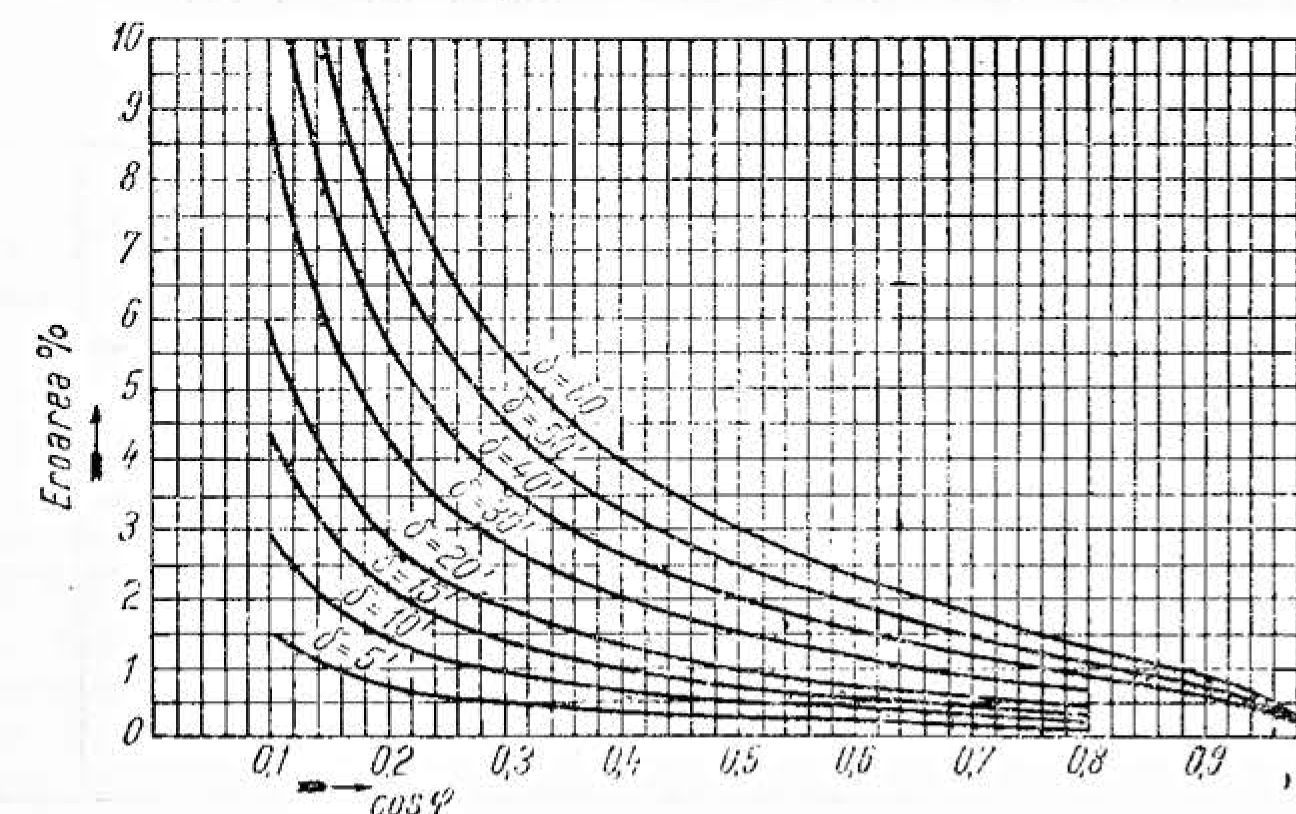


Fig. 64. — Curba erorilor la cos φ = 0,1 — 1 pentru diferiţi δ.

prin utilizarea nomogramei din fig. 63. Se uneşte valoarea erorii de unghi δ cu valoarea factorului de putere cos φ şi se găseşte, la întretăierea cu linia din mij-

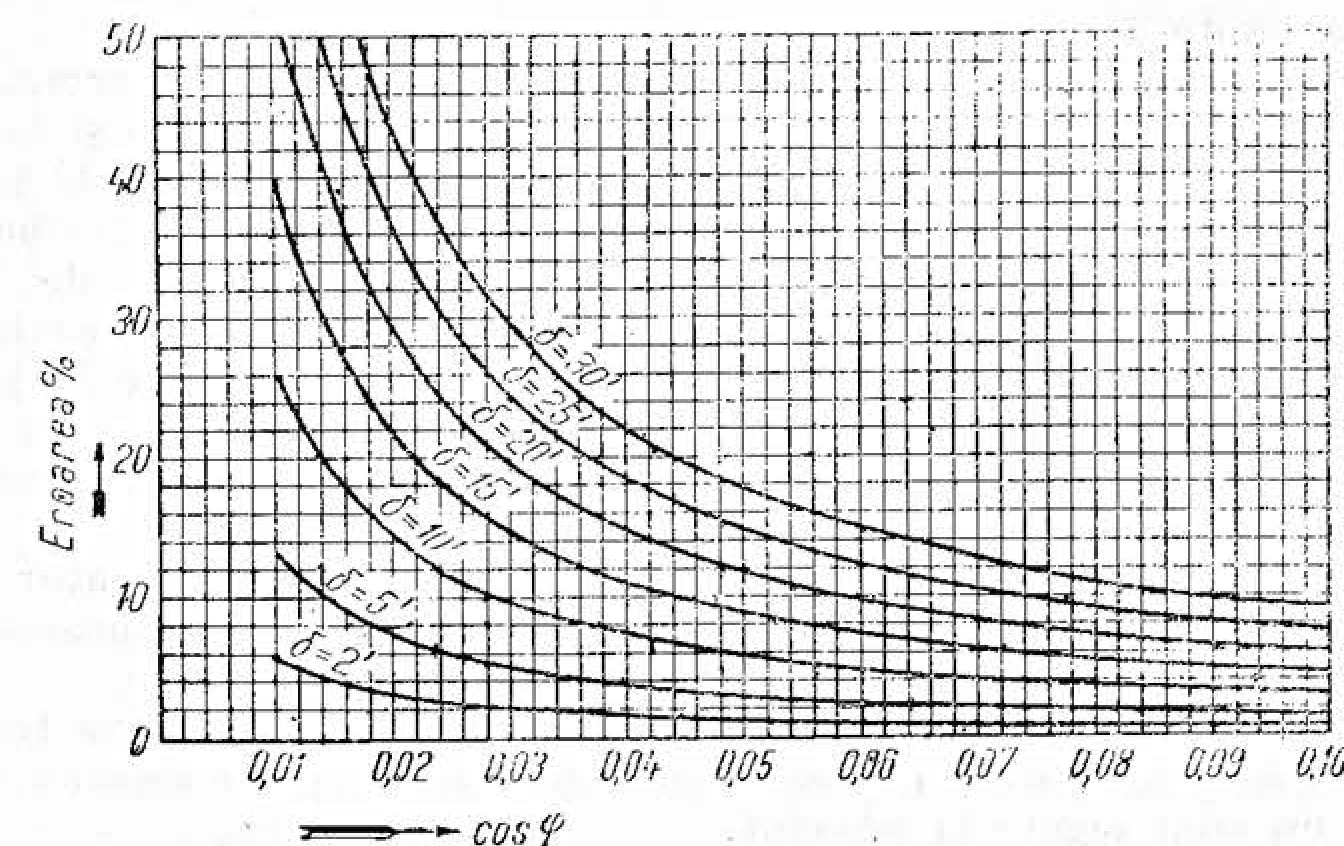


Fig. 65. — Curba erorilor la cos φ = 0,01 — 0,1 pentru diferiţi δ.

locul diagramei, *mărimea* corecţiei de efectuat. Se stabileşte astfel, corecţia mai întâi pentru transformatorul de intensitate şi apoi pentru transformatorul de tensiune.

O imagine a erorilor procentuale pentru cazul măsurării de puteri, la diferiţi cos φ în reţea şi diferiţi δ, este dată în diagramele fig. 64 şi 65.

In fig. 64 diagrama dă erorile procentuale pentru $\delta = 5' - 60'$ şi cos $\varphi = 0{,}1 - 1$.

In fig. 65 diagrama dă erorile pentru $\delta = 2' - 30'$ şi cos $\varphi = 0{,}01 - 0{,}1$.

După ce s'a determinat mărimea corecţiilor cu ajutorul nomogramei, pentru a cunoaşte semnul acestora, trebue să se ţină seama de natura decalajului φ sub care se măsoară puterea, luându-se tg φ pozitivă sau negativă, după cum sarcina este inductivă sau capacitivă. Corecţiile se fac conform tabelei 10.

Tabela 10

Felul transformatorului de măsură	Decalajul φ	Semnul erorii de unghi δ	La suma $\varepsilon_i \% + \varepsilon_u \%$ corecţia trebue
Transformator de intensitate	inductiv	+	adunată
		−	scăzută
	capacitiv	+	scăzută
		−	adunată
Transformator de tensiune	inductiv	+	scăzută
		−	adunată
	capacitiv	+	adunată
		−	scăzută

80. **Reguli pentru montajul transformatorilor de măsură.** Pentru montajul şi exploatarea transformatorilor de măsură, trebue respectate următoarele reguli:

Regula Nr. 1. Când înfăşurarea primară a unui transformator de măsură este legată la un circuit de înaltă tensiune, nu se va atinge transformatorul. Nu trebue atinse nici bornele secundare ale transformatorului, din cauza apropierii lor de partea de înaltă tensiune.

Dacă este nevoie să se treacă la altă sensibilitate a transformatorului prin schimbări de legături în secundar, se poate face această operaţie şi fără a scoate transformatorul de sub tensiune, dar având grije ca comutatoarele prin care se execută schimbări de legături, să fie suficient de depărtate de transformator.

Regula Nr. 2. Infăşurarea secundară a transformatorului de intensitate, dacă bobinajul primar este pus în circuit, trebue să fie neapărat legată, fie la un instrument de măsurat, fie în scurtcircuit, din motivele indicate la § 86.

Regula Nr. 3. La transformatorii de tensiune care sunt puşi în circuit, înfăşurarea secundară poate să rămână deschisă, adică invers ca la transformatorii de intensitate.

Transformatorul de tensiune se comportă ca un transformator de putere, la care tensiunea secundară rămâne aproape constantă, cu înfăşurarea secundară închisă sau nu pe un circuit de rezistenţă mare.

Regula Nr. 4. Transformatorul de tensiune trebue asigurat pe toate bornele de înaltă tensiune; pe partea de joasă tensiune, se vor pune siguranţe numai pe bornele care nu sunt legate la pământ.

Asigurarea pe înaltă tensiune are ca scop să protejeze instalaţia în cazul ivirii unor scurtcircuite. Este necesar deci, ca la curentul monofazat să se asigure pe cele două legături, iar la curentul trifazat pe toate cele trei faze. Punându-se pe partea de înaltă tensiune siguranţe de 2 A (care se topesc în general abia la 4 A), se asigură transformatorul numai parţial împotriva supraîncărcărilor. Totuşi, nu este recomandabil a se monta siguranţe mai slab dimensionate, care s'ar putea

topi din cauza şocurilor de curent ivite la punerea transformatorului în circuit. Se asigură toate conductele secundare, în afară de acelea puse la pământ, căci dacă siguranţele de pe aceste conducte s'ar topi, punerea la pământ ar deveni iluzorie.

Regula Nr. 5. Intr'un montaj care comportă transformatori de tensiune şi de intensitate, legarea la pământ a uneia din bornele fiecărui circuit secundar, precum şi a masei tuturor transformatorilor este obligatorie. Cea mai mică secţiune admisibilă pentru conductorii de punere la pământ este de 16 mm² (pentru cupru).

Legătura are de scop evitarea tensiunii periculoase, care ar putea să apară pe partea de joasă tensiune în mod întâmplător şi ar avea ca urmare accidente. In acelaşi timp ea are scopul şi de a evita erorile de măsurare care s'a ivi din cauza diferenţelor de potenţial existente între bobinele aparatelor de măsurat.

Regula Nr. 6. Dacă într'un montaj se întrebuinţează numai transformatori de intensitate, iar în circuitele de tensiune se utilizează rezistenţe adiţionale, nu trebue făcute legături la pământ. Montajul trebue astfel executat încât diferenţele de potenţial în interiorul montajului să fie cât mai mici.

81. **Polaritatea înfăşurărilor transformatorilor de măsură.** Legarea transformatorilor de măsură în circuit se face în modul următor:

Pentru transformatorii de intensitate, bornele primare sunt notate cu literele K şi L (sau altele) şi bornele secundare corespunzătoare cu literele k şi l. Legarea în circuit se face conform schemei din fig. 66.

Pentru transformatorii de tensiune, bornele de înaltă tensiune sunt notate cu literele U şi V (sau altele) şi bornele secundare cu u şi v. Legarea în circuit este arătată în fig. 67.

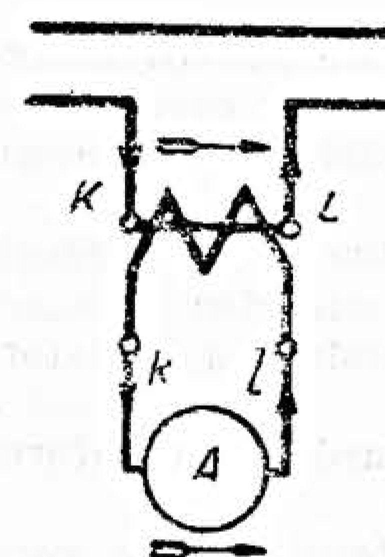


Fig. 66. — Măsurarea indirectă a intensităţii.

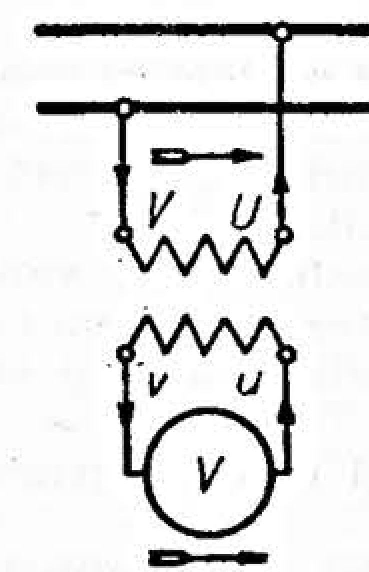


Fig. 67. — Măsurarea indirectă a tensiunii.

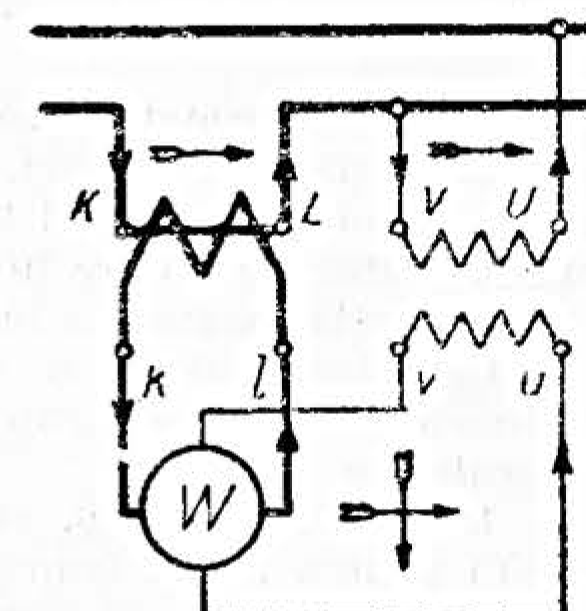


Fig. 68. — Măsurarea indirectă a puterii.

In toate cazurile, legarea se face astfel încât sensul de circulaţie a curentului să fie acelaşi ca şi când nu ar exista transformatori de măsură. In fig. 68 se arată modul de legare pentru măsurări de puteri. Dacă din cauze exterioare (aşezare, spaţiu, etc.), se schimbă sensul de circulaţie în primar, se va schimba şi în secundar, pentru a avea o măsurătoare corectă.

In general bornele care se leagă la pământ sunt:

— borna v dela transformatorii de tensiune;

— borna k dela transformatorii de intensitate.

82. **Constanta aparatelor folosite cu transformatori de măsură.** Când o măsurătoare se execută cu ajutorul transformatorilor de măsură, pentru determinarea mărimii măsurate se va ţine seama de raportul de transformare al transformatorului întrebuinţat.

Astfel, indicaţiile unui ampermetru montat în secundarul unui transformator de intensitate trebue înmulţite cu valoarea raportului de transformare pentru a se afla curentul care circulă în reţea.

In mod analog, tensiunea de măsurat se află înmulţind valoarea indicată de voltmetrul legat pe secundarul transformatorului de măsură, cu valoarea raportului de transformare al transformatorului.

Dacă măsurarea se face întrebuinţând transformatori de măsurat şi pentru tensiune şi pentru curent, pentru a se afla valoarea puterii din circuit, în cazul măsurării unei puteri

$$P = U\,I, \text{ (la } \cos\varphi = 1),$$

se va lua

$$P = I_s\,U_s\,K_i\,K_u\,,$$

în care: I_s este intensitatea indicată deampermetrul din secundarul transformatorului de intensitate;

U_s — tensiunea indicată de voltmetrul din secundarul transformatorului de tensiune;

K_i — raportul de transformare al transformatorului de intensitate;

K_u — raportul de transformare al transformatorului de tensiune.

In cazul când aparatul însuşi are o constantă proprie, adică o diviziune reprezintă un anumit număr de amperi, volţi, waţi, etc., indicaţiile lui se vor multiplica cu produsul dintre constanta aparatului şi raportul de transformare al transformatorului respectiv.

In cazul unui wattmetru cu o constantă C, utilizat cu transformatorii de măsură cu rapoartele de transformare K_i pentru transformatorul de intensitate şi K_u pentru transformatorul de tensiune, constanta generală cu care se vor înmulţi diviziunile aparatului va fi:

$$C \cdot K_i\,K_u\,.$$

83. **Transformatorii de intensitate** servesc ca aparate auxiliare pentru măsurarea curenţilor alternativi, reducând curentul de măsurat la o valoare uşor măsurabilă (5 sau 1 A). Aceşti transformatori se comportă în exploatare analog ca un transformator de putere în scurt circuit.

Inducţia magnetică în aceşti transformatori variază între 600 şi 1500 gauşi.

Caracteristicile unui transformator de intensitate sunt: curentul primar, tensiunea de serviciu, gradul de precizie (clasa) şi sarcina secundară a transformatorului în VA.

In § 77, tabela 6, sunt indicaţi curenţii nominali standardizaţi (conform GOST) pentru aceşti transformatori.

Din punct de vedere al preciziei, transformatorii de intensitate se construesc de următoarele clase (tabela 11):

Tabela 11

Curentul primar în % din valoarea nominală	Clasa 0,2		Clasa 0,5		Clasa 1		Clasa 3		Clasa 10	
	Eroare de curent	Eroare de unghi	Eroare de curent	Eroare de unghi	Eroare de curent	Eroare de unghi	Eroare de curent	Eroare de unghi	Eroare de curent	Eroare de unghi
10%	±0,5%	± 20′	± 1%	± 60′	± 2%	±120′	La 50% şi 100% din val. nominală a curentului ±3%	nelimitat	La 50% şi 100% din val. nominală a curentului ± 10%	nelimitat
20%	±0,35%	± 15′	±0,75%	± 50′	± 1,5%	±100′				
100 şi 120%	±0,2%	± 10′	±0,5%	± 40′	± 1%	± 80′				

Clasele 0,2 şi 0,5 se întrebuinţează pentru măsurători de precizie şi pentru măsurători exacte în exploatare, pentru puteri şi energii. Pentru măsurători foarte precise, se întrebuinţează transformatori speciali, la care eroarea este coborîtă la:

0,1 până la 0,2 pentru curent;

3′ până la 5′ pentru unghi.

Pentru decalaje mari, în special, se va căuta să se întrebuinţeze transformatori cu o eroare de unghi cât mai redusă (eroarea asupra puterii datorită erorii de unghi fiind proporţională cu aceasta, pentru un anumit decalaj).

Clasa 1 se întrebuinţează pentru măsurători curente de intensităţi şi puteri, pentru contori şi relee de distanţă.

Clasa 3 şi clasa 10 se întrebuinţează acolo unde se cere o precizie cu totul redusă.

84. **Transformatori de intensitate compensaţi.** Pentru reducerea erorilor în transformatorii de precizie în limitele indicate mai sus, transformatorii de intensitate trebue să funcţioneze cu inducţii în fier reduse (de 300—1 000 gauşi).

Pentru obţinerea acestui rezultat în cazul întrebuinţării de tole obişnuite de transformatori, prma soluţie este de a se da fierului o secţiune mare, ceeace îngreunează şi scumpeşte construcţia.

Deaceea, pentru transformatorii de precizie se întrebuinţează tole speciale din aliaje fero-nichel (ca de exemplu permaloy, etc.), de mare permeabilitate, al căror cost este însă ridicat.

Soluţia convenabilă este construcţia *transformatorilor compensaţi*, pentru care se utilizează tole obişnuite.

O astfel de construcţie este transformatorul compensat sovietic de tipul indicat în fig. 68 bis, caracterizat prin aceea că bobinajul primar *1* este înfăşurat numai pe una din coloanele circuitului magnetic, iar bobinajul secundar *2* şi *3* este împărţit pe ambele coloane, precum şi prin prezenţa unui şunt magnetic *4* cu două întrefieruri. In acest transformator are loc o premagnetizare a miezului de fier de către fluxurile de dispersiune, ceeace face ca miezul de fier să lucreze la o permeabilitate vecină cu aceea maximă, micşorându-se atât eroarea de raport cât şi eroarea de unghi a transformatorului.

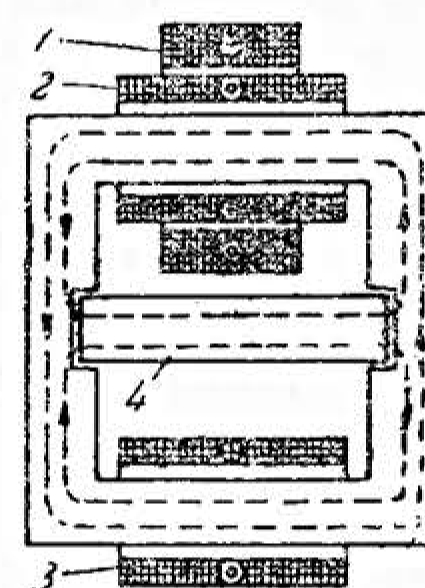


Fig. 68 bis.

85. **Puterea transformatorului de intensitate** se alege luând în considerare consumaţia aparatelor care se alimentează pe secundarul transformatorului.

In § 15, tabela 2, sunt indicate puterile absorbite de diverse aparate de măsurat, pentru curenţi de 5 A şi de care trebue să se ţină seama la alegerea puterii unui transformator de măsură.

Pentru consumaţiile releelor şi conductelor, se vor lua următoarele cifre:

Tabela 12

Aparat alimentat	Felul aparatului	Puterea absorbită la 5A şi 50 Hz în VA
Relee	Releu de întoarcere	2
	Releu de maximum cu acţionare imediată	6,5
	Releu diferenţial, pe fază	2
	Releu de direcţie, pe fază	7
	Releu de impedanţă	14
	Releu rapid de distanţă	15
Conducte	2,5 mm²/m	0,18
	4,0 mm²/m	0,11
	6,0 mm²/m	0,07

In § 78, tabela 6, sunt indicate valorile standardizate pentru rezistenţa totală a aparatelor care se pot lega la un transformator de intensitate care reduce curentul la 5 respectiv 1 A. Puterile standardizate RI^2 se vor deduce înmulţind aceste valori cu patratul curentului respectiv (5 sau 1 A).

86. **Comportarea transformatorilor de intensitate în serviciu** depinde de circuitul secundar.

In cazul circuitului secundar deschis, câmpul magnetic din circuitul primar dă naştere unor inducţii de 15—20 000 gauşi, ceeace are ca urmare o încălzire exagerată a miezului de fier, putându-se ajunge până la deteriorarea transformatorului. In afară de aceasta, la bornele secundare apar tensiuni periculoase, care pot atinge valori eficace de 100—500 V, şi 1 000 V la transformatorii inelari şi chiar de 500—2 500 V şi mai mult la transformatori construiţi pentru 1 A în circuitul secundar.

Deasemenea, din cauza magnetismului remanent al fierului, constantele transformatorului de intensitate se modifică. Această modificare este diferită la diverse tipuri de transformatori. La transformatorii cu fier puţin şi multe amperspire, apare numai o diferenţă de eroare de câteva zecimi de procent şi câteva minute; la transformatorii cu fier mult şi puţine amperspire, eroarea de curent creşte cu 0,5% şi eroarea de unghi până la 10—20 minute. Pentru măsurători exacte, se recomandă să se demagnetizeze miezul de fier înainte de executarea măsurătorilor în cazul când din eroare, transformatorul a funcţionat cu secundarul deschis.

87. **Protecţia împotriva undelor de supratensiune** se face la transformatorii de intensitate prin montarea de rezistenţe între bornele transformatorului, care să ofere o trecere uşoară undelor de tensiune, bobinajul fiind astfel protejat. Rezistenţele sunt confecţionate din silită a cărei rezistenţă în stare normală este mare, dar scade cu creşterea tensiunii până la 1/5 sau 1/10 din valoarea iniţială şi oferă astfel o trecere uşoară undelor de tensiune.

Valoarea rezistenţelor de protecţie este în funcţie de intensitatea nominală a transformatorilor:

pentru curenţi nominali I_n până la 15A, rezistenţa are circa 500 Ω;
» » » I_n » » 50A, » » » 50 Ω;
» » » I_n de 100—300A, » » » 5 Ω;
» » » I_n până la 600A, » » » 1 Ω;

88. **Coeficientul de saturaţie** al unui transformator de intensitate, notat cu n, este multiplul curentului nominal primar, la care eroarea de curent atinge 10%, transformatorul fiind încărcat pe secundar cu sarcina nominală şi un factor de putere 0,8.

La transformatorii normali, rareori $n < 10$.

La transformatorii speciali, cu sâmburele din feronichel, n rămâne în general mult sub valoarea de mai sus. Mărimea coeficientului de saturaţie este foarte importantă, în special la transformatorii de intensitate care sunt întrebuinţaţi pentru protecţia diferenţială a transformatorilor sau a generatorilor.

In acest caz, transformatorii de măsură trebue să aibă acelaşi coeficient de saturaţie, căci altfel, la supraîncărcare, echilibrul montajului este stricat şi se produc declanşări fără existenţa unui defect real în instalaţie.

Protecţia transformatorilor de măsură se face în multe cazuri prin intercalarea unui aparat de scurtcircuitare, care acţionează la supraintensităţi. Acesta lucrează foarte rapid şi poate produce scurtcircuitarea, la un curent dublu decât cel nominal într'un timp de două perioade, iar la un curent de 20 ori mai mare într'un timp de 0,75 perioadă.

89. **Curentul limită dinamic** al unui transformator de intensitate, este amplitudinea maximă a curentului de scurt circuit pe care o poate suporta transformatorul din punct de vedere al solicitării dinamice şi al sudării contactelor.

Valoarea lui este impusă de prescripţii pentru diversele tipuri de transformatori. In legătură cu acesta, se defineşte *coeficientul dinamic*, care este raportul dintre amplitudinea maximă a curentului limită dinamic al transformatorului şi amplitudinea curentului nominal.

90. **Curentul limită termic de 10 secunde** este curentul de scurt circuit de amplitudine constantă pe care îl poate suporta transformatorul timp de 10 secunde fără depăşirea temperaturii limite admisibile.

In prescripţii se prevede o temperatură limită de 200°C, valoarea curentului limită termic de 10 s fiind deasemenea impusă de prescripţii.

Curentul limită termic pentru un timp t este dat de relaţia

$$I_t = I_{10\,s}\left(\frac{10}{t}\right)^{0,5}$$

în care $I_{10\,s}$ este curentul limită termic garantat pentru 10 secunde.

Coeficientul termic de 10 *secunde* este raportul dintre curentul limită termic de 10 s şi curentul nominal al transformatorului.

91. **Clasificarea transformatorilor de intensitate** după forma miezului de fier. Se deosebesc;

— *Miezul cu coloane* — cu sau fără îmbinare. Cel fără îmbinare are avantajul unei reluctanţe mai mici. Desavantajul este însă că el trebue bobinat fie cu

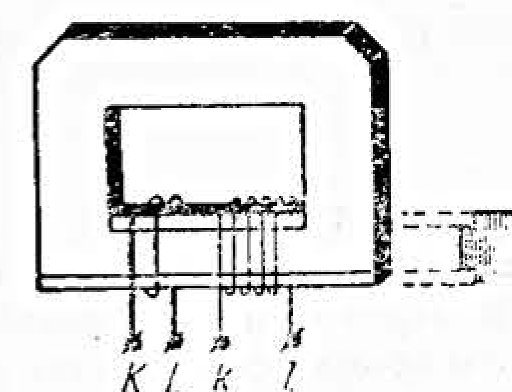


Fig. 69. — Miez de fier cu coloane.

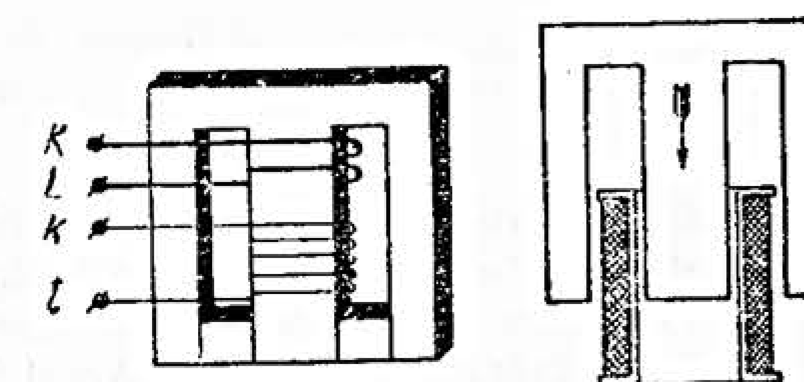


Fig. 70. — Miez de fier în manta.

mâna, fie cu maşini speciale. Pentru a avea o dispersiune de flux cât mai redusă, se recomandă ca bobinajul primar şi secundar să fie executat pe aceeaşi coloană, suprapuse unul peste altul. Bobinajul secundar este montat pe miezul de fier, iar pe deasupra este executat bobinajul primar (fig. 69).

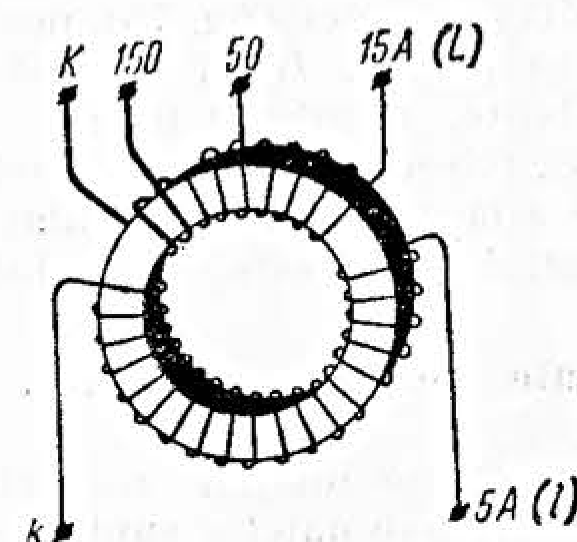


Fig. 71. — Miez în formă de inel.

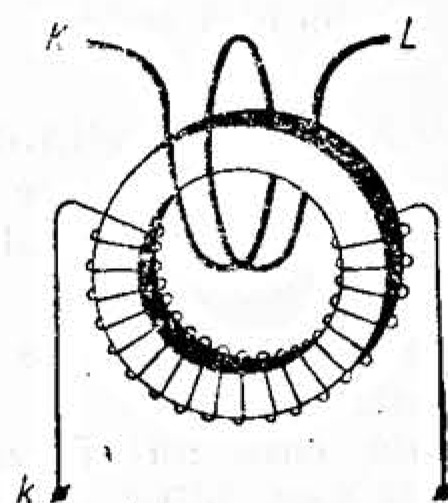


Fig. 72. — Transformator inelar.

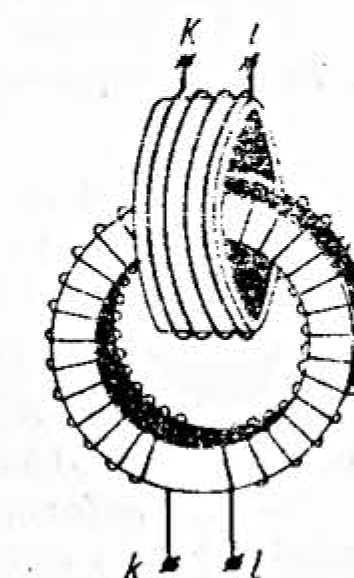


Fig. 73. — Transformator cu inele încrucişate.

— *Miezul în manta* este caracterizat prin faptul că înconjoară bobinajul (primar şi secundar).

Miezul în manta se face aproape exclusiv cu îmbinare, ceeace permite o bobinare uşoară a transformatorului şi o reducere de preţ (fig. 70).

— *Miezul în formă de inel*, care este forma ideală, fără îmbinări şi care, executat din feronichel, are o reluctanţă foarte redusă. Bobinajul trebue executat de mână. Bobinajul secundar se află repartizat pe toată lungimea inelului, iar bobinajul primar se montează deasupra (fig. 71).

Transformatorul cu înfăşurarea primară constituită dintr'un conductor care trece odată sau de mai multe ori prin inelul de fier este un tip uşor de construit (fig. 72).

Transformatorul cu inele încrucişate se construeşte pentru tensiuni înalte, cu bobina primară pe un inel separat, care poate fi suficient izolat pentru tensiuni cât de ridicate (fig. 73).

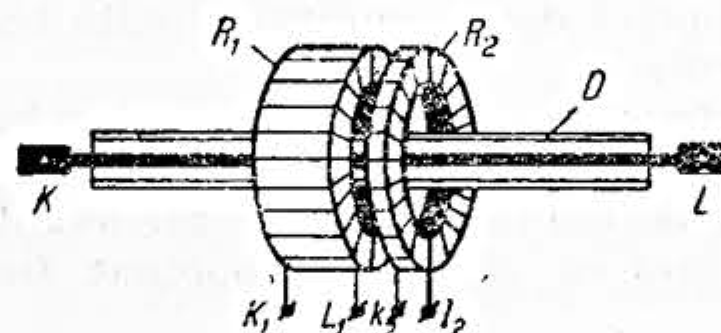


Fig. 74. — Transformator cu bară cu două sensibilităţi în secundar.

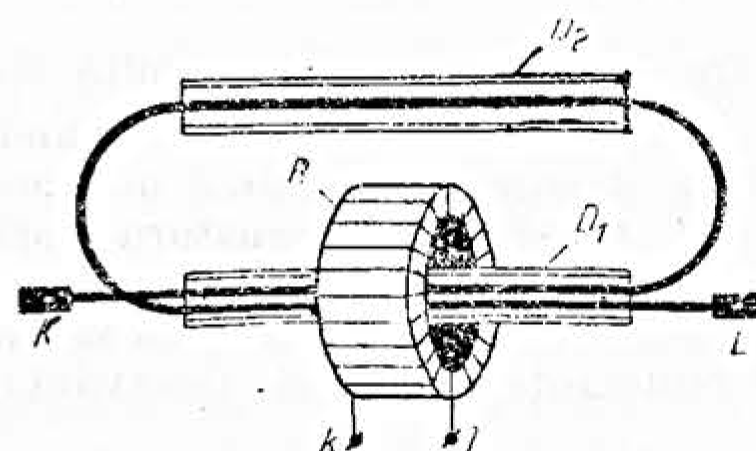


Fig. 75. — Transformator cu buclă.

Transformatorul cu primarul în formă de bară este foarte rezistent la scurt circuite. Izolaţia este realizată cu un izolator de trecere din repelit sau porţelan D, deasupra căreia se află bobinajele secundare R_1 şi R_2. Lungimea izolatorului este în funcţie de mărimea tensiunii. Acest fel de transformator se construeşte pentru intensităţi mari (fig. 74).

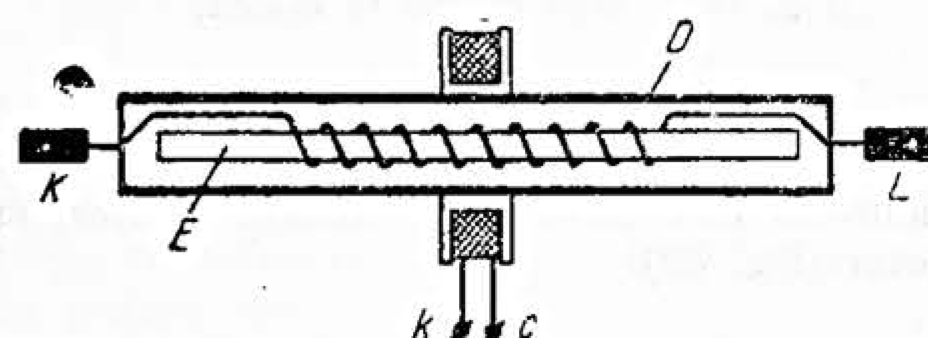


Fig. 76. — Transformator cu miez din bară de fier.

Transformatorul cu primarul în formă de buclă are miezul tot în formă de inel. Bucla care constitue înfăşurarea primară trece de mai multe ori prin inel, mărindu-se astfel numărul de amperspire; acest transformator se poate construi şi pentru intensităţi mai mici (fig. 75), pentru o anumită putere. D_1 şi D_2 sunt tuburi izolante, R miezul inelar.

— *Miezul în formă de bară* constituită din tole, E, (circuit magnetic deschis) are bobinat pe el circuitul primar KL. Peste acesta se află un izolator tubular D. Bobina secundară kl este aşezată la mijlocul barei, astfel încât este puţin influenţată de câmpul de dispersiune (fig. 76).

92. **Construcţia transformatorilor de intensitate pentru exploatare.** Se deosebesc următoarele tipuri:

— *Transformatorii oală*, care au miezul de fier cu bobinajele respective montate într'o oală (vas) de fier, plină cu ulei. Capetele bobinajelor sunt scoase afară prin izolatori de trecere. Până la 10 kV sunt construiţi ca transformatori cu manta; cei dela 20 kV la 60 kV sunt construiţi cu inele încrucişate.

— *Transformatorii cu izolaţie de porţelan, cu gaură transversală* (fig. 77) au bobinajul primar înfăşurat peste partea de porţelan, fiind astfel despărţit de partea secundară şi de miezul de fier.

Rezistenţa de izolaţie a transformatorului este aceeia a corpului de porţelan. Rezistenţa la scurtcircuit se realizează prin faptul că bobinajul primar este asigurat împotriva smulgerii, printr'o fixare specială la bornele de legătură. Impotriva undelor de supratensiune, transformatorul este protejat printr'o rezistenţă de silită, care este montată între cele două borne ale înfăşurării primare.

— *Transformatorii de intensitate în formă de izolator suport* au bobinajul cufundat în baia de ulei formată chiar de izolator. Înălţimea unui transformator de intensitate în formă de izolator este numai jumătate din aceea a unui transformator oală. Miezul de fier este în formă de manta pentru tensiuni mijlocii şi cu inele încrucişate, pentru tensiuni înalte.

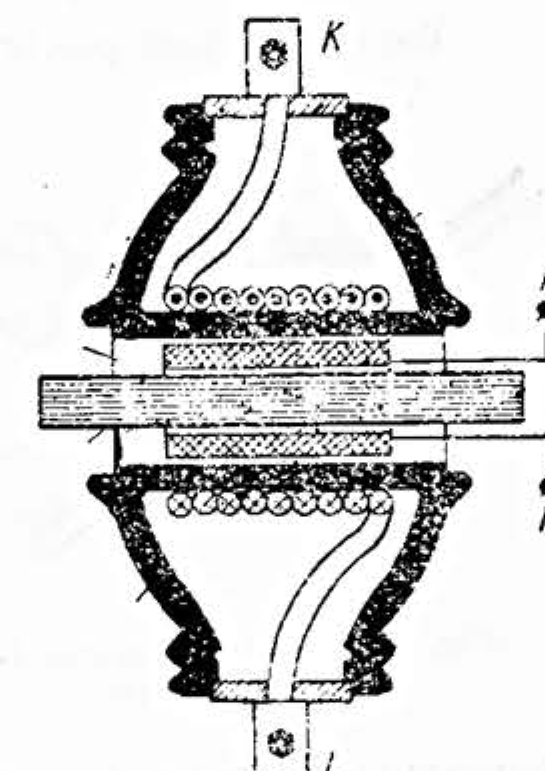


Fig. 77. — Transformator cu izolaţie de porţelan cu gaură transversală, în secţiune.

Se întrebuinţează în special pentru tensiuni de 110 kV, de obicei pentru staţiuni în aer liber (fig. 78).

— *Transformatorii în formă de izolator de trecere* au primarul constituit dintr'o bară, montată în lungul conductorului principal. Bara, de cupru, se găseşte într'un tub de porţelan sau repelit. La mijlocul tubului izolant se află unul sau două miezuri inelare de fier, cu bobinajele secundare respective (fig. 79).

Transformatorul are o lungime destul de mare, circa 2 m. Construcţia aceasta este din punctul de vedere dinamic cea mai rezistentă. Cu cât curentul primar este mai mic, cu atât mai lung trebue să fie miezul de fier pentru a se obţine o anumită sarcină secundară a transformatorului. Deasemenea şi gradul de precizie al transformatorului este proporţional cu lungimea miezului.

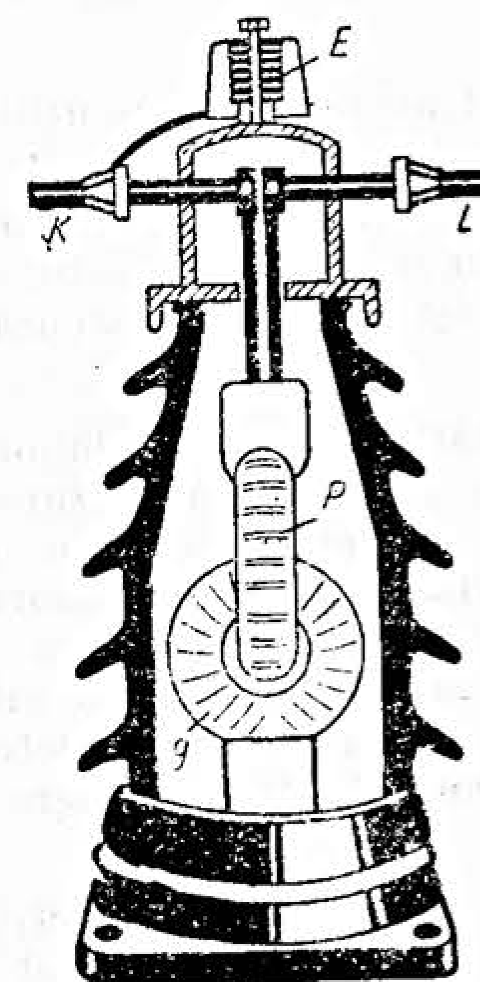
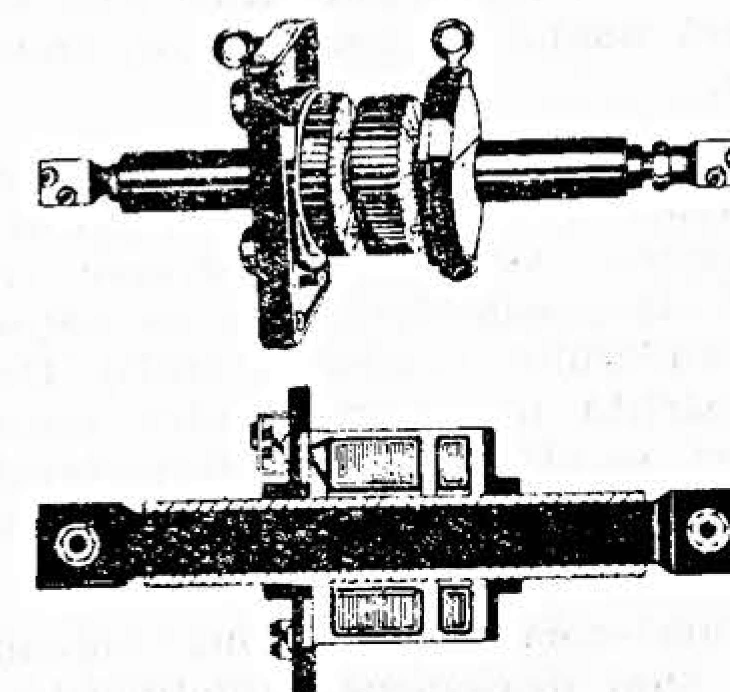


Fig. 78. — Transformator în formă de izolator suport.


Fig. 79. — Transformator în formă de izolator de trecere.

Pentru intensităţi reduse de curent, se pot întrebuinţa şi aliaje speciale pentru miezul de fier (tole de feronichel), care ridică gradul de precizie al transformatorului.

— *Transformatorii de intensitate cu bobină în formă de buclă* dau posibilitatea să se măsoare intensităţi reduse de curent, ceeace nu se poate realiza prin transformatorii în formă de bară. Acest lucru se realizează prin trecerea de mai multe ori a primarului sub formă de buclă, prin inelul de fier. Cu toate că rezistenţa dinamică la scurtcircuite este mai mică la acest transformator decât la transformatorul cu bară, totuşi este destul de ridicată.

Se construesc pentru intensităţi mici de curent, 10 A până la 600 A.

— *Transformatorii de intensitate cu miezul de fier în formă de bară.* Miezul este cu circuit magnetic deschis. Bobina secundară se află pe mijlocul miezului. In exterior transformatorul are aspectul unui transformator cu bară de cupru.

Se pot măsura curenţi reduşi (dela 5 la 70 A).

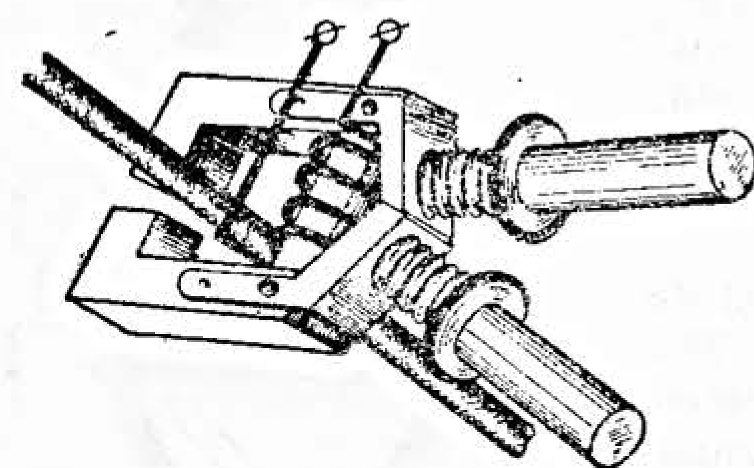


Fig. 80. — Transformator în formă de cleşte.

— *Transformatorul în formă de cleşte* este un transformator de intensitate cu care se poate măsura curentul, fără a se întrerupe circuitul. Acest transformator se fabrică pentru diverse scări de măsurare. Este portativ şi serveşte mult în exploatările de reţele (fig. 80). Primarul este constituit din însuşi conductorul prin care trece curentul de măsurat.

93. Intrebuinţarea transformatorilor de intensitate în exploatare. Pentru intensităţi mici, în special la abonaţii importanţi, se utilizează transformatori în formă de oală, cu ulei sau masă izolantă. Până la 3 kV, se întrebuinţează uneori transformatori uscaţi.

Pentru instalaţii mijlocii, de uzine sau staţii de transformare, unde este nevoie de o rezistenţă mare la scurtcircuite, se întrebuinţează transformatorii cu izolaţie de porţelan cu gaură transversală.

Pentru instalaţii în aer liber, pentru staţii de transformare, se utilizează în special transformatori de intensitate sub formă de izolatori cu ulei.

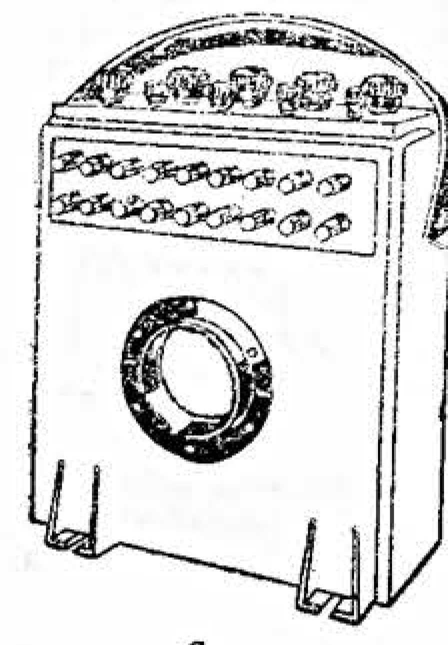
In uzinele mari, unde se cere o siguranţă de exploatare mare, se întrebuinţează cel mai mult transformatorii cu bară sau cu buclă. Cu izolaţie de repelit, se întrebuinţează numai pentru interior, izolaţia de acest fel nefiind rezistentă pentru exterior.

94. Transformatorii de intensitate cu sensibilităţi multiple. In laboratoarele de încercări se folosesc transformatori de intensitate cu mai multe rapoarte de transformare. Astfel se construesc transformatori de intensitate cu o gamă întreagă de sensibilităţi, care se obţin printr'o divizare atât a primarului cât şi a secundarului transformatorului. De exemplu în fig. 81 *a*, înfăşurarea primară este împărţită în 9 părţi pentru sensibilităţi până la 200 A. Pentru intensităţi mai mari, se utilizează transformatorul ca transformator inelar, conductorul primar trecând prin gaura transformatorului odată (raport de transformare 1 000/5 respectiv 1 A), sau de mai multe ori.

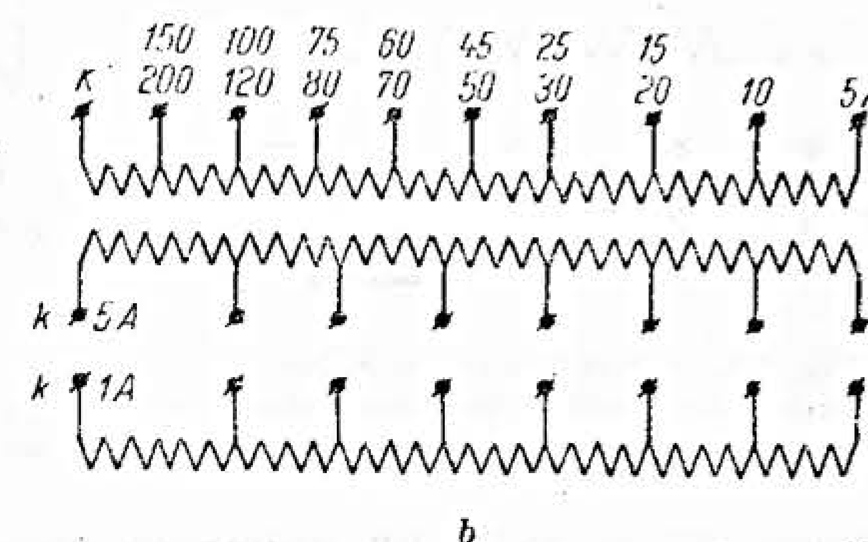
Transformatorul are două bobinaje secundare pentru 5 respectiv 1 A. Acestea sunt deasemenea subdivizate, transformatorul având în total 2 × 24 sensibilităţi dela 5/5 respectiv 1 A până la 1 200/5 respectiv 1 A.

In fig. 82 este reprezentat transformatorul universal de intensitate de construcţie sovietică, tip UTT-1, pentru măsurări de curenţi dela 100—2 000 A şi un curent secundar de 5 A, izolat pentru 500 V şi având 30 de domenii de măsurare.

Pentru transformatorii ficşi, montaţi în instalaţii, se întâmplă de multe ori să fie nevoie ca aceştia să poată face faţă măririlor ulterioare ale instalaţiilor din uzine şi din această cauză sunt dela început înzestraţi cu posibilităţi de a măsura intensităţi mai mari. Schimbarea se face pe partea primară, care este împărţită în două părţi egale. Acestea se leagă pentru măsurarea curenţilor mici în serie, iar pentru curenţii mari în paralel, obţinându-se astfel un raport de



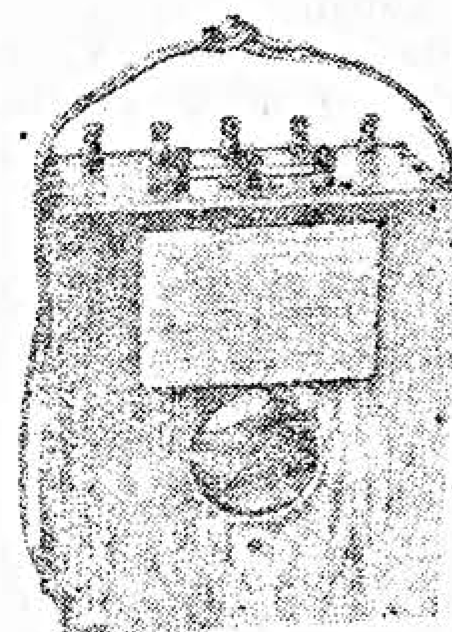
a



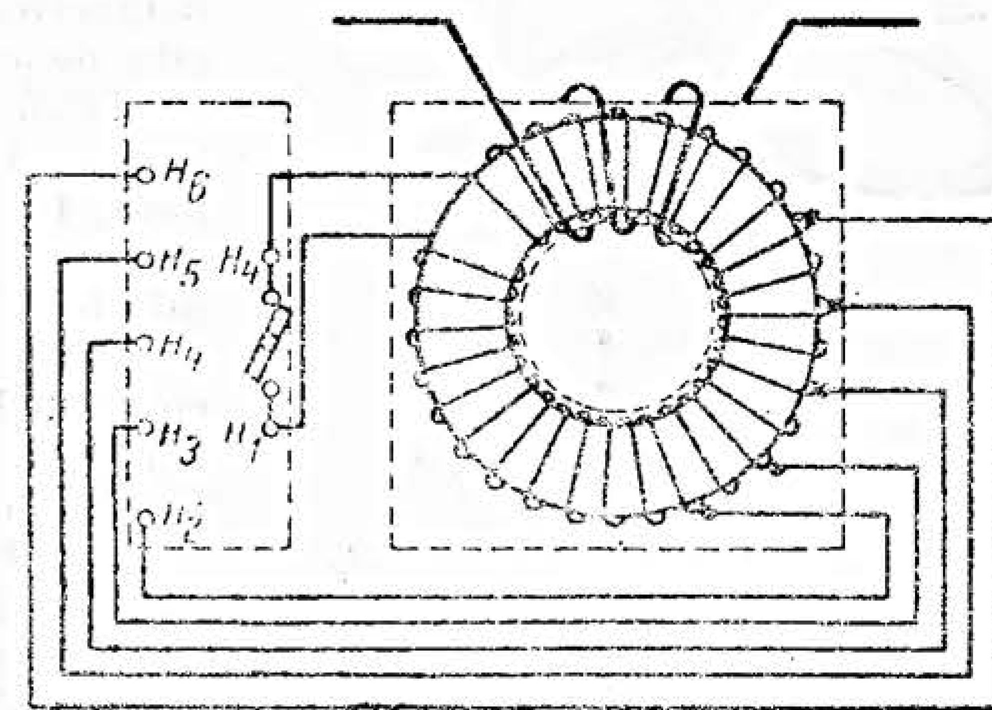
b

Fig. 81. — Transformator de intensitate etalon cu sensibilităţi multiple
a — vedere; *b* — schema electrică.

comutare de 1 : 2. In fig. 83 se vede modul de legătură pentru un transformator de tip oală. Cele patru capete ale înfăşurării primare P_1 P_2 sunt trecute prin izolator şi apoi îndoite în afară. Cu ajutorul piesei de legătură se poate face montajul bobinelor primare fie în serie, fie în paralel.



a



b

Fig. 82. — Transformator de intensitate universal UTT-1 cu 30 domenii de măsurare
a — vedere; *b* — schema electrică.

La un transformator cu gaură transversală, legăturile pentru schimbarea sensibilităţii sunt indicate în fig. 84. Cele patru capete ale înfăşurării primare sunt legate la patru piese de contact în formă de sector şi pot fi cuplate în serie sau paralel cu ajutorul unor şuruburi. Pentru a compensa nesimetria existentă din cauze constructive în acest tip de transformator, bobinajul secundar are o derivaţie suplimentară. La curenţi mici, se folosesc bornele secundare k şi l_1, la curenţi mari k şi l_2.

Este necesar ca şi transformatorii pentru control şi revizii să aibă mai multe sensibilităţi de măsurare. In acest scop, se întrebuinţează transformatorii inelari, de tip analog cu transformatorii descrişi mai sus.

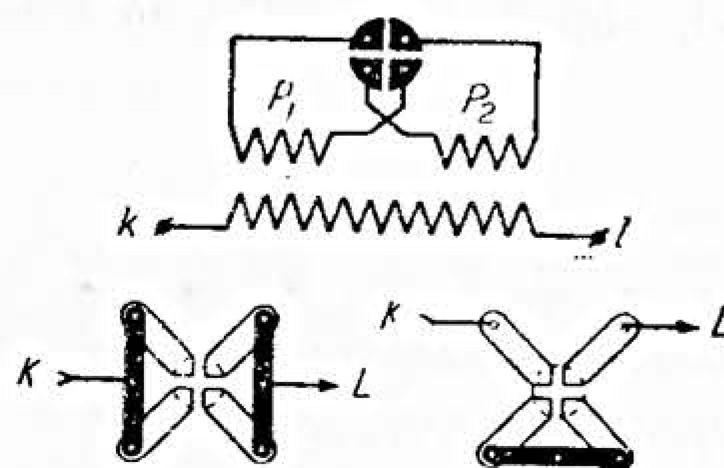


Fig. 83. — Schimbarea scărilor de măsurare pentru transformatori de intensitate tip oală.

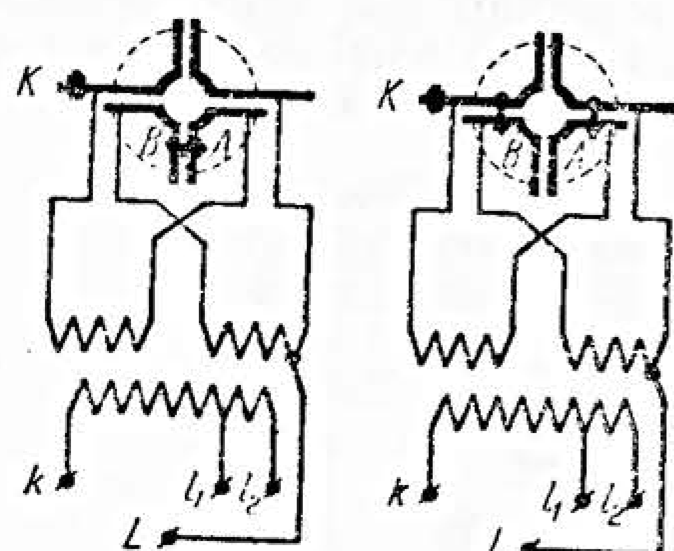


Fig. 84. — Schimbarea scărilor de măsurare pentru transformatori de intensitate cu gaură transversală.

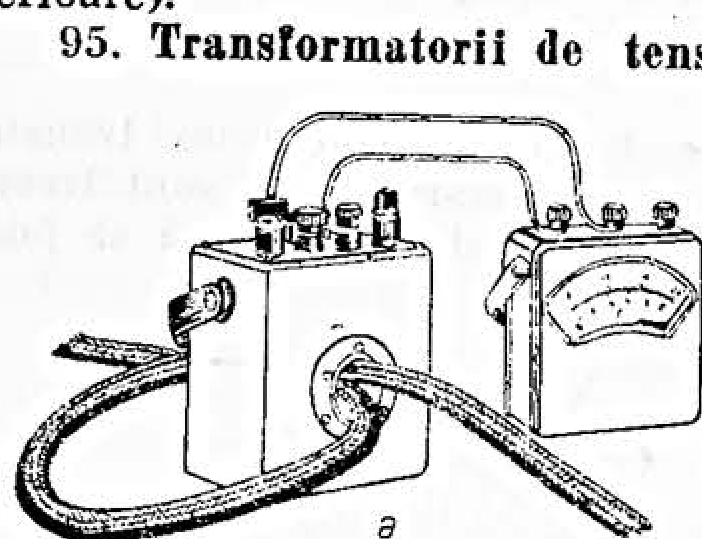
In figura 85 se vede un asemenea transformator (construcţie şi legături interioare).

95. **Transformatorii de tensiune** servesc ca aparate auxiliare pentru măsurarea tensiunilor înalte. Aceşti transformatori se comportă în exploatare în mod analog cu transformatorii de putere în gol. In secundar, tensiunea normalizată este de 100 V (în trecut de 110). Inducţia magnetică în transformatorii de tensiune este de circa 10 000 gauşi.

Tensiunea secundară de 100 V, respectiv 110 V, rămâne practic neschimbată, fie că bobinajul secundar este deschis, fie că este legat la un aparat de măsurat.

Transformatorii de tensiune sunt astfel construiţi, încât pot fi legaţi în permanenţă la o tensiune de 1,2 ori tensiunea nominală.

96. **Erori admisibile.** Ca şi transformatorii de intensitate, transformatorii de tensiune sunt împărţiţi din punct de vedere al gradului de precizie, în următoarele clase (Tabela 13);



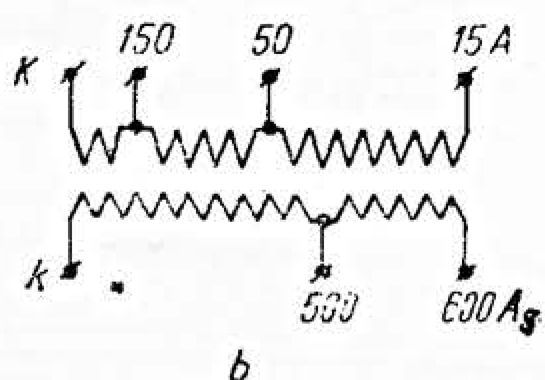


Fig. 85. — Transformator inelar portativ pentru 15 — 600/5A
a — vedere; *b* — schema electrică.

Tabela 13

Clasa	Domeniul de măsurare a tensiunii în % din tensiunea nominală	Eroare de tensiune	Eroare de unghi
0,2	80 . . . 120%	± 0,2%	± 10′
0,5	80 . . . 120%	± 0,5%	± 20′
1	80 . . . 120%	± 1,0%	± 40′
3	100%	± 3,0%	nelimitat

Erorile de mai sus se înţeleg pentru un factor de putere secundar = 0,8.

Transformatorii de clasa de precizie 0,2 şi 0,5 servesc la măsurări în laborator şi măsurări exacte în exploatare.

Transformatorii de clasa de precizie 1 servesc pentru măsurări curente în exploatare (tensiuni, puteri, energii).

Transformatorii de clasa de precizie 3 servesc pentru relee.

97. **Puterea transformatorului de tensiune.** Pentru determinarea puterii transformatorului de tensiune se vor considera consumaţiile proprii ale aparatelor alimentate pe secundarul transformatorului.

Pentru aparatele de măsurat, se iau valorile din tabela 2, § 15 iar pentru relee, cele din Tabela 14:

Tabela 14

Aparatul alimentat	Felul aparatului	Consumaţia la 100 V/50 Hz în VA
Relee	cu acţiune imediată	7 (12)
	de direcţie	38
	de impedanţă	10
	rapid de distanţă	60

98. **Construcţia transformatorilor de tensiune pentru exploatare.** Se deosebesc următoarele tipuri:

— *Transformatori oală cu izolaţie în ulei,* cu izolatori aşezaţi oblic pentru tipurile noi, pentru a se realiza distanţa necesară pentru tensiuni ridicate. Sunt construiţi ca transformatori în manta. Pentru a se feri transformatorul de supratensiuni, spirele de intrare sunt întărite în mod special. Aceşti transformatori se fabrică pentru tensiuni până la 35 kV.

— *Transformatori uscaţi cu o ieşire monopolară.* Pentru reţele de curent alternativ cu neutrul pus la pământ, se întrebuinţează transformatori cu o singură ieşire a bobinajului. La aceştia, numai un singur capăt al bobinajului primar este scos printr'un izolator, pe când celălalt, care în timpul exploatării este pus la pământ, este legat la o bornă cu izolaţie redusă.

— *Transformatorii de tensiune în formă de izolatori suport* sunt în special construiţi pentru staţiuni în aer liber; se pot întrebuinţa totuşi şi în instalaţii interioare pentru tensiuni foarte înalte, înlocuind transformatorii în cascadă. Forma lor se apropie de aceea a transformatorilor de intensitate, cu deosebirea că izolatorul (plin cu ulei), ca să poată cuprinde miezul de fier cu coloane al transformatorului, trebue să fie mai înalt decât acela al transformatorului de intensitate întrebuinţat pentru aceeaşi tensiune de serviciu. Intrucât prin capul transformatorului se poate scoate numai o legătură, transformatorul se întrebuinţează numai la măsurarea tensiunii faţă de pământ. Se construesc până la tensiuni de 200 kV.

— *Transformatorii de tensiune cu cinci coloane* se întrebuinţează în reţele de curent alternativ, cu punctul neutru pus la pământ (în loc să se folosească trei transformatori ca cei dela punctul precedent). Bobinajul este executat numai

pe trei coloane. Se construesc ca transformatori umpluţi cu ulei, pentru tensiuni dela 3 la 35 kV.

— *Transformatorii portativi* pentru control şi revizie se execută totdeauna cu mai multe raporturi de transformare. Se construesc ca transformatori cu trei coloane, două coloane purtând înfăşurările; ei sunt izolaţi cu ulei.

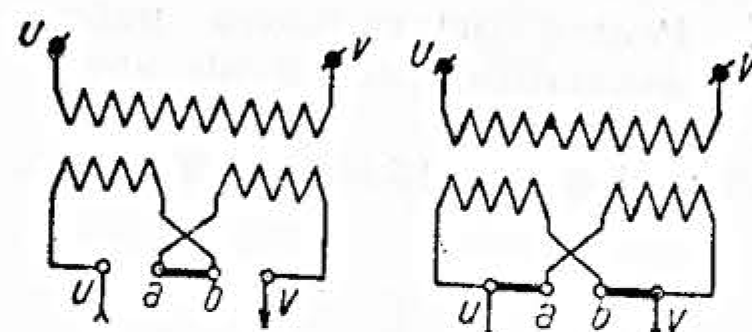


Fig. 86. — Schimbarea scărilor de măsurare pe partea secundară, la un transformator de tensiune.

99. **Transformatori de tensiune cu sensibilităţi multiple.** Transformatorii cu mai multe rapoarte de transformare sunt utilizaţi în laborator sau pentru lucrări de control şi revizie.

Pentru transformatorii ficşi, raportul de transformare se poate varia dela 1 la 2, schimbarea făcându-se pe partea secundară. Bobinajul secundar este împărţit în două părţi egale, dând fiecare pe secundar 100 V. La tensiuni mici, acestea se leagă în serie, la tensiuni mari în paralel. Din cauza pierderilor mai mari în cazul legării în serie a bobinelor secundare, sarcina nominală a transformatorului este, la tensiuni mici, aproximativ jumătate sau o treime din sarcina nominală la tensiunea mare. Schema de legături este redată în figura 86.

Pentru transformatorii portativi raportul de transformare poate avea mai multe valori.

Schimbarea se face prin modificarea legăturilor înfăşurărilor primare şi secundare, acestea având uneori şi un bobinaj suplimentar. Tensiunea secundară este totdeauna 100 V.

Schema legăturilor este redată în fig. 87.

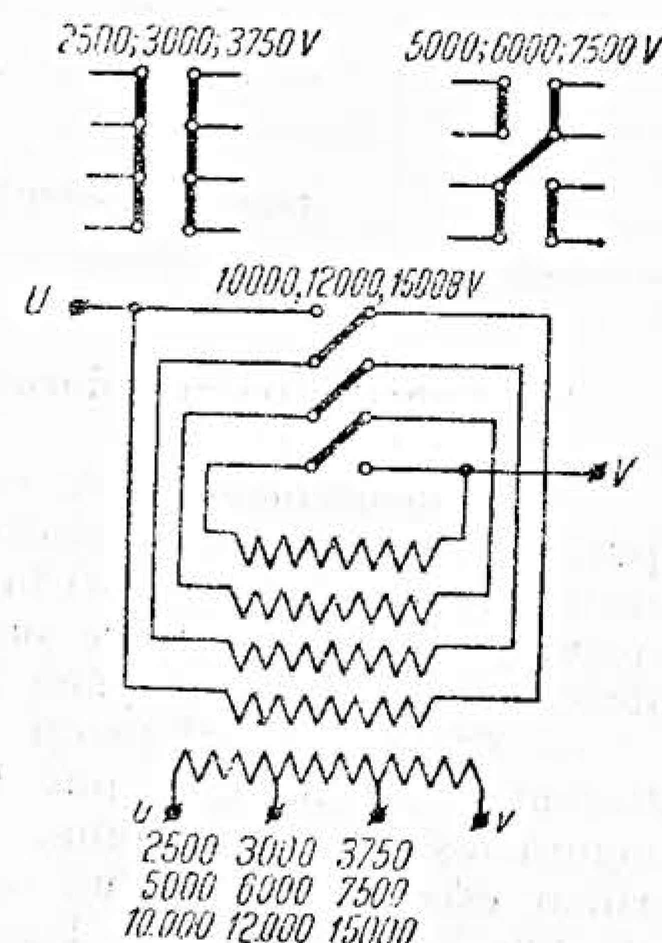


Fig. 87. — Schimbarea scărilor de măsurare pe primarul şi secundarul unui transformator de tensiune.

100. **Izolaţia transformatorilor** se realizează în mai multe feluri:

— cu masă izolantă (pe bază de răşini);

— cu ulei;

— cu porţelan, preşpan sau repelit (uscată).

Izolaţia cu masă are avantajul că nu cere un vas deosebit de bine închis pentru transformatorul de măsurat şi că nu necesită nicio îngrijire. Izolaţia cu masă oferă o rigiditate dielectrică cu 50% până la 100% mai mare decât uleiul, atât timp cât transformatorul nu este încălzit exagerat. La temperaturi mai ridicate, povocate de supraîncărcări importante ale transformatorului, rigiditatea dielectrică a masei scade sub aceea a uleiului. Deasemenea, masa nu este bună conducătoare de căldură—ca uleiul—ceeace, la ivirea unui defect în transformator, poate duce la o explozie; totuşi masa nu se aprinde ca uleiul de transformator.

Izolaţia cu ulei prezintă avantajul unei transmisii uşoare a căldurii, din care cauză un transformator izolat cu ulei poate fi supraîncărcat cu 20—30% mai mult decât un transformator izolat cu masă.

Ca desavantaj, transformatorul cu ulei cere o permanentă supraveghere şi uleiul trebue înlocuit la un interval de câţiva ani. La explozie uleiul se aprinde.

Izolaţia uscată, de porţelan, presşpan sau repelit, oferă avantajul că nu poate da naştere la explozii. Din cauza costului ridicat, izolaţia de repelit se întrebuinţează numai în anumite cazuri.

După tensiunile de serviciu, întrebuinţarea diferitelor feluri de izolaţie este următoarea:

până la 35 kV — porţelan sau ulei;

peste 50 kV—presşpan, repelit, în special pentru transformatorii în formă de bară.

F. Metode de măsurare [1])

a) Măsurarea tensiunii

101. **Unitatea şi etalonul de forţă electromotoare.** *Unitatea de forţă electromotoare* (f.e.m.) în sistemul practic MKSA este voltul absolut.

Etalonul de f.e.m. a fost realizat în marile laboratoare de metrologie prin măsurarea ohmului şi amperului în unităţi absolute şi este reprezentat de media f.e.m. a unui grup de elemente normale cu soluţie saturată de sulfat de cadmiu, a căror f.e.m. este de 1,01855 — 1,01875 V abs. la 20°C.

Variaţia acestei f.e.m. cu temperatura este dată de relaţia:

$$E = E_{20} - 0{,}0000406\,(t-20) - 0{,}00000095\,(t-20)^2 + 0{,}00000001\,(t-20^\circ)^3 \text{ V abs.}$$

în care E este f.e.m. la o temperatură oarecare t, iar E_{20} la 20°C.

Există şi elemente normale nesaturate, mai puţin constante în timp ca cele saturate, dar cu un coeficient de temperatură practic nul. Ele se întrebuinţează adeseori în practică fiind robuste şi au o f.e.m. cuprinsă între 1,0187 şi 1,0196 V abs. [2])

102. **Metodele de opoziţie (de compensaţie)** pentru măsurarea cu mare precizie a f.e.m. şi diferenţelor de potenţial în curent continuu, constau din compararea f.e.m. de măsurat cu căderea de tensiune dintr'o rezistenţă de precizie cunoscută, creiată de un curent auxiliar care circulă prin această rezistenţă.

— *Metoda de opoziţie simplă.*

Se realizează montajul din fig. 88 în care

e_0 — elementul normal;

e_x — f.e.m. de măsurat;

G — galvanometru de curent continuu;

R — rezistenţa AB cu variaţie liniară;

r — rezistenţa BC;

C — cursor.

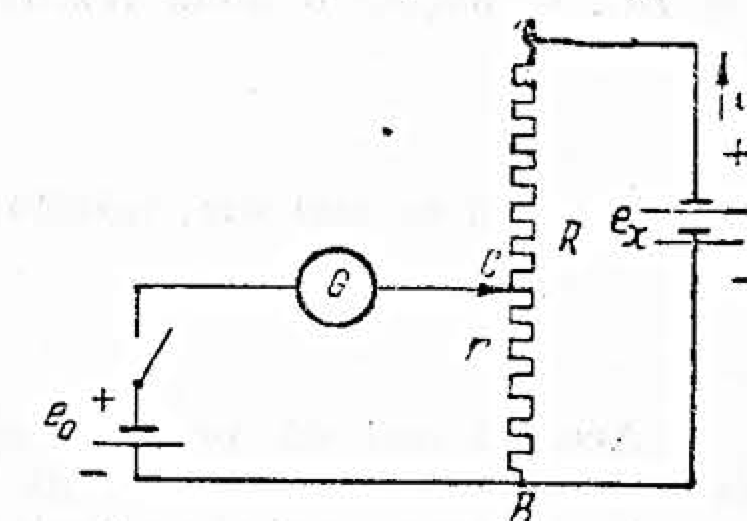


Fig. 88. — Metoda de opoziţie simplă.

Principiul măsurătorii este următorul:

Elementul normal e_0 fiind în opoziţie cu f.e.m, de măsurat, se trece prin rezistenţa AB un curent i de ordinul $\frac{1}{1\,000} \sim \frac{1}{10\,000}$ A, şi se variază poziţia cursorului C până la obţinerea echilibrului galvanometrului, corespunzând unei rezistenţe $BC = r$.

1) O propunere de menţionat păivind clasificare a metodelor de măsurare a fost făcută de C. V. Carandeev (*Electricestvo*, Nr. 7, 1949).

2) In cele ce urmează, V abs. se va însemna V.

Se obţine relaţia:

$$e_0 = r_i = r\frac{e_x}{R},$$

deci

$$e_x = e_0\frac{R}{r}.$$

Inconvenientul acestei metode este că ea nu permite măsurarea f.e.m. în gol, ci diferenţa de potenţial la bornele sursei e_x, întrucât aceasta debitează curentul i. In plus, nu se pot măsura cu această metodă diferenţe de potenţial mai mici decât f.e.m. a elementului normal e_0.

— *Metoda de opoziţie prin substituţie.* Se realizează montajul din fig. 89 în care

e_0 — elementul normal;
e_x — f.e.m. de măsurat;
E — f.e.m. auxiliară;
G — galvanometru de curent continuu;
R — rezistenţa AB;
r — rezistenţa BC;
C — cursor;
S — rezistenţă variabilă

Fig. 89. — Metoda de opoziţie prin substituţie.

Principiul măsurătorii este următorul: Se pune în circuitul galvanometrului elementul normal şi se variază rezistenţa BC până la valoarea r_1 care dă echilibrul galvanometrului.

Se obţine relaţia:

$$r_1 i = e_0,$$

i fiind curentul în rezistenţa AB ca şi mai sus.

Se substitue elementul normal e_0 f.e.m. de măsurat e_x şi variind rezistenţa $r = BC$, se obţine o nouă rezistenţă r_2, care dă echilibrul galvanometrului. In acest caz:

$$r_2 i = e_x,$$

i fiind acelaşi ca mai sus; rezultă:

$$e_x = \frac{r_2}{r_1}e_0.$$

Această metodă permite măsurarea de f.e.m. e_x fără consum de curent, ceeace constitue calitatea esenţială a metodelor de opoziţie.

Deasemenea metoda permite şi măsurarea de f.e.m. mai mici decât e_0.

In practică se aduc acestui mod principial de lucru modificări care simplifică măsurătoarea.

O astfel de simplificare constă în aceia că în loc să se treacă prin rezistenţa AB un curent i de valoare oarecare, se trece un curent i de valoare cunoscută, de exemplu 1/1 000 A sau 1/10 000 A, (stabilit printr'o operaţie preliminară denumită « tarare »), în care caz valoarea f.e.m. măsurate este

$$e_x = \frac{r_2}{1\,000} \quad \text{respectiv} \quad e_x = \frac{r_2}{10\,000},$$

ceeace evită calculele.

Pentru tarare la 1/1 000 A de exemplu, se ia $r_1 = 1\,000\,e_0$ (e_0 în volţi), se pune în circuitul galvanometrului elementul normal şi se reglează rezistenţa S până la obţinerea echilibrului.

Observaţie importantă. Prin elementul normal nu trebue în nici un caz să treacă — chiar pentru scurt timp — curenţi mai mari decât câţiva microamperi.

103. **Potenţiometrele (sau compensatorii) de curent continuu** sunt aparate care realizează practic schemele de mai sus.

Fig. 90. — Schema electrică a unui potenţiometru industrial.

In fig. 90 este redată schema electrică a unui potenţiometru industrial, construit pentru a fi tarat la $i = \frac{1}{10\,000}$, elementul normal întrebuinţat fiind un element Weston de 1,0186 V abs. la 20°C.

104. **Potenţiometrele de curent alternativ.**

Pentru măsurarea f.e.m. prin metoda de opoziţie în curent alternativ, se întrebuinţează *potenţiometre de curent alternativ* care permit determinarea atât a valorii eficace a e.f.m. alternative de măsurat, cât şi faza acestei mărimi. Principiul de măsurare al acestor aparate este asemănător principiului metodei de opoziţie în curent continuu. Precizia lor este însă mult mai mică decât a potenţiometrelor (compensatorilor) de curent continuu, din cauza lipsei unui etalon de f.e.m. în curent alternativ. Intrebuinţarea acestor aparate este pentru acest motiv, limitată, cu toate că ele pot servi la determinarea şi a altor mărimi, ca curenţi, rezistenţe, fluxuri magnetice, etc.

Fig. 91. — Legarea voltmetrului cu rezistenţă adiţională.

105. **Măsurarea tensiunilor continue, în practica industrială** se execută în general cu voltmetre cu bobuţă mobilă şi magnet permanent. Pentru extinderea domeniului de măsurare al instrumentului, se întrebuinţează rezistenţe adiţionale în serie (fig. 9), având valoarea de:

$$R = R_g(n - 1),$$

în care R_g este rezistenţa aparatului;

n — raportul între tensiunea de măsurat şi tensiunea maximă care se poate măsura cu aparatul fără rezistenţă adiţională.

Pentru tensiuni de peste 1 000 V, se întrebuinţează voltmetre electrostatice

106. **Măsurarea tensiunilor alternative, în practica industrială.**
— *Măsurarea tensiunilor alternative mici* se efectuează în general cu aparate cu termocuplu sau cu redresori uscaţi (în unire cu instrumente cu bobină mobilă şi magnet permanent).

— *Măsurarea tensiunilor mijlocii* până la circa 600 — 750V se execută cu ajutorul diverselor tipuri de voltmetre: electromagnetice, pentru măsurători curente,— electrodinamice, care sunt aparate de mare precizie,— electrostatice, întrucât permit măsurarea tensiunii fără consumaţie de curent,— termice pentru măsurarea în special a tensiunilor nesinusoidale şi mai rar, voltmetrele de inducţie.

107. **Măsurarea tensiunilor înalte.** In ce priveşte măsurarea tensiunilor înalte în reţelele de distribuţie de energie electrică, soluţia în general întrebuinţată este aceea a transformatorilor de măsură de tensiune.

Pentru măsurarea tensiunilor înalte în laboratoarele de încercări de înaltă tensiune, există însă mai multe metode, care se împart în două mari categorii: *metode pentru măsurarea valorilor eficace* ale tensiunilor şi *metode pentru măsurarea valorilor maxime* (de creastă) ale tensiunilor.

108. **Măsurarea valorilor eficace ale tensiunilor înalte.** Se realizează prin următoarele metode principale:

— *Metoda voltmetrelor obişnuite cu rezistenţe adiţionale.* Se întrebuinţează pentru aceasta voltmetre de precizie, electrodinamice, de 150—750 V, legate în serie cu rezistenţe adiţionale, care se dimensionează astfel încât să se poată măsura tensiuni de sute de mii de volţi. Metoda este foarte bună şi precisă însă prezintă inconvenientul că rezistenţele adiţionale consumă o cantitate importantă de energie electrică şi capătă dimensiuni exagerate; din această cauză metoda este foarte costisitoare.

— *Metoda transformatorilor de măsură de tensiune.* Metoda este evident foarte precisă, dar foarte costisitoare când tensiunea de măsurat trece de câteva sute de mii de volţi.

Deaceea ea este aproape prohibitivă pentru micile laboratoare de încercări şi chiar în marile laboratoare se utilizează rar şi numai pentru tensiuni înalte moderate.

— *Metoda voltmetrelor electrostatice de înaltă tensiune.* Este o metodă foarte întrebuinţată, voltmetrele fiind acelea descrise sumar la cap. *D*, § 59.

Unele din aceste aparate se fac cu mai multe sensibilităţi de măsurare ca de exemplu 25—50—100—150—250 kV şi se construesc pentru tensiuni până la 500—1 000 kV. Ele sunt, în general, aparate delicate, iar precizia lor nu este mai mare decât 3—5%.

— *Metoda raportului de transformare al transformatorului de înaltă tensiune.* Metoda constă în a măsura tensiunea joasă pe partea primară a transformatorului şi de a o multiplica cu raportul de transformare al acestuia, pentru a determina tensiunea secundară înaltă.

Metoda, deşi foarte comodă, nu dă o precizie satisfăcătoare, deoarece raportul de transformare variază cu tensiunea aplicată, crescând sensibil pentru valori mari de tensiuni, din cauza încărcării capacitive a transformatorului, produsă chiar de înfăşurările acestuia şi în special de capacitatea obiectelor de încercat — materiale izolante, izolatori de înaltă tensiune — capacitatea barelor de legătură a transformatorului, etc.

Deaceea, metoda se foloseşte numai pentru valori relativ reduse ale tensiunii (50—100 kV) şi când obiectele de încercat n'au capacitate importantă, ca de exemplu încercările de ulei de transformatori, etc.

109. **Măsurarea valorii maxime a tensiunilor înalte. Eclatorul cu sfere.** Aparatul universal întrebuinţat pentru măsurarea valorii maxime a unei tensiuni înalte (tensiunea de creastă) este *eclatorul cu sfere.* Acest aparat este compus din două sfere de cupru sau alamă, de acelaşi diametru, montate astfel încât

Tabela 15. Valorile maxime ale tensiunii de străpungere în funcţie de distanţa dintre sfere, pentru o sferă pusă la pământ,

12						(241)	(256)	[illegible]	[illegible]						
13							(268)	303							
14							(280)	320	353	362					
15							(292)	336			388	388	389	389	389
16								352	394	408					
18								381	434	452					
20								(407)	472	495	504	508	511	511	511
22								(431)	507	535					
24								(452)	542	576					
25								(463)			613	624	628	630	632
26									575	615					
28									607	652					
30									638	689	714	732	741	745	747
32									666	725					
34									693	759					
35											812	835	848	857	860
36									718	793					
38									(742)	825					
40									(767)	856	902	932	950	964	972
45									(823)	929	986	1020	1050	1070	1080
50									(874)	997	1070	1110	1140	1170	1180
55										1060	1140	1200	1230		
60										(1120)	1210	1280	1320	1350	1380
65										(1170)	1280	1350	1410		
70										(1220)	1340	1420	1490	1530	1560
75										(1270)	1400	1500	1560		
80											(1460)	1570	1640	1690	1730
90											(1560)	1690	1780	1840	1900
100											(1660)	(1800)	1910	1990	2050
110												(1900)	2030	2120	2190
120												(2000)	(2140)	2240	2330
130												—	(2240)	2360	2460
140													(2330)	(2470)	2580
150													(2420)	(2570)	2690
160														(2670)	(2800)
180															(3000)
200															(3180)

Tabela 15. Valorile maxime ale tensiunii de străpungere în funcție de distanța dintre sfere, pentru o sferă pusă la pământ, la 20°C și 760 torr pentru frecvențe industriale, tensiune de șoc negativă și tensiune continuă negativă

Distanța în cm	Diametrul sferelor în cm													
	2	5	6,25	10	12,5	15	25	50	75	100	125	150	175	200
0,05	2,4													
0,1	4,4													
0,15	6,3													
0,2	8,2	8,0												
0,3	11,5													
0,4	14,8	14,3	14,2											
0,5	18,0			16,9	16,7	16,5								
0,6	21,0	20,4	20,2											
0,7	23,9													
0,8	26,6	26,3	26,2											
0,9	29,0													
1	31,0	32,0	31,9	31,6	31,5	31,3	31							
1,2	35,1	37,6	37,5											
1,4	38,5	43,0	43,0											
1,5	40,0			45,6	45,6	45,5	45							
1,6	(41,4)	48,1	48,4											
1,8	(44,0)	53,0	53,6											
2	(46,2)	57,4	58,2	59,1	59,2	59,2	59	58	58					
2,2		61,5	63,1											
2,4		65,3	67,4											
2,5		67,2	69,6	72,0	72,0	72,6	72			71				
3		75,4	79,1	84,1	85,2	85,5	86							
3,5		82,4	87,5	95,2	97,2	98,1								
4		(88,4)	94,8	105	109	110	112	112	112					
4,5		(93,5)	101	115	119	122								
5		(98,0)	(107)	123	129	132	137			137	137	137	137	137
5,5			(112)	131	138	143								
6			(116)	138	146	152	161	164	164					
6,5				144	154	161								
7				150	162	169	184							
7,5				155	168	177								
8				(160)	174	185	205	214	215					
9				(169)	186	198	225							
10				(177)	(196)	209	243	226	265	266	266	267	266	265
11					(204)	219	260							
12					(212)	(229)	275	308	313					
13						(238)	289							
14						(245)	302	352	360					
15						(252)	314			387	387	388	389	389
16							325	392	406					
18							345	428	450					
20							(363)	461	492	503	506	508	510	510
22							(378)	491	532					
24							(391)	520	570					
25							(396)			611	622	626	628	630
26								545	606					
28								570	640					
30								591	670	709	729	739	743	745
32								611	702					
34								630	731					
35										797	830	846	855	858
36								647	756					
38								(663)	785					
40								(679)	906	876	921	947	961	965
45								(710)	858	949	1000	1040	1060	1070
50								(738)	904	1010	1080	1130	1160	1180
55									945	1070	1150	1210		
60									(983)	1120	1220	1280	1330	1360
65									(1010)	1160	1280	1350		
70									(1040)	1210	1330	1420	1480	1530
75									(1060)	1240	1380	1470		
80										(1280)	1430	1530	1610	1680
90										(1330)	1500	1630	1730	1810
100										(1370)	(1560)	1710	1830	1930
110											(1620)	1790	1920	2030
120											(1660)	(1850)	2000	2120
130												(1900)	2070	2200
140												(1950)	(2140)	2280
150												(1980)	(2190)	2350
160													(2240)	(2410)
180														(3500)
200														(2580)

Tabela 16. Valorile maxime ale tensiunii de străpungere în funcţie de distanţa dintre sfere, pentru ambele sfere izolate (distribuţie simetrică a tensiunii), la 20°C şi 760 torr, pentru frecvenţe industriale, tensiune de şoc pozitivă şi negativă şi tensiune continuă pozitivă şi negativă

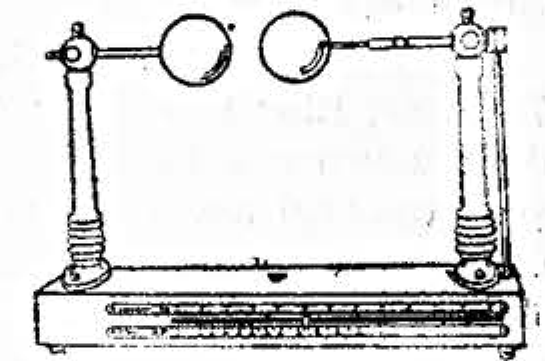
Distanţa în cm	Diametrul sferelor în cm													
	2	5	6,25	10	12,5	15	25	50	75	100	125	150	175	200
0,05	2,4													
0,1	4,4													
0,15	6,3													
0,2	8,2	8,0												
0,3	11,6													
0,4	14,9	14,3	14,2											
0,5	18,1			16,9	16,7	16,5								
0,6	21,2	20,4	20,2											
0,7	24,1													
0,8	26,9	26,4	26,2											
0,9	29,5													
1	32,0	32,2	32,0	31,6	31,5	31,3	31							
1,2	36,7	37,8	37,6											
1,4	41,2	43,3	43,2											
1,5				45,8	45,7	45,5	45							
1,6	(45,2)	48,5	48,6											
1,8	(48,7)	53,5	53,9											
2	(51,8)	58,3	59,0	59,3	59,4	59,2	59	58	58					
2,2		62,8	63,9											
2,4		67,3	68,6											
2,5		69,4	70,9	72,4	72,6	72,9	72			71				
3		79,3	81,8	84,9	85,4	85,8	86							
3,5		88,3	91,8	96,5	97,7	98,4								
4		(96,4)	101	107	110	111	113	112	112					
4,5		(104)	109	118	121	123								
5		(111)	(117)	128	132	134	138			137	137	137	137	137
5,5			(124)	137	142	145								
6			(131)	146	152	155	162	164	164					
6,5				155	161	165								
7				163	170	175	185							
7,5				170	179	185								
8				(177)	187	194	207	214	215					
9				(191)	203	211	228							
10				(203)	(217)	227	248	263	265	266	266	267	266	267
11					(229)	242	267							
12					(241)	(256)	286	309	314					
13						(268)	303							
14						(280)	320	353	362					
15						(292)	336			388	388	389	389	389
16							352	394	408					
18							381	434	452					
20							(407)	472	495	504	508	511	511	511
22							(431)	507	535					
24							(452)	542	576					
25							(463)			613	624	628	630	632
26								575	615					
28								607	652					
30								638	689	714	732	741	745	747
32								666	725					
34								693	759					
35										812	835	848	857	860
36								718	793					
38								(742)	825					
40								(767)	856	902	932	950	964	972
45								(823)	929	986	1020	1050	1070	1080
50								(874)	997	1070	1110	1140	1170	1180
55									1060	1140	1200	1230		
60									(1120)	1210	1280	1320	1350	1380
65									(1170)	1280	1350	1410		
70									(1220)	1340	1420	1490	1530	1560
75									(1270)	1400	1500	1560		
80										(1460)	1570	1640	1690	1730
90										(1560)	1690	1780	1840	1900
100										(1660)	(1800)	1910	1990	2050
110											(1900)	2030	2120	2190
120											(2000)	(2140)	2240	2330
130											—	(2240)	2360	2460
140												(2330)	(2470)	2580
150												(2420)	(2570)	2690
160													(2670)	(2800)
180														(3000)
200														(3180)

Tabela 17. Valorile maxime ale tensiunii de străpungere în funcție de distanța dintre sfere, pentru o sferă pusă la pământ la 20°C și 760 torr pentru tensiune de șoc pozitivă și tensiune continuă pozitivă.

Distanță în cm	Diametrul sferelor în cm												
	5	6,25	10	12,5	15	25	50	75	100	125	150	175	200
0,4	14,3	14,2											
0,5			16,9	16,7	16,5								
0,6	20,4	20,2											
0,8	26,3	26,2											
1	32,0	31,9	31,6	31,6	31,3	31							
1,2	37,8	37,6											
1,4	43,3	43,1											
1,5			45,6	45,6	45,5								
1,6	49,0	49,0											
1,8	54,4	54,6											
2	59,4	60,0	59,1	59,2	59,2	59	58	58					
2,2	64,2	65,0											
2,4	68,8	69,7											
2,5	71,0	72,3	72,8	72,5	72,6								
3	81,0	83,4	85,6	85,7	85,6	86							
3,5	90,0	93,4	97,4	98,6	98,7								
4	(97,5)	103	109	111	111	112	112	112					
4,5	(104)	110	120	123	124								
5	(109)	(117)	130	134	136	138			137	137	137	137	137
5.5		(123)	139	144	147								
6		(128)	148	154	158	162	164	164					
6,5			156	163	168								
7			163	172	178	187							
7,5			170	180	187								
8			(176)	188	196	210	214	215					
9			(186)	202	212	232							
10			(195)	(214)	226	252	262	265	266	266	267	266	265
11				(224)	238	272							
12				(232)	(249)	290	310	313					
13					(260)	306							
14					(269)	321	356	360					
15					(276)	335			388	387	388	389	389
16						348	401	407					
18						372	440	452					
20						(393)	478	499	505	506	509	510	510
22						(410)	511	541					
24						(424)	543	582					
25						(430)			616	624	626	628	
26							572	621					
28							600	659					
30							625	694	719	735	740	743	745
32							646	727					
34							669	759					
35									816	841	850	856	
36							687	788					
38							(705)	816					
40							(721)	841	900	937	957	963	967
45							(756)	899	979	1020	1060	1070	
50							(785)	949	1050	1110	1150	1170	1180
55								994	1110	1190	1240		
60								(1030)	1160	1260	1310	1350	1380
65								(1070)	1210	1320	1390		
70								(1100)	1260	1380	1460	1510	1560
75								(1120)	1300	1430	1520		
80									(1330)	1480	1580	1650	1710
90									(1390)	1560	1680	1770	1850
100									(1430)	(1620)	1770	1880	1980
110										(1680)	1850	1980	2080
120										(1720)	1920	2060	2180
130											(1970)	2140	2270
140											(2020)	(2210)	2350
150											(2060)	(2260)	2420
160												(2310)	(2480)
180													(2580)
200													(2650)

distanţa dintre ele să se poată regla şi măsura pe o riglă gradată, sau cu un alt dispozitiv. (Fig. 92).

Pentru o anumită tensiune alternativă aplicată acestor sfere, se va produce un arc de descărcare între sfere, când distanţa dintre ele va atinge o valoare d, totdeauna aceeaşi pentru o tensiune de o anumită *valoare maximă* şi pentru aceleaşi condiţii de temperatură, presiune barometrică şi umiditate.


Fig. 92. – Eclatorul cu sfere.

Există curbe internaţionale determinate experimental, (curbe de etalonare) care dau, pentru diametre ale sferelor variind dela câţiva cm la 2 m, tensiunea de amorsare a arcului, în funcţie de distanţa dintre sfere, pentru temperatura de 20°C, presiunea 760 torr şi umiditatea normală a aerului (11 g/cm³), influenţa umidităţii aerului fiind dealtfel aproape neglijabilă.

Curbele de mai sus se dau pentru ambele sfere izolate, sau pentru o sferă legată la pământ. Ele se dau în kV eficace presupunând curba tensiunii sinusoidală, sau în kV_{max}.

In tabelele 15, 16 şi 17 se dau valorile $V_{max} = f(d)$ pentru sfere de diverse dimensiuni, d fiind distanţa între sfere.

110. **Măsurarea cu eclatorul.** Pentru a măsura o tensiune cu ajutorul eclatorului, în cazul când sferele pot fi manevrate sub tensiune, acestea se apropie până la producerea arcului. In acel moment se citeşte distanţa d dintre sfere. Din curbele internaţionale, se găseşte pentru sferele întrebuinţate tensiunea $U_{20,\,760}$, în funcţie de distanţa d, pentru 20°C şi 760 torr.

Dacă s'a lucrat la temperatura t şi presiunea p, valoarea tensiunii reale în momentul producerii arcului este

$$U_{t,p} = \delta \times U_{20,\,760},$$

în care δ este un coeficient care se ia în general egal cu densitatea relativă a aerului

$$\delta = \frac{0{,}386\,p}{273 + t}.$$

In cazul când sferele nu pot fi manevrate sub tensiune, se procedează prin aproximaţii succesise.

111. **Determinarea tensiunii de conturnare sau de străpungere** a unui izolator de înaltă tensiune, material izolant, etc., se execută determinând în prealabil raportul de transformare real, în gol, al transformatorului producător de tensiune înaltă.

Se stabileşte o distanţă d între sfere, la care arcul trebue să izbucnească la o anumită tensiune (ţinând seama de condiţiile de temperatură şi presiune). Se ridică apoi tensiunea până la producerea arcului, citind în acel moment tensiunea corespunzătoare pe primarul transformatorului. Procedând astfel pentru diverse tensiuni, se ridică curba tensiunii înalte în funcţie de tensiunea joasă:

$$V_{it} = f(V_{jt}).$$

Această curbă se poate folosi în cazul când obiectul de încercat are o capacitate neglijabilă. Citind tensiunea joasă în momentul străpungerii, se obţine din curba de mai sus tensiunea înaltă la care s'a produs străpungerea.

In cazul când capacitatea obiectului de încercat nu este neglijabilă, se ridică curba de mai sus $V_{it} = f(V_{jt})$ şi cu obiectul de încercat legat în paralel cu eclatorul, ridicându-se tensiunea numai până la valori de circa 80⁰ ₀ din valoarea tensiunii probabile de străpungere. Se procedează apoi prin extrapolarea curbei ridicate, pentru a se determina tensiunea de străpungere căutată, corespunzătoare valorii tensiunii joase măsurate în momentul străpungerii.

112. Condiții de bună funcționare a eclatorului cu sfere. In serie cu eclatorul, se pune o rezistență mare de silită sau alt material similar, de ordinul a 20—0,5 Ω/V pentru sfere de un diametru de 2—200 cm, pentru a amortisa oscilațiile de înaltă frecvență și pentru a feri suprafața sferelor de deteriorare cu timpul, din cauza arcurilor.

Sferele se fac de diametre normalizate de 2,5; (6,25); 10; (12,5); 15; 25; 50; 75; 100; 125; 150; 175; 200 cm, fiecărui eclator corespunzându-i un anumit domeniu de măsurare a tensiunii înalte, în funcție de raportul dintre distanța între sfere și diametrul acestora, care în general se ia mai mic decât 0,5, pentru a se obține o precizie de circa ± 3%, mergându-se cu erori mai mari până cel mult la valoarea 1.

Astfel, cu sfere de 50 cm diametru dintre care una legată la pământ, se pot măsura tensiuni între 41 kV și cel mult 550 kV.

Valorile obținute pentru tensiunile determinate cu ajutorul eclatorului cu sfere și exprimate în kV eficace pot prezenta erori considerabile, atingând până la 20% în cazul când curba de tensiune a transformatorului producător de înaltă tensiune este nesinusoidală.

113. Dispozitivul cu condensator de măsură și curent redresat pentru măsurarea tensiunilor de creastă. Schema principială a dispozitivului este redată în fig. 93.

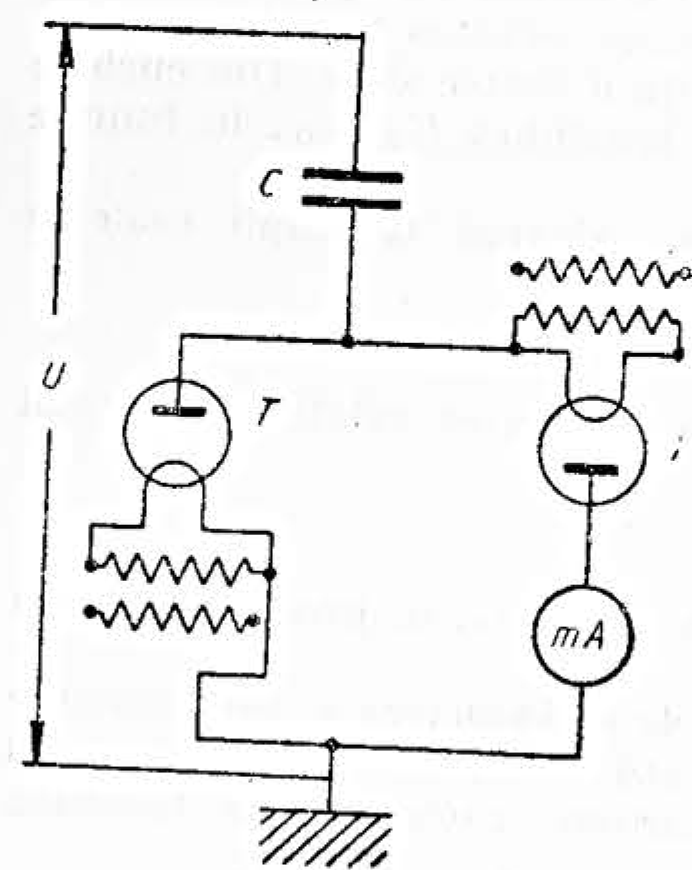


Fig. 93. — Dispozitiv cu condensator pentru măsurarea tensiunilor de creastă; C — condensator; T — tub redresor; mA — miliampermetru de curent continuu.

Curentul capacitiv al condensatorului C este redresat de tubul redresor T, iar valoarea medie a acestui curent pe care îl înregistrează miliampermetrul de curent continuu mA este proporțională cu valoarea tensiunii maxime înalte,

$$U_{max} = \frac{I_c}{2fC}$$

I_c fiind curentul dat de miliampermetru.

In ipoteza unei tensiuni sinusoidale, miliampermetrul se gradează direct în kV eficace.

Pentru diverse capacități ale condensatorului C, se vor obține diverse sensibilități de măsurare. Condensatorul C este în general chiar eclatorul cu sfere al instalației de înaltă tensiune.

Marele avantaj al acestui dispozitiv asupra eclatorului cu sfere constă în aceea că el permite măsurarea în fiecare moment a tensiunii înalte, ca un voltmetru obișnuit.

b) Măsurarea curentului

114. Unitatea de curent electric în sistemul practic MKSA, este amperul absolut. Măsurători absolute de curent s'au executat în marile laboratoare de metrologie străine, cu ajutorul balanței lui Rayleigh.

115. Măsurătorile de precizie de curent continuu se pot executa prin următoarele metode:

— *Metoda electrolitică*; aceasta constă în trecerea curentului de măsurat printr'un electrolit în care sunt cufundați doi electrozi (de exemplu soluție de azotat de argint și electrozi de platină și argint) și determinarea valorii curentului din măsurarea cantității de metal (argintul) depusă pe catod, (aici platina).

Metoda, care este foarte precisă, nu se mai utilizează decât foarte rar în marile laboratoare pentru măsurări cu totul speciale.

— *Metoda electrodinamometrelor absolute*, la care cuplul în funcție de curent poate fi calculat cu toată precizia din dimensiunile geometrice ale bobinelor respective, curentul de măsurat putând deci fi determinat printr'o simplă cântărire ca la o balanță.

Metoda se întrebuințează în marile laboratoare de metrologie pentru măsurarea absolută a unui curent (v. § 114 de mai sus).

— *Metoda potențiometrică*. Aceasta permite măsurarea unui curent continuu prin măsurarea diferenței de potențial la bornele unei rezistențe etalon, prin care circulă curentul de măsurat.

Este o metodă foarte precisă și este în special aplicată la etalonări de aparate.

116. Măsurătorile industriale de curent continuu se efectuează aproape exclusiv cu ajutorul aparatelor de curent continuu cu magnet permanent și bobină mobilă: galvanometrele și ampermetrele.

Cu galvanometrele cu oglindă de mare sensibilitate se măsoară curenți până la ordinul de 10^{-11} A; cu galvanometrele cu ac indicator și suspensie cu pivoți, curenți de ordinul 10^{-6} A; milivoltmetrele cu șunturi, constituind ampermetrele industriale, acoperă toată gama de curenți, dela câțiva miliamperi până la curenți de ordinul 30 000 A.

117. Ampermetrele cu șunturi. Aparatul în sine, fără șunturi, este totdeauna un miliampermetru-milivoltmetru magnetoelectric, care dă indicația maximă pentru un curent de ordinul 5—30 mA, cu o cădere de tensiune de ordinul 60—150 mV.

Prin utilizarea de șunturi, domeniul de măsurare se extinde în limitele dorite.

Șunturile se construesc din fire, bare, panglici sau chiar plăci de manganină (v. și cap. C, § 25).

Rezistența șuntului R se determină în funcție de rezistența interioară a aparatului R_g și de raportul de multiplicitate n al șuntului care indică de câte ori curentul de măsurat este mai mare decât cel suportat de aparat.

Astfel:

$$R = \frac{R_g}{n-1} \text{ în } \Omega.$$

Aparatele cu șunturi interioare au două sau mai multe borne exterioare corespunzând unei singure sau mai multor sensibilități, astfel cum se vede în fig. 94 unde este reprezentată schema unui ampermetru cu patru sensibilități de măsurare (cu șunt multiplu).

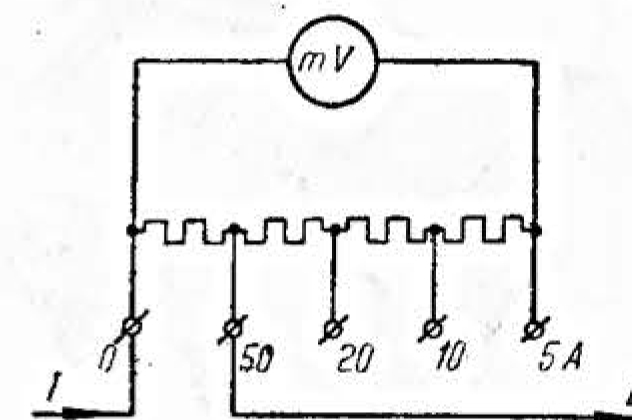


Fig. 94. — Ampermetru cu șunt multiplu.

Șunturile exterioare simple, pentru o singură sensibilitate, au marcate pe ele intensitatea de curent care reprezintă sensibilitatea aparatului montat pe șunt, precum și căderea de tensiune la bornele ansamblului, în mV (de exemplu 100 A, 150 mV).

Șunturile au două borne principale de curent (v. și cap. C, § 25) (sau două grupuri de borne pentru intensitățile mari de curent), la care se leagă șuntul în serie în circuitul curentului de măsurat, și două borne secundare, care se leagă cu ajutorul a două cordoane speciale, la bornele aparatului.

Destinația celor două rânduri de borne trebue negreșit respectată, pentru a nu comite erori de măsurare.

In fig. 95 este indicată legarea corectă a unui şunt.

In fig. 96 şi 97 sunt indicate două montaje greşite. In prima sunt greşit executate legăturile la ampermetru, în cea de a doua sunt greşite legăturile la circuitul principal. In cel de al doilea montaj, instrumentul poate fi periclitat.

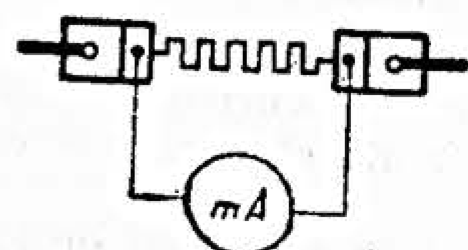
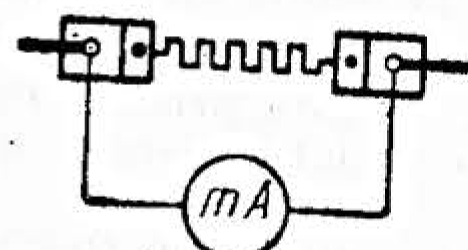


Fig. 95. – Legarea corectă a unui şunt.



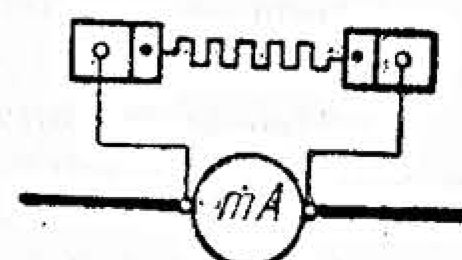
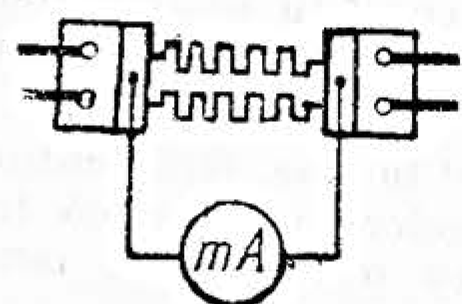


Fig. 96 – 97. – Montaje greşite ale unui ampermetru cu şunt.

In fig. 98 şi 99 sunt indicate legăturile la şunturi cu mai multe borne. In prima figură legarea este corectă, în cea de a doua legarea greşită, circuitul principal fiind legat numai la o serie de borne, ceeace aduce o supraîncărcare a lor.



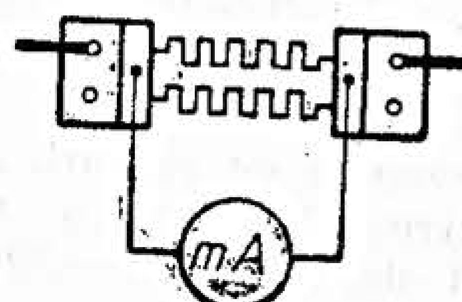


Fig. 98 – 99. – Montaje cu şunturi cu mai multe borne
a – montaj corect; *b* – montaj greşit.

Pentru acelaşi aparat, se pot utiliza o serie întreagă de şunturi de aceeaşi cădere de tensiune cu a aparatului incluziv cordoanele, până la intensităţile cele mai mari.

In fig. 100 este reprezentat un şunt pentru 25 000 A şi 75 mV.

O a doua categorie de şunturi o formează acelea care se racordează direct la bornele aparatului, fără cordoane de legătură, ca o baretă de scurtcircuit şi care poartă pe ele bornele de racordare a şuntului la circuitul curentului de măsurat (fig. 101).

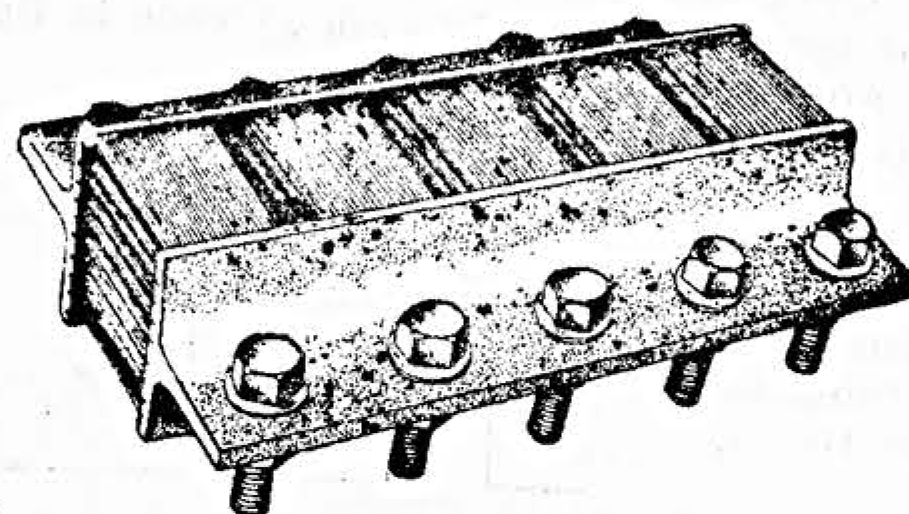


Fig. 100. – Şunt pentru 25 000 A 75 mV.

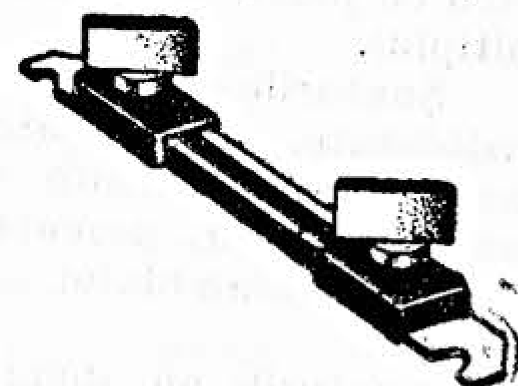


Fig. 101. – Şunturi pentru racordarea directă la aparat.

118. **Alte tipuri de aparate pentru măsurări de intensităţi în curent continuu**, în afară de cele cu bobină mobilă şi magnet permanent, sunt cele electrodinamice, electromagnetice, termice, etc.

Când se măsoară un curent continuu cu un aparat electrodinamic, se va avea grijă să se facă două măsurători: una cu curentul circulând în aparat într'un sens şi a doua cu curentul circulând în sens contrar, făcându-se apoi media citirilor. Aceasta pentru a anula efectul câmpurilor exterioare uniforme (în special magnetismul terestru).

Aparatele electromagnetice, posedând piese de fier, dau în curent continuu indicaţii diferite, după cum curentul de măsurat s'a atins prin valori crescătoare sau descrescătoare; aceasta din cauza fenomenului de histerezis care ia naştere în piesele de fier ale aparatului.

119. **Transformatori de curent continuu.** Pentru măsurarea curenţilor continui se folosesc şi dispozitive speciale denumite « transformatori de curent continuu » care, diferind ca principiu de transformatorii de măsurat curentul alternativ, împlinesc totuşi aceeaşi funcţiune.

Transformatorii de curent continuu se întrebuinţează atât pentru măsurarea curenţilor continui în circuitele de înaltă tensiune, cât şi mai ales pentru măsurări de curenţi mari (peste 10 000 A, ca de exemplu în industria aluminiului), în locul aparatelor de curent continuu cu şunt, precum şi în laboratoarele de încercări [1]).

120. **Măsurătorile de curent alternativ** se execută în general cu aparate electrodinamice (v. cap. *D*, § 48—50), dacă este vorba de măsurători de precizie.

In cazuri speciale, se utilizează metode de compensaţie.

Pentru intensităţi mici, se întrebuinţează aparate de curent continuu, în unire cu termocupluri sau cu redresori.

Pentru măsurători în practica industrială, se întrebuinţează în general aparate electromagnetice, care au ajuns astăzi la un grad de precizie satisfăcător, până la frecvenţa de 500 Hz. Pe lângă acestea se mai întrebuinţează şi aparate electrodinamice, termice, de inducţie, cu termocupluri şi cu redresori.

Pentru intensităţi mai mari, de peste 100 A, se întrebuinţează deobicei transformatori de intensitate care reduc curentul de măsurat la 5 A sau, în anumite cazuri, la 1 A.

Pentru măsurarea curenţilor de înaltă frecvenţă, se întrebuinţează aparate cu tuburi electronice, cu redresori uscaţi sau cu termocuplu.

c) Măsurarea puterilor

121. **Wattul** este unitatea de putere electrică în sistemul practic MKSA.

122. **Măsurări de puteri în curent continuu cu ampermetrul şi cu voltmetrul.** Metoda constă în a determina puterea din produsul indicaţiilor celor două aparate adică:

$$P = UI,$$

U fiind tensiunea indicată de voltmetru iar *I*, curentul dat de ampermetru.

Din cauza consumaţiei de putere a celor două aparate, formula de mai sus nu este exactă şi trebue să i se aducă anumite corecţii care depind de felul montajului întrebuinţat: *montajul aval* sau *montajul amonte.*

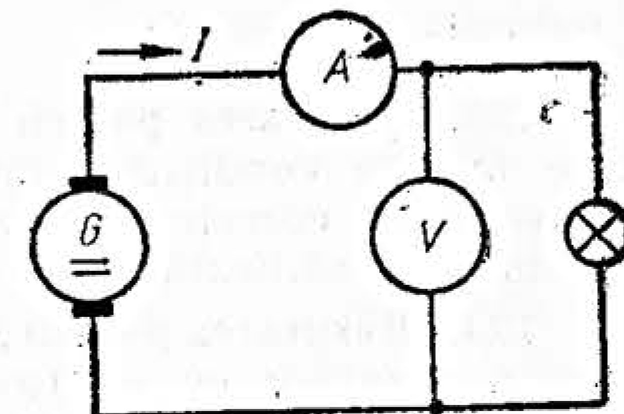


Fig. 102. – Montaj aval al voltmetrului.

Montajul aval (fig. 102) este acela în care voltmetrul este montat în derivaţie direct la bornele receptorului, iar ampermetrul măsoară curentul receptorului plus curentul absorbit de voltmetru $\frac{U}{g}$, în care g este rezistenţa interioară a voltmetrului.

[1]) Astfel de transformatori, că de exemplu acela realizat de I. C. Chicoin, au fost mult studiaţi şi utilizaţi în U.R.S.S.

Puterea consumată va fi dată de expresia:

$$P = U\left(I - \frac{U}{g}\right) = UI - \frac{U^2}{g},$$

Aşa dar puterea exactă P este egală cu puterea măsurată $P_m = UI$, din care se scade consumaţia de putere din voltmetru.

Puterea debitată de generator P_d va fi dată de expresia

$$P_d = (U + r\,I)\ I = UI + rI^2,$$

în care r este rezistenţa interioară a ampermetrului.

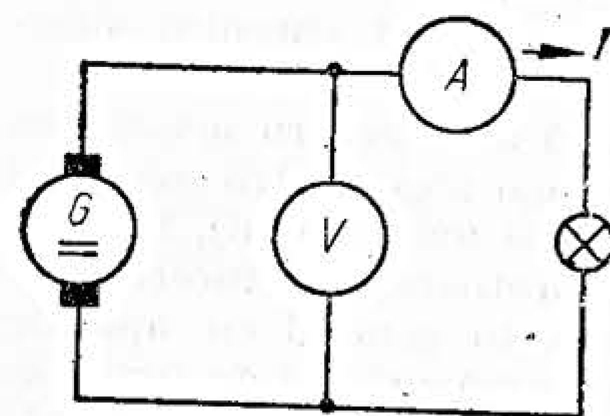


Fig. 103. — Montaj amonte al voltmetrului.

Montajul amonte (fig. 103) este acela în care ampermetrul este legat direct în serie cu receptorul, iar voltmetrul măsoară tensiunea receptorului plus căderea de tensiune în ampermetru rI.

Puterea consumată va fi dată de expresia:

$$P = (U - rI)\ I = UI - rI^2,$$

în care r este rezistenţa interioară a ampermetrului. Aşa dar puterea exactă P este egală cu puterea măsurată $P_m = UI$ din care se scade consumaţia de putere în ampermetru.

Puterea debitată de generator are expresia:

$$P_d = U\left(I + \frac{U}{g}\right) = UI + \frac{U^2}{g}.$$

Observaţie. *Corecţiile* datorite consumaţiei aparatelor $\frac{U^2}{g}$ şi rI^2 sunt cu atât mai neglijabile cu cât puterea măsurată este mai mare.

Astfel, cu aparate de precizie obişnuită (şi pentru montajul aval,) dacă se măsoară o lampă cu incandescenţă de 120 V 15 W şi alta de 120 V 200 W, erorile $\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_m - P}{P} = \frac{\frac{U^2}{g}}{P}$ asupra puterii consumate ar fi de 5,4% respectiv 0,4% dacă nu s'ar face corecţia consumaţiei voltmetrului cu rezistenţă de 30 000 Ω.

123. **Măsurarea puterii în curent continuu, cu wattmetrul electrodinamic** se poate face în condiţiile arătate în § 128; din cauza complicaţiei de execuţie a măsurătorii corecte însă, metoda nu este aproape niciodată întrebuinţată, singura metodă utilizată fiind aceea a ampermetrului şi voltmetrului.

124. **Măsurarea puterii active în circuitele monofazate** se face în marea majoritate a cazurilor cu wattmetrele electrodinamice care prezintă marele avantaj că pot fi etalonate în curent continuu şi că sunt cele mai precise aparate.

Se mai utilizează şi wattmetrele de inducţie, ca aparate de tablou şi wattmetrele termice şi electrostatice, care sunt foarte rar întrebuinţate şi numai în cazuri speciale (de exemplu în curenţi nesinusoidali).

125. **Utilizarea wattmetrului electrodinamic pentru măsurări de puteri continue şi monofazate.** Pentru măsurarea puterii continue sau monofazate absorbită de un receptor, wattmetrul electrodinamic se montează cu bobina de curent în serie cu receptorul, iar bobina de tensiune, având rezistenţa adiţională respectivă în derivaţie pe receptor şi deci pe tensiunea de alimentare.

126. **Sensul indicaţiei wattmetrului.** Pentru ca wattmetrul să dea indicaţii în sensul bun, adică acul să devieze în sensul scării, curentul trebue să aibă un anumit sens în bobinajele aparatului.

Deaceea bornele de intrare ale curentului în bobina de curent, respectiv în bobina de tensiune a wattmetrului, sunt marcate cu un acelaşi semn distinctiv: o steluţă, o literă, etc., racordarea wattmetrului trebuind să se facă astfel încât unul din conductorii de alimentare să fie legat la borna marcată (polarizată) a bobinei de curent, iar borna marcată a bobinei de tensiune să fie legată la *acelaşi conductor* de mai sus.

127. **Montajul wattmetrului** poate fi aval sau amonte, după cum borna marcată a bobinei de tensiune este legată la borna nemarcată a bobinei de curent, sau la borna marcată, astfel cum se vede în fig. 104 şi 105.

Observaţie. Prin respectarea regulii dela § 126 se mai realizează şi o diferenţă de potenţial foarte mică, între bobina de tensiune (mobilă) şi bobina de curent (fixă), evitându-se erori în indicaţiile wattmetrului, datorită sarcinilor electrice de pe cele două bobine.

Pentru acelaşi motiv, rezistenţa adiţională a bobinei de tensiune nu se leagă niciodată ca în fig. 106 şi 107, ci ca în fig. 104 şi 105, adică rezistenţa adiţională se montează între borna nepolarizată a bobinei de tensiune şi reţea.

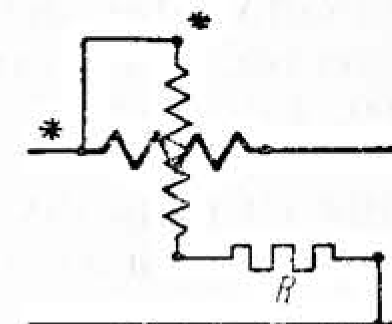


Fig. 104. — Montaj aval al wattmetrului.

128. **Indicaţia wattmetrului electrodinamic în curent continuu.** Dacă U_c este tensiunea continuă aplicată bobinei de tensiune a wattmetrului şi I_c curentul continuu din bobina de curent, indicaţia α_c a wattmetrului este proporţională cu produsul $U_c\, I_c$

$$\alpha_c = KU_c\, I_c = KP_c,$$

adică cu puterea continuă P_c, care deci se poate măsura cu wattmetrul electrodinamic.

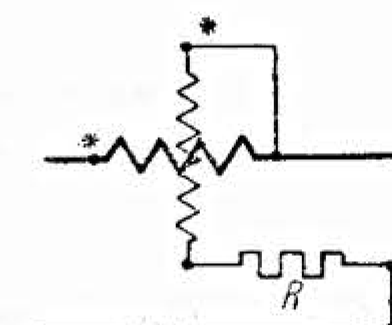


Fig. 105. — Montaj amonte al wattmetrului.

Totuşi, pentru a elimina influenţa câmpului magnetic terestru, trebue executată o măsurătoare normală şi apoi o a doua măsurătoare, inversând simultan sensul curenţilor atât în bobina de curent cât şi în aceea de tensiune a wattmetrului şi făcând media celor două citiri, astfel cum trebue negreşit procedat la etalonarea în curent continuu, în laborator, a unui wattmetru electrodinamic. Din cauza acestei complicaţii de manipulare însă, puterea în curent continuu nu se măsoară în practică niciodată cu wattmetrul electrodinamic, ci numai prin metoda ampermetrului şi a voltmetrului.

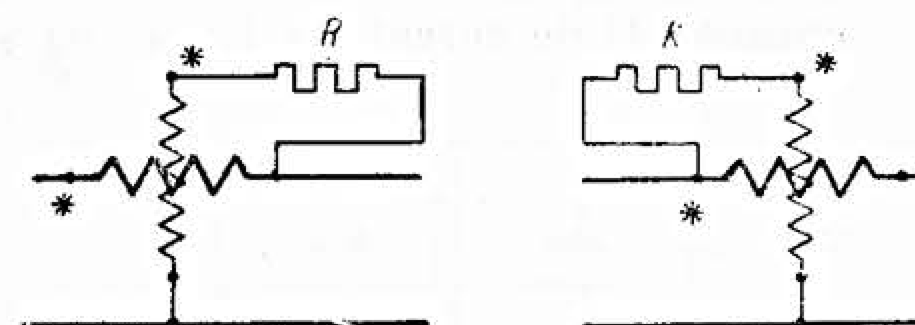


Fig. 106—107. — Montaje greşite ale rezistenţei adiţionale.

129. **Indicaţia wattmetrului electrodinamic în curent alternativ.** Dacă U este valoarea eficace a tensiunii alternative sinusoidală aplicată bobinei de tensiune, I valoarea eficace a curentului nominal de aceeaşi frecvenţă din bobina de curent, iar φ decalajul dintre tensiunea U şi curentul I, indicaţia wattmetrului este proporţională cu produsul dintre:

$$U,\ I \text{ şi } \cos\,(UI) = \cos\,\varphi; \qquad \alpha = KUI\cos\,\varphi = KP_a,$$

adică proporţională cu puterea activă $P_a = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt$, dată de tensiunea $u = U\sqrt{2}\,\sin\,\omega t$ şi curentul $i = I\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t - \varphi)$.

Din această cauză, scara unui wattmetru electrodinamic are o gradaţie aproape uniformă.

Observaţii. — La măsurarea unei puteri într'un circuit monofazat, $P = UI \cos \varphi$, wattmetrul va da totdeauna indicaţii în sensul bun al cadranului — dacă regulile de conexiune au fost respectate — atât pentru o sarcină inductivă, cât şi pentru una capacitivă, deoarece $\cos \varphi$ este pozitiv, φ fiind mai mic decât 90°.

— Se vede că dacă $U = U_c$ şi $I = I_c$, iar $\varphi = 0$, deviaţia în curent continuu $\alpha_c = KU_c I_c$ este identică cu deviaţia în curent alternativ $\alpha = KUI$.

Rezultă de aci că etalonarea unui wattmetru electrodinamic, care se utilizează de preferinţă în curent alternativ, se poate face în curent continuu prin metode de mare precizie de opoziţie, ceeace constitue un mare avantaj.

130. Constanta wattmetrului. Wattmetrul se construeşte astfel ca pentru o anumită intensitate nominală I_n şi o anumită tensiune nominală U_n, în fază cu curentul, acul aparatului să acuze deviaţia maximă α_n, care comportă în general 100, 120, 130 sau 150 diviziuni.

Constanta wattmetrului este coeficientul cu care trebue multiplicată indicaţia citită în diviziuni, pentru a afla puterea în waţi; este adică puterea corespunzătoare unei diviziuni a scării şi se determină din relaţia:

$$U_n I_n = K'\alpha_n,$$

$$K' = \frac{U_n I_n}{\alpha_n}.$$

Astfel, un wattmetru construit pentru o tensiune $U_n = 120$ V, un curent $I_n = 5$A şi având $\alpha_n = 120$ diviziuni va avea o constantă

$$K' = \frac{120 \cdot 5}{120} = 5\text{W},$$

adică o diviziune corespunde la 5 W.

Dacă wattmetrul are mai multe sensibilităţi de tensiune şi de curent, constantele corespunzătoare fiecărei perechi de valori U_x şi I_x se calculează ca mai sus

$$K'_x = \frac{U_x I_x}{\alpha_n}$$

şi se dau în general sub forma unei tabele ca aceea de mai jos, corespunzătoare wattmetrului considerat, care ar avea trei sensibilităţi de curent (5, 10, 20 A) şi trei de tensiune (120, 240 şi 480 V)

Tensiune / Curent	120	240	480
5	5	10	20
10	10	20	40
20	20	40	80

131. Erorile în măsurarea puterii monofazate datorite consumului bobinelor de tensiune şi de curent ale wattmetrului electrodinamic. Se pot comite şi aici erori sistematice de măsurare, din cauza consumului bobinelor wattmetrului.

Montajul aval. S'au indicat pe schema alăturată (fig. 108) şi ampermetrul A şi voltmetrul V, pentru măsurarea curentului şi tensiunii circuitului de utilizare. Se poate stabili următoarea regulă:

Puterea măsurată de wattmetru este egală cu suma puterilor tuturor circuitelor care se găsesc în derivaţie cu bobina de tensiune, incluziv puterea consumată de această bobină.

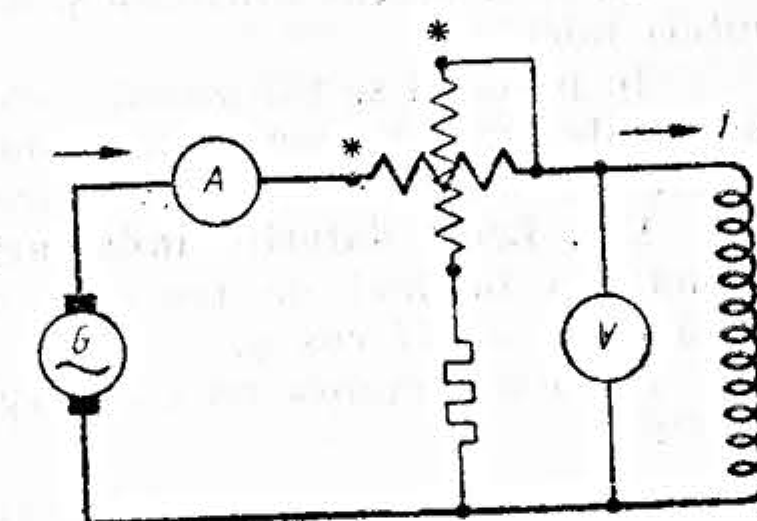


Fig. 108. — Montaj aval pentru măsurarea puterii.

In cazul de faţă:

$$P_m = P + \frac{U^2}{R} + \frac{U^2}{g},$$

în care P este puterea receptorului $= UI \cos \varphi$

$\frac{U^2}{R}$ — consumul de putere în bobina de tensiune a wattmetrului, R fiind rezistenţa acestei bobine;

$\frac{U^2}{g}$ — consumul de putere a voltmetrului, g fiind rezistenţa voltmetrului.

Rezultă:

$$P = P_m - \frac{U^2}{R} - \frac{U^2}{g}.$$

Pentru aflarea lui P, se face deci corecţia consumurilor $\frac{U^2}{R}$ şi $\frac{U^2}{g}$ care se calculează imediat, U fiind dat de voltmetru, iar R şi g fiind deobicei scrise pe aparat.

Montajul amonte. Şi aici se poate stabili următoarea regulă:

Puterea P_m măsurată de wattmetru este egală cu suma puterilor tuturor circuitelor al căror curent trece şi prin bobina de curent a wattmetrului, incluziv puterea consumată în această bobină.

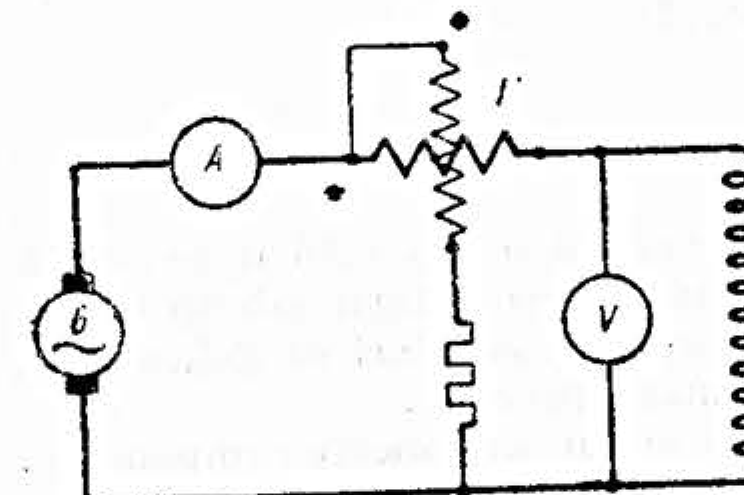


Fig. 109. — Montaj amonte pentru măsurarea puterii.

In cazul schemei de faţă (fig. 109).

$$P_m = P + \frac{U^2}{g} + rI'^2,$$

în care P este puterea receptorului;

$\frac{U^2}{g}$ — consumul de putere a voltmetrului;

rI'^2 — consumul de putere în bobina de curent a wattmetrului, I' fiind curentul care trece efectiv prin această bobină iar r fiind rezistenţa ei.

Rezultă:

$$P = P_m - \frac{U^2}{g} - rI'^2.$$

Se vede că aici corecţia consumului $\frac{U^2}{g}$ poate fi calculată imediat, dar pentru corecţia consumului de putere a bobinei de curent, trebue teoretic scăzut din curen-

tul dat de ampermetru, curentul $\frac{U}{R}$ absorbit de bobina de tensiune a wattmetrului.

Practic, se poate lua $rI'^2 = rI^2$, I fiind curentul dat de ampermetrul A.

Ca şi în curent continuu şi aici corecţiile capătă importanţă când se măsoară puteri mici.

In practică se utilizează ambele montaje, acela amonte prezentând avantajul de a putea neglija consumul bobinei de curent a wattmetrului, aceasta fiind în general redusă, iar acela aval prezentând avantajul unei corecţii uşor de făcut.

132. Erori datorite inductanţei bobinei de tensiune a wattmetrului. Dacă inductanţa bobinei de tensiune este neglijabilă, wattmetrul măsoară o putere egală cu $P = UI \cos\varphi$.

Dacă inductanţa nu este neglijabilă, wattmetrul indică o putere P' diferită de P:

$$P' = P\frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} = P(1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi),$$

In care P este puterea receptorului $UI \cos\varphi$;

φ — decalajul curentului receptorului faţă de tensiunea V;

ψ — argumentul impedanţei bobinei de tensiune, în general foarte mic.

Rezultă:

$$P = P'\cdot\frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi} \cong P'\cdot\frac{1}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}.$$

Termenul de corecţie $\frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}$ foarte aproape de unitate în general, se poate calcula cunoscând argumentul ψ.

Eroarea $\frac{\Delta P}{P} = \frac{P' - P}{P}$, care se comite considerând puterea P' în locul puterii P a receptorului, are valoarea aproximativă

$$\frac{\Delta P}{P} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi.$$

Această eroare este în general foarte mică şi capătă o anumită importanţă numai în cazul când $\operatorname{tg}\varphi$ este foarte mare, adică la măsurarea puterii sub un factor de putere $\cos\varphi$, foarte mic, ca de exemplu măsurarea de pierderi în gol, etc. şi în special pentru wattmetrele electrodinamice de mare precizie.

Pentru eliminarea practic totală a acestei erori se fac wattmetre compensate.

Observaţie. Dacă se ţine seama de inductanţa bobinei de tensiune, formulele de mai sus care dau indicaţiile wattmetrului, precum şi valoarea puterii receptorului pentru cele două montaje aval şi amonte, devin:

Montajul aval

$$P_m = P\frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} + \frac{U^2}{R} + \frac{U^2}{g}; \quad P = \left(P_m - \frac{U^2}{R} - \frac{U^2}{g}\right)\frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}$$

Montajul amonte

$$P_m = P\frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} + \frac{U^2}{g} + rI^2; \quad P = \left(P_m - \frac{U^2}{g} - rI^2\right)\frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}$$

In practică însă se ţine seama de aceste relaţii exacte în cazuri cu totul excepţionale.

133, Wattmetru electrodinamic pentru măsurări de puteri sub un factor de putere redus. S'a văzut că wattmetrele se construesc astfel încât la tensiunea

nominală U_n şi curentul nominal I_n, să se obţină deviaţia maximă α_n pentru $\cos\varphi_n = 1$, adică pentru un decalaj zero între U_n şi I_n.

$$\alpha_n = U_n I_n.$$

Dacă însă bobina de curent a acestui wattmetru a fost astfel executată încât să permită de exemplu o supraîncărcare permanentă egală cu de patru ori valoarea curentului nominal, acest wattmetru, supus la tensiunea U_n şi curentul $4I_n$, va da deviaţia maximă la un factor de putere $\cos\varphi = 0{,}25$.

$$\alpha_n = U_n\, 4I_n \cdot 0{,}25.$$

Se pot astfel măsura puteri monofazate sub factori de putere reduşi, cu deviaţii cât mai mari ale wattmetrului, ca de exemplu la măsurarea pierderilor magnetice, a pierderilor în condensatori, etc.

134. Montajul wattmetrelor cu ajutorul transformatorilor de măsură. Când domeniile de măsurare ale bobinelor de curent şi de tensiune ale wattmetrelor o permit, racordarea acestora la circuitul de măsurare se face direct, ca în schemele de montaj de mai sus.

In ce priveşte intensitatea, utilizarea metodei directe este limitată de posibilităţile constructive ale wattmetrelor, care nu se fac în general pentru curenţi mai mari de 50 A.

In ce priveşte tensiunea, deşi cu ajutorul rezistenţelor adiţionale şi luând anumite măsuri pentru evitarea sarcinilor electrostatice, s'ar putea teoretic merge până la tensiuni ridicate, totuşi wattmetrele se construesc în general numai pentru tensiuni până la circa 650 V. Când curenţii şi tensiunile depăşesc aceste limite, wattmetrele se montează cu ajutorul transformatorilor de măsură de intensitate şi de tensiune, care reduc curentul în bobina de curent a wattmetrului la maximum 5 A, iar tensiunea la valoarea de 100 V.

Se deosebesc următoarele montaje:

— montajul semi-indirect, cu transformator de intensitate

— montajul semi-indirect, cu transformator de tensiune;

— montajul indirect cu transformator de curent şi de tensiune.

135. Montajul semi-indirect cu transformator de intensitate In acest montaj bobina de curent a wattmetrului este legată pe secundarul transformatorului, bobina de tensiune fiind legată direct în derivaţie pe reţea.

Pentru ca wattmetrul să dea indicaţii în sensul normal al cadranului, bornele transformatorului — primare şi secundare — sunt marcate cu litere similare (de exemplu L_1, L_2 respectiv l_1, l_2), legătura la reţea a transformatorului şi a wattmetrului făcându-se în modul următor: unul din conductori este legat la borna primară L_1, borna secundară l_1 este legată la borna polarizată a bobinei de curent a wattmetrului, iar borna polarizată a bobinei de tensiune a wattmetrului se leagă la conductorul de mai sus, fie la borna L_1 (montaj amonte), fie la borna L_2 (montaj aval), ca în fig. 110.

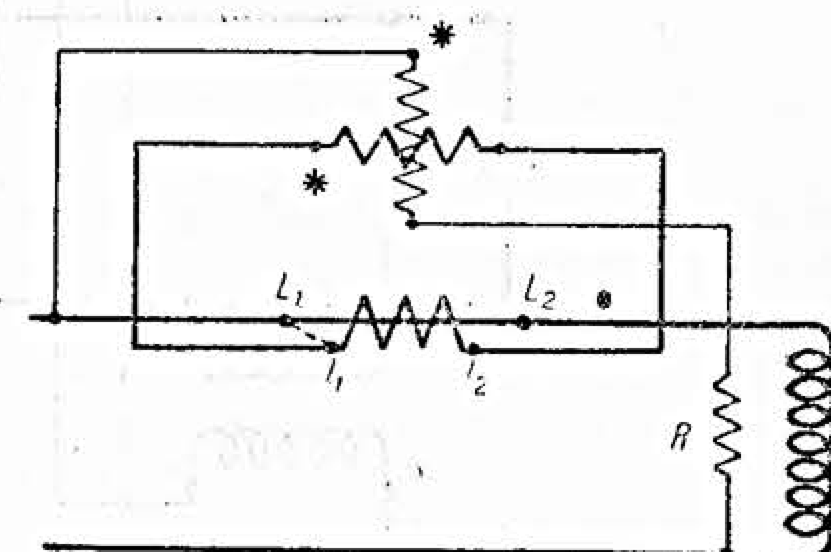


Fig. 110 — Montaj semi-indirect al unui wattmetru cu transformator de intensitate.

Pentru a aduce bobina de intensitate la acelaşi potenţial cu bobina de tensiune, se face legătură între borna l_1 a secundarului transformatorului şi borna primară L_1.

136. **Montajul semi-indirect cu transformator de tensiune.** In acest montaj bobina de tensiune a wattmetrului este legată pe secundarul transformatorului de tensiune, bobina de curent fiind legată direct în serie cu reţeaua.

Bornele primare şi secundare ale tranformatorului sunt marcate cu litere similare U, V, respectiv u, v; legătura wattmetrului se face în modul următor:

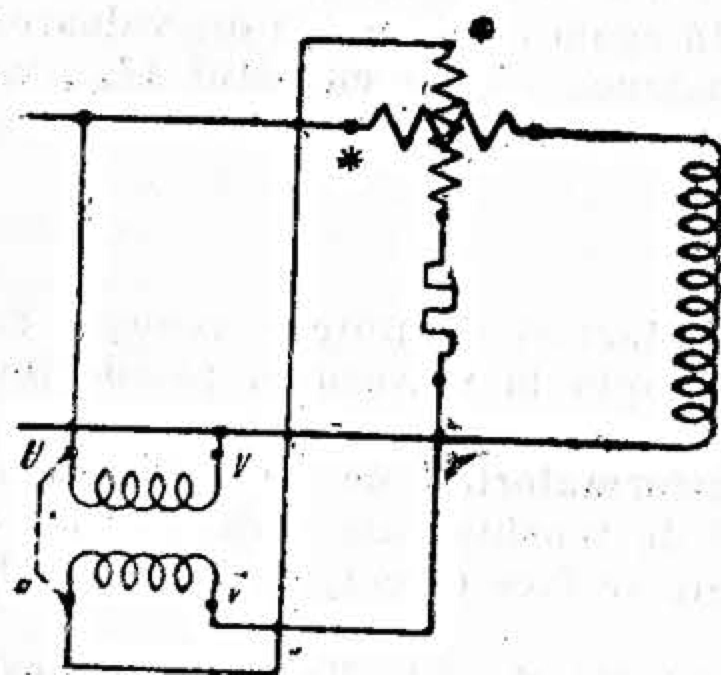


Fig. 111. — Montaj semi-indirect al unui wattmetru cu transformator de tensiune.

Borna U a primarului se leagă la conductorul reţelei care este legat cu borna polarizată a bobinei de curent a wattmetrului, iar borna secundară corespunzătoare u se leagă la borna polarizată a bobinei de tensiune, ca în fig. 111. Şi aici, pentru motivele arătate mai sus, borna secundară u a transformatorului se leagă cu borna primară U.

137. **Montajul indirect.** In acest montaj bobina de curent a wattmetrului se montează pe un transformator de intensitate, iar bobina de tensiune pe un transformator de tensiune, legăturile executându-se cum se arată în fig. 112.

Ca măsură de protecţie, o bornă a transformatorului de curent l_1 şi borna corespunzătoare a transformatorului de tensiune u sunt legate împreună la pământ. Prin aceasta se realizează totodată şi o diferenţă de potenţial nulă între cele două bobine ale wattmetrului.

Observaţie. Măsurarea indirectă a puterii are marele avantaj că permite utilizarea pentru diverse măsurători a unui singur wattmetru de precizie, cu bobina de curent pentru 5 A şi bobin de tensiune pentru 100 V.

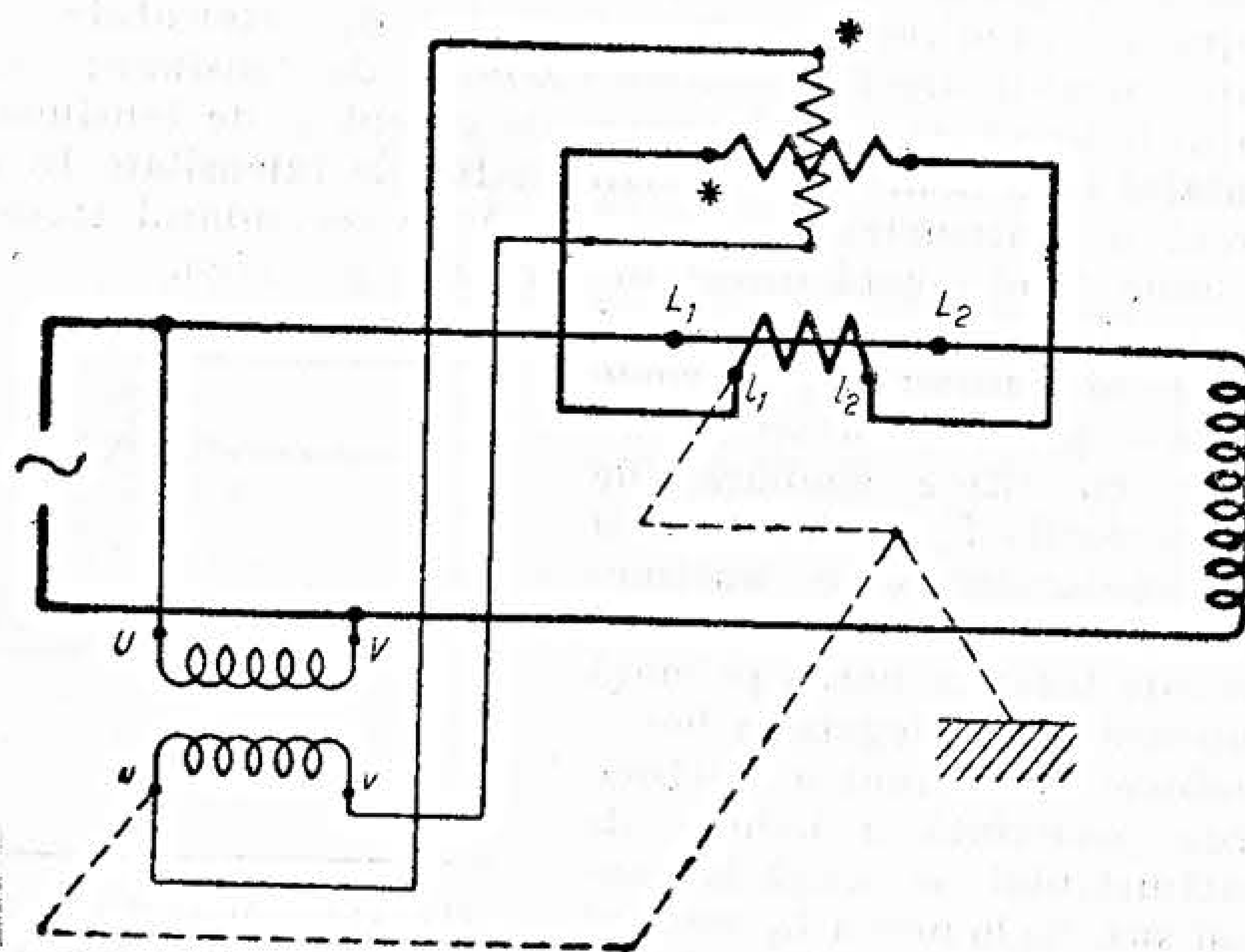


Fig. 112. — Montaj indirect al unui wattmetru.

138. **Constanta wattmetrului montat pe transformatori de măsură.** In cazul montajului semi-indirect cu transformator de intensitate, k fiind constanta

wattmetrului, K_i raportul de transformare al transformatorului de intensitate şi α indicaţia în diviziuni a wattmetrului, puterea măsurată P_m va fi:

$$P_m = K \cdot K_i . \alpha,$$

rezultând constanta globală $K' = K \cdot K_i$.

In cazul montajului semi-indirect cu transformator de tensiune, cu raportul de transformare K_u

$$P_m = K \cdot K_u \cdot \alpha$$

cu constanta globală $K' = K \cdot K_u$.

In cazul montajului indirect, cu transformator de intensitate şi transformator de tensiune, cu rapoartele de transformare K_i, respectiv K_u:

$$P_m = K \cdot K_i \cdot K_u \cdot \alpha$$

cu constanta globală $K' = K \cdot K_i \cdot K_u$.

139. **Erorile în măsurarea puterii monofazate cu ajutorul wattmetrelor montate pe transformatori de măsură.** Dacă:

ε_i = eroarea de raport (de curent) a transformatorului de intensitate;
δ_i = eroarea de unghi a transformatorului de intensitate;
ε_u = eroarea de raport (de tensiune) a transformatorului de tensiune;
δ_u = eroarea de unghi a transformatorului de tensiune,

eroarea relativă comisă la măsurarea puterii într'un circuit monofazat cu decalajul φ este:

$$\varepsilon_P = \frac{\Delta P}{P} = \varepsilon_i + \varepsilon_u - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}(\delta_u - \delta_i) = \varepsilon_i + \varepsilon_u - 0{,}029\,(\delta_u - \delta_i) \operatorname{tg}\varphi$$

δ_u şi δ_i fiind exprimate în minute.
In această expresie toate erorile de raport şi de unghi se vor pune cu semnele lor, decalajul φ al reţelei considerându-se pozitiv când curentul este în urma tensiunii şi negativ în caz contrar.

140. **Măsurarea puterii active în circuitele polifazate.** Pentru măsurarea puterii active consumate de un receptor alimentat de o reţea polifazată cu n conductori, se aplică o metodă generală denumită *metoda celor n wattmetre*, cu un caz particular: *metoda celor n — 1 wattmetre.*

141. **Metoda celor n wattmetre.** Pentru măsurarea puterii active, cele n wattmetre se montează astfel, încât bobinele lor de curent să fie legate în serie pe fiecare din cei n conductori, (şi anume dela sursă intrându-se în borna polarizată a bobinei de curent), iar bobinele lor de tensiune să fie legate cu o extremitate (şi anume cu borna polarizată) la conductorul de pe faza respectivă la care este legată bobina de curent, iar cu cealaltă extremitate la un acelaşi punct O, căruia i se poate da orice potenţial U_0.

Dacă $i_1, i_2 \ldots i_n$ reprezintă curenţii din cei n conductori, $u_1, u_2 \ldots u_n$ potenţialele celor n conductori faţă de o origine a potenţialelor, iar u_0 potenţialul

punctului comun O al extremităţilor bobinelor de tensiune, teorema de faţă se exprimă astfel:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (u_1 - u_0)\, i_1\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T (u_2 - u_0)\, i_2\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T (u_n - u_0)\, i_n\, dt;$$

$$P = U_{10}\, I_1 \cos\varphi_{10} + U_{20}\, I_2 \cos\varphi_{20} + U_{no}\, I_n \cos\varphi_{no};$$

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n;$$

$P_1, P_2 \ldots P_n$ fiind puterile active măsurate de cele n wattmetre.

Dacă potenţialul U_0 al punctului comun O variază, indicaţiile $P_1, P_2 \ldots P_n$ ale wattmetrelor variază şi ele, însă suma acestor indicaţii ΣP_n rămâne constantă şi egală cu puterea polifazată.

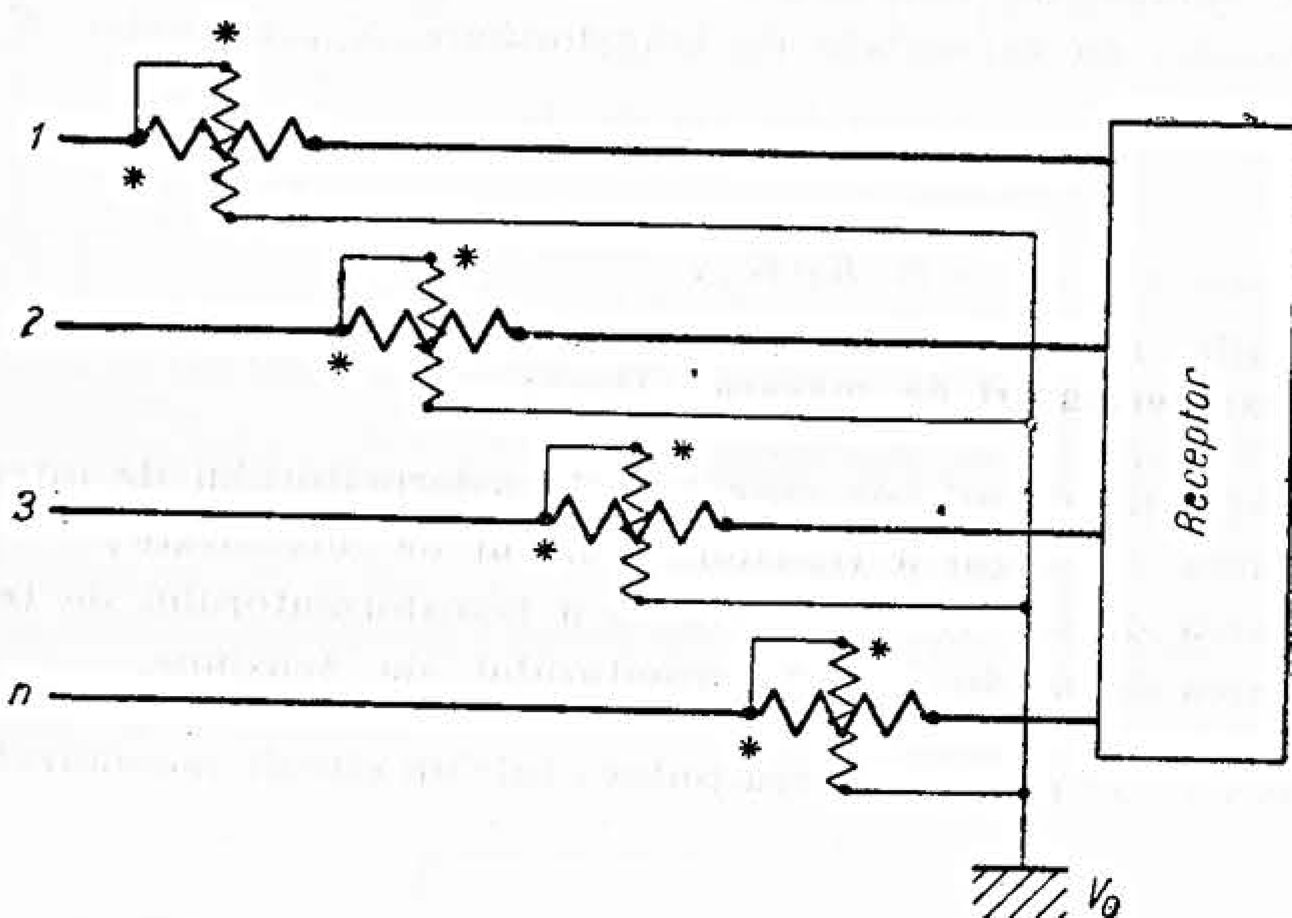


Fig. 113. – Metoda celor n wattmetre.

142. Metoda celor $n - 1$ wattmetre. Metoda derivă din aceea de mai sus, numai că se dă punctului comun O potenţialul unui conductor oarecare din cei n conductori (de exemplu conductorul n), adică se leagă punctul comun la faza n-a.

În acest caz, ultimul wattmetru W_n nu mai dă nicio indicaţie, bobina lui de tensiune fiind supusă la o tensiune nulă, astfel încât el se poate scoate din circuit; numărul wattmetrelor este deci redus la $n - 1$ şi bobinele lor de tensiune sunt supuse acum diferenţelor de potenţial $u_1 - u_n$, $u_2 - u_n$, etc.

Suma puterilor indicate de aceste wattmetre reprezintă aceeaşi putere polifazată P ca mai sus:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (u_1 - u_n)\, i_1\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T (u_2 - u_n)\, i_2\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T (u_{n-1} u_n)\, i_{n-1}\, dt$$

$$P = U_{1n}\, I_1 \cos\varphi_{1n} + U_{2n}\, I_2 \cos\varphi_{2n} + \ldots + U_{n-1,\,n}\, I_{n-1} \cos\varphi_{n-1,\,n}.$$

143. Variantele metodei celor $n - 1$ wattmetre. Există n variante ale acestei metode, după cum punctul comun O se leagă la unul sau la altul din cei n conductori, denumit conductorul sau faza de referinţă.

Astfel, luând conductorul 3 ca fază de referinţă, se obţine situaţia din fig. 115, în care suma indicaţiilor celor $n - 1$ wattmetre dă iarăşi puterea polifazată P.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (u_1 - u_3)\, i_1\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T (u_2 - u_3)\, i_2\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T (u_4 - u_3)\, i_4\, dt + \cdots + \frac{1}{T}\int_0^T (u_n - u_3)\, i_n\, dt;$$

$$P = U_{13}\, I_1 \cos\varphi_{13} + U_{23}\, I_2 \cos\varphi_{23} + \ldots + U_{n3}\, I_n \cos\varphi_{n3}.$$

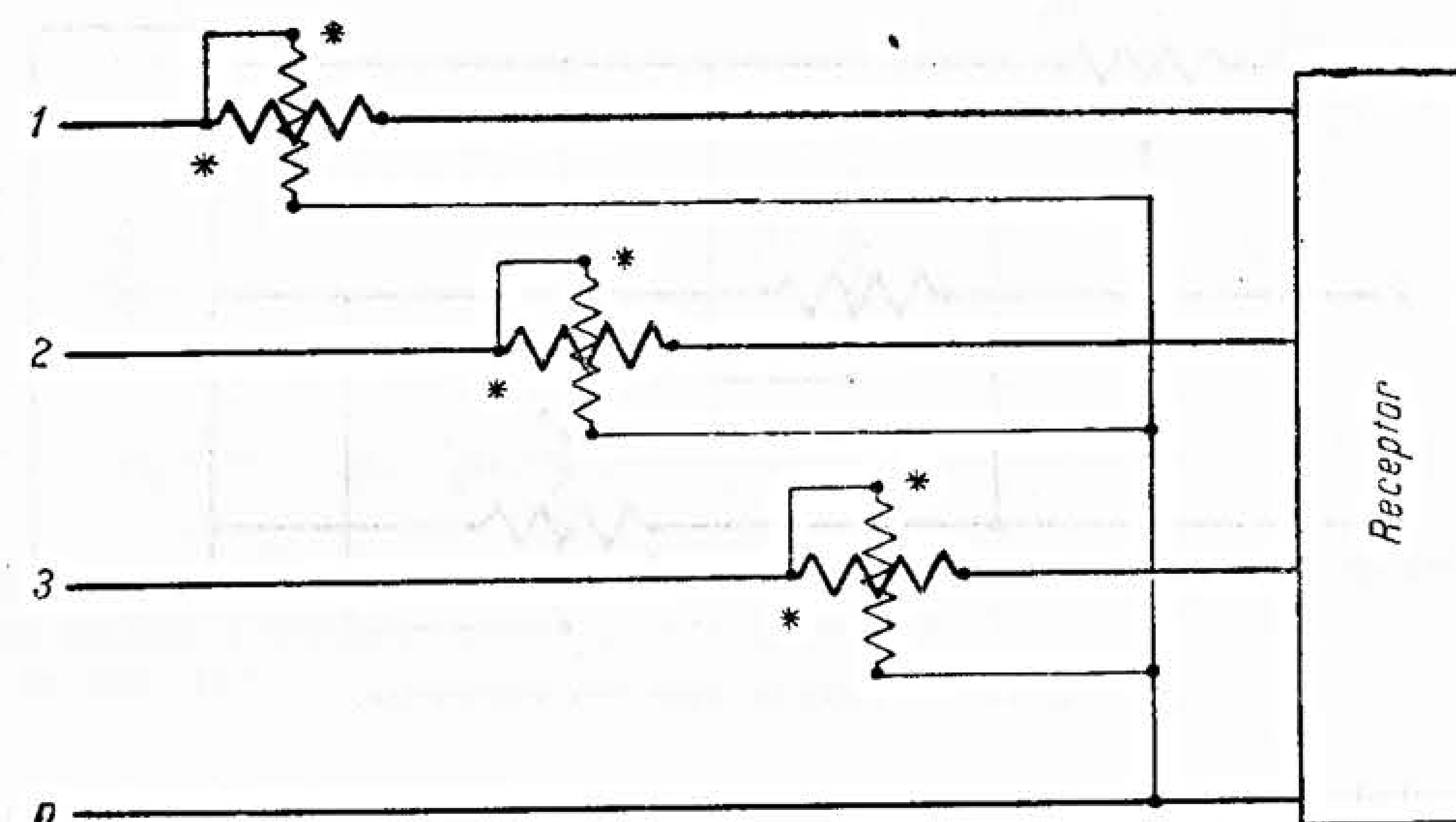


Fig. 114. – Metoda celor $n-1$ wattmetre.

Observaţii. – Metoda de mai sus este valabilă oricare ar fi potenţialele $u_1 \ldots u_n$ ale conductorilor şi oricare ar fi valorile curenţilor $i_1 \ldots i_n$ absorbiţi de receptori, adică oricare ar fi nesimetria tensiunilor şi desechilibrul curenţilor.

– Una sau mai multe din indicaţiile celor n sau $n - 1$ wattmetre pot fi negative, adică acul acestora se poate mişca în sensul invers al cadranului, bătând împotriva opritorului.

Pentru a citi deviaţiile unuia din aceste wattmetre, se inversează legăturile la bobina sa de tensiune, iar valoarea puterii respective se trece cu semnul minus în suma $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$.

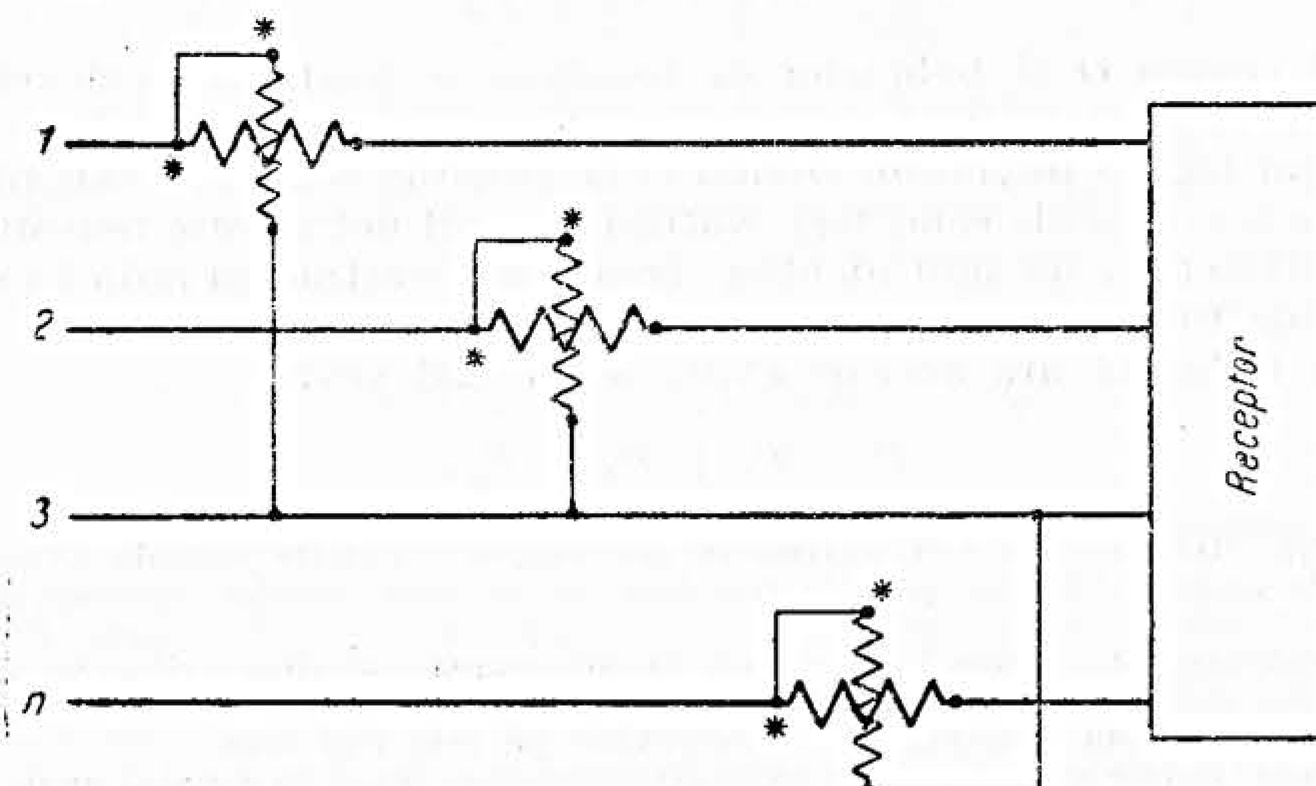


Fig. 115. – Metoda celor $n-1$ wattmetre cu faza a treia ca fază de referinţă.

144. Măsurarea puterii active în circuitele trifazate fără fir neutru. Conform teoremei generale de mai sus, puterea trifazată se va putea măsura prin metoda celor trei wattmetre sau prin metoda celor două wattmetre.

145. Metoda celor trei wattmetre. Montajul este acela din fig. 116. Polaritatea wattmetrelor trebue riguros observată: conductorii de alimentare se leagă la bornele polarizate ale bobinelor de curent ale celor trei wattmetre, iar bornele polarizate ale bobinelor de tensiune se leagă la aceiaşi conductori ca şi bobinele de curent.

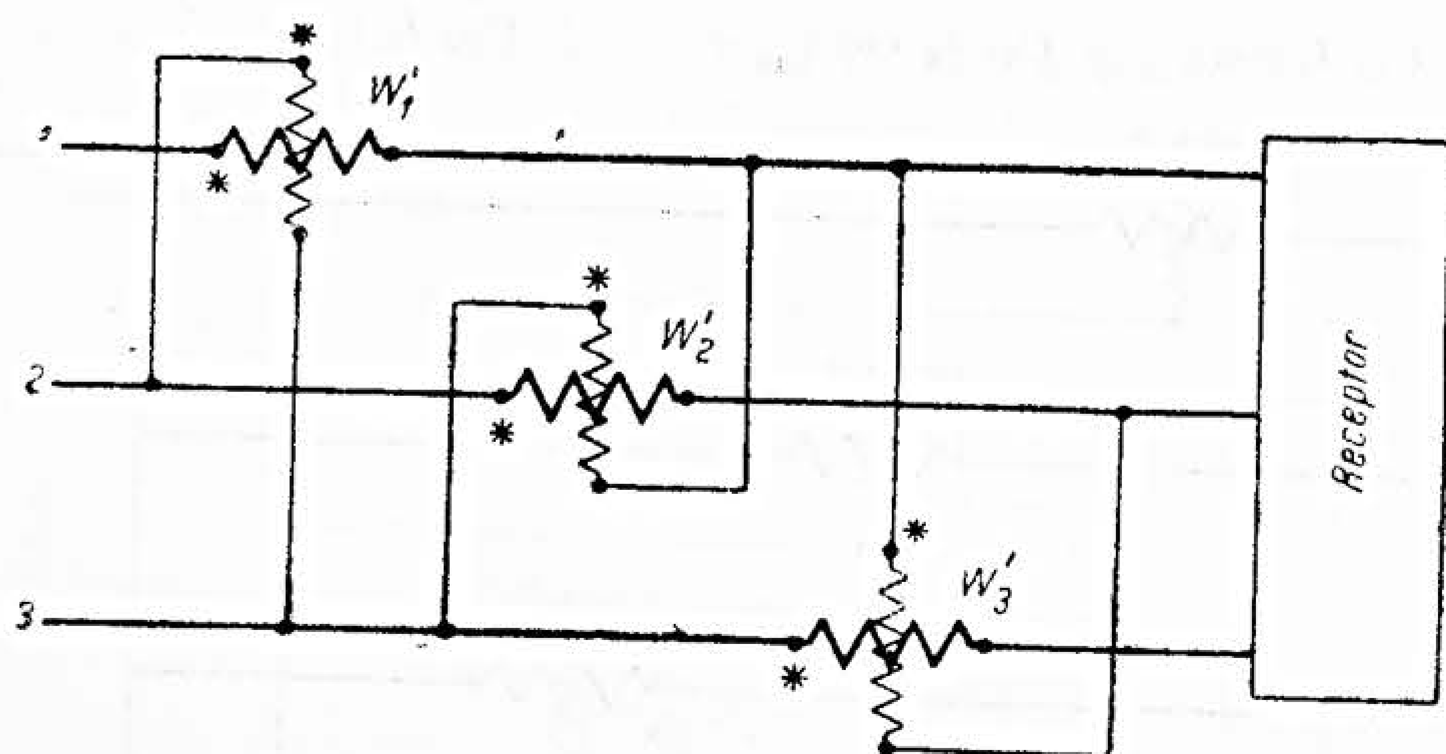


Fig. 116. — Metoda celor trei wattmetre.

Punctul comun O al bobinelor de tensiune, putând avea orice potenţial, se poate lăsa liber; el ia dela sine un anumit potenţial, care depinde de mărimea rezistenţelor R_1, R_2, R_3 ale bobinelor de tensiune, incluziv rezistenţele adiţionale. Astfel, dacă aceste rezistenţe sunt egale, adică dacă wattmetrele sunt identice, punctul neutru O se găseşte în centrul de greutate al triunghiului tensiunilor dintre faze, astfel că tensiunile aplicate bobinelor de tensiune ale wattmetrelor sunt tensiunile simple ale reţelei presupusă simetrică.

Dacă P_1, P_2 şi P_3 sunt indicaţiile celor trei wattmetre, puterea trifazată este reprezentată de suma acestor trei puteri:

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Punctul comun O al bobinelor de tensiune se poate deasemenea lega şi la punctul neutru al sarcinii, dacă aceasta este legată în stea, ca în fig. 117.

Avantajul legării punctului comun O la punctul neutru al sarcinii este acela că bobinele de tensiune ale celor trei wattmetre sunt net supuse tensiunilor stelate, chiar dacă wattmetrele nu sunt identice, iar fiecare wattmetru indică exact puterea care corespunde fiecării faze în parte.

Puterea trifazată are aceeaşi expresie ca mai sus:

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Observaţii. Metoda celor trei wattmetre are asupra celorlalte metode avantajul că, prin întrebuinţarea de aparate identice pe cele trei faze, se menţine simetria circuitului trifazat respectiv.

Această calitate este îndeosebi preţioasă la măsurarea puterilor trifazate mici, cum este cazul la încercarea motoarelor mici unde metoda celor trei wattmetre este singura aplicabilă, întrucât nu produce niciun desechilibru al curenţilor pe cele trei faze.

In acest caz, bobinele de tensiune ale wattmetrelor se leagă în montaj aval, ca în general în metoda celor trei wattmetre, pentru a se putea face uşor corecţiile consumaţiei bobinelor de tensiune.

In plus, precizia măsurătorilor depinde numai de gradul de precizie al wattmetrelor. Pentru factori de putere reduşi, se obţine o precizie suficientă dacă se întrebuinţează wattmetre pentru factor de putere mic, 0,1 sau 0,2.

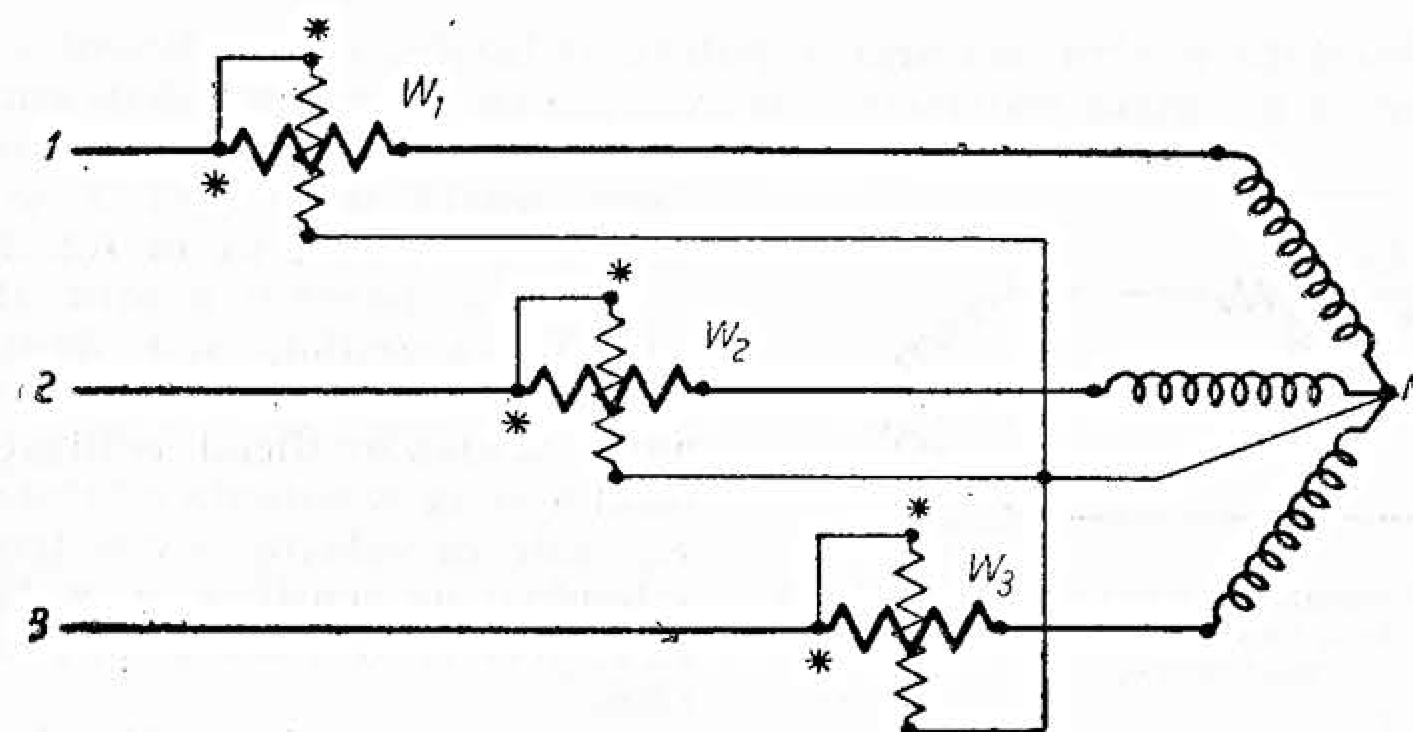


Fig. 117. — Metoda celor trei wattmetre aplicată unui circuit în stea.

146. Montajul celor trei wattmetre cu transformatori de măsură. Şi aici se poate utiliza montajul semi-indirect şi montajul indirect, ultimul fiind reprezentat în fig. 118.

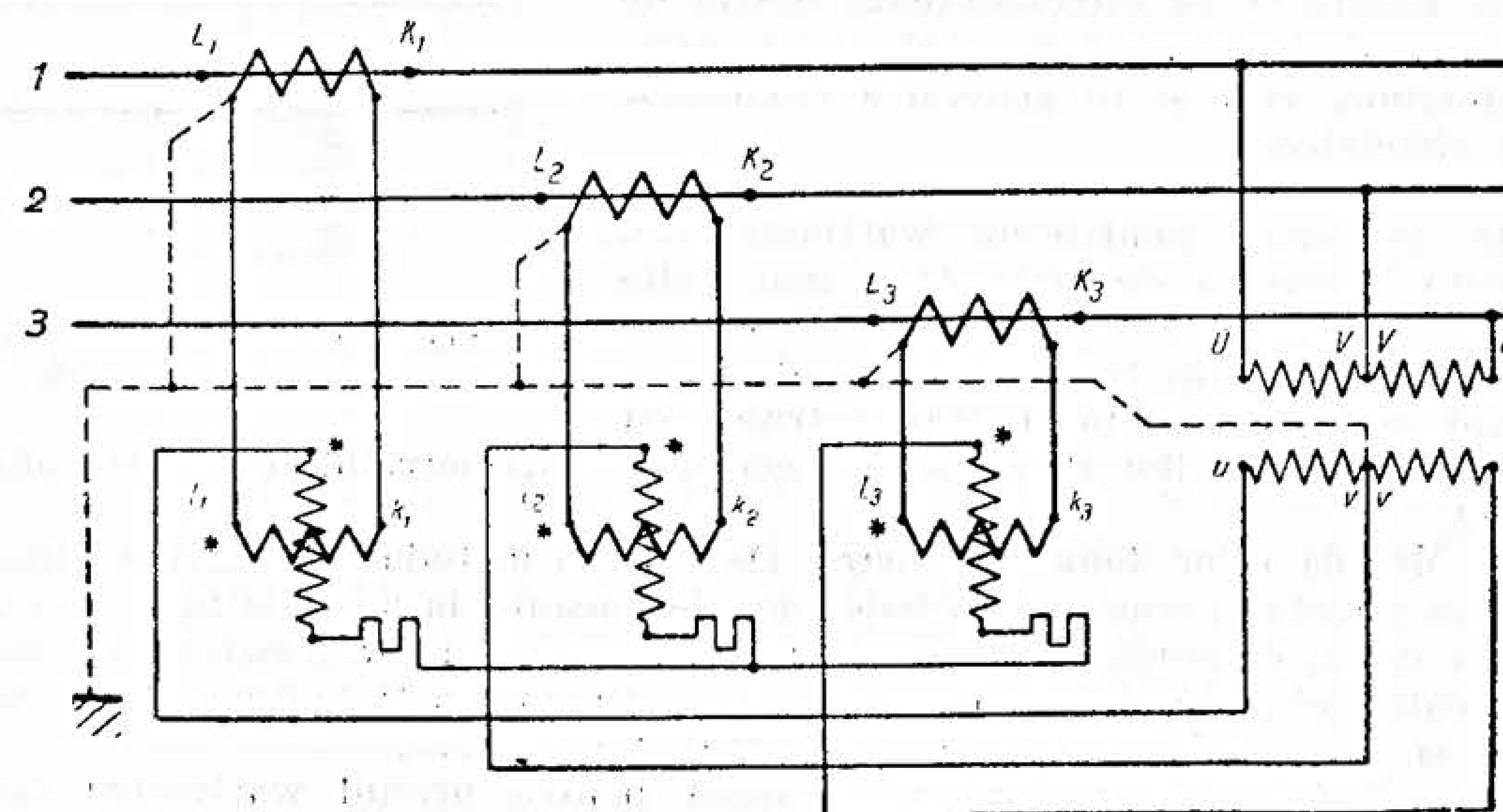


Fig. 118. — Metoda celor trei wattmetre — Montaj indirect.

In acest montaj, în loc de trei transformatori de tensiune sunt utilizaţi numai doi, montaţi în V.

147. Metoda celor trei wattmetre aplicată la circuitele simetrice ca tensiuni şi echilibrate ca curenţi. In acest caz dacă punctul comun O al bobinelor de tensiune este lăsat liber, tensiunile aplicate acestor bobine sunt tensiunile simple ale reţelei care sunt identice, iar curenţii din bobinele de curent sunt deasemenea identici, astfel că cele trei wattmetre dau indicaţii egale ($P_1 = P_2 = P_3$) şi deci

puterea trifazată P este egală cu de trei ori puterea dată de unul din cele trei wattmetre.

$$P = 3\ P_1.$$

In consecinţă pentru măsurarea puterii trifazate, este suficient să se măsoare puterea cu un singur wattmetru, de exemplu cu W_1 cu bobina de curent montată pe faza 1, iar cu bobina de tensiune legată între faza 1 şi punctul neutru al sarcinii, ca în fig. 119.

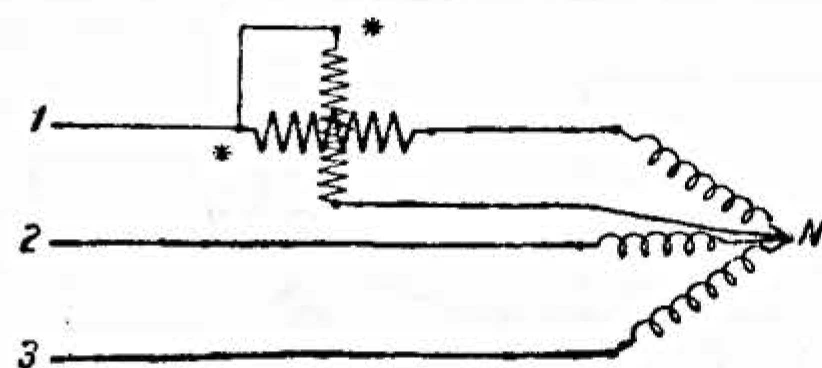


Fig. 119. — Măsurarea puterii trifazate într'un circuit echilibrat cu trei fire, cu un singur wattmetru.

Dacă punctul neutru al sarcinii nu este accesibil, sau dacă sarcina este legată în triunghi, se creează un punct neutru artificial realizat cu ajutorul a două rezistenţe adiţionale R_2 şi R_3 egale ca valoare cu rezistenţa totală a bobinei de tensiune a wattmetrului R_1, inclusiv rezistenţa adiţională (fig. 120).

Puterea trifazată se deduce din diviziunile citite la wattmetru, multiplicate cu constanta acestuia; la stabilirea constantei se ţine seama şi de coeficientul 3 din relaţia $P = 3\ P_1$.

Astfel de wattmetre monofazate, în legătură cu o cutie de rezistenţe adiţionale trifazate, care cuprind şi rezistenţele adiţionale ale bobinei de tensiune a wattmetrului, pentru formarea punctului neutru O, se întrebuinţează destul de des pentru măsurarea puterii motoarelor asincrone, sincrone, etc. şi în general a circuitelor trifazate simetrice.

Fig. 120. — Realizarea unui punct neutru artificial.

In fig. 121 este reprezentată o cutie de rezistenţe adiţionale pentru un wattmetru cu o rezistenţă interioară de 1000 Ω cu mai multe sensibilităţi de tensiune, 120—240—420—600 V, pentru întrebuinţare în trifazat şi monofazat.

Când se face montajul wattmetrului cu ajutorul transformatorilor de măsură, legăturile wattmetrului sunt cele indicate în fig. 122.

148. **Metoda celor două wattmetre.** Derivă din metoda celor trei wattmetre, prin legarea punctului comun O al bobinelor de tensiune la una din faze, de exemplu faza a doua, denumită faza de referinţă, în care caz wattmetrul W_2 nu dă nicio indicaţie, el putând fi scos din circuit. Rămân astfel numai două wattmetre W_1 şi W_3, conform schemei de montaj din fig. 123.

Wattmetrele sunt montate astfel încât pentru primul wattmetru faza 1 este legată la borna polarizată a bobinei de curent, iar bobina de tensiune se leagă cu borna polarizată la faza 1 şi cu cealaltă bornă la faza de referinţă 2, eventual printr'o rezistenţă adiţională exterioară; pentru al doilea wattmetru, borna polarizată a bobinei de curent şi a bobinei de tensiune se leagă la faza 3, iar a doua bornă a bobinei de tensiune la faza de referinţă 2.

Se constată deci că bobinele de tensiune sunt supuse tensiunilor dintre faze U_{12} şi U_{32}.

Puterea trifazată este reprezentată acum de suma algebrică a puterilor P_1 şi P_3 măsurate de cele două wattmetre:

$$P = P_1 + P_3 = U_{12}\ I_1 \cos (U_{12}\ I_1) + U_{32}\ I_3 \cos (U_{32}\ I_3)$$

Dacă wattmetrele indică amândouă în sensul bun, cele două puteri sunt ambele pozitive iar puterea trifazată este suma lor $P = P_1 + P_3$.

Dacă unul din wattmetre, de exemplu W_1 indică în sensul contrar celui normal, adică acul aparatului bate împotriva opritorului, puterea indicată de P_1 este negativă şi pentru a o citi se inversează legăturile la bobina de tensiune a wattmetrului respectiv.

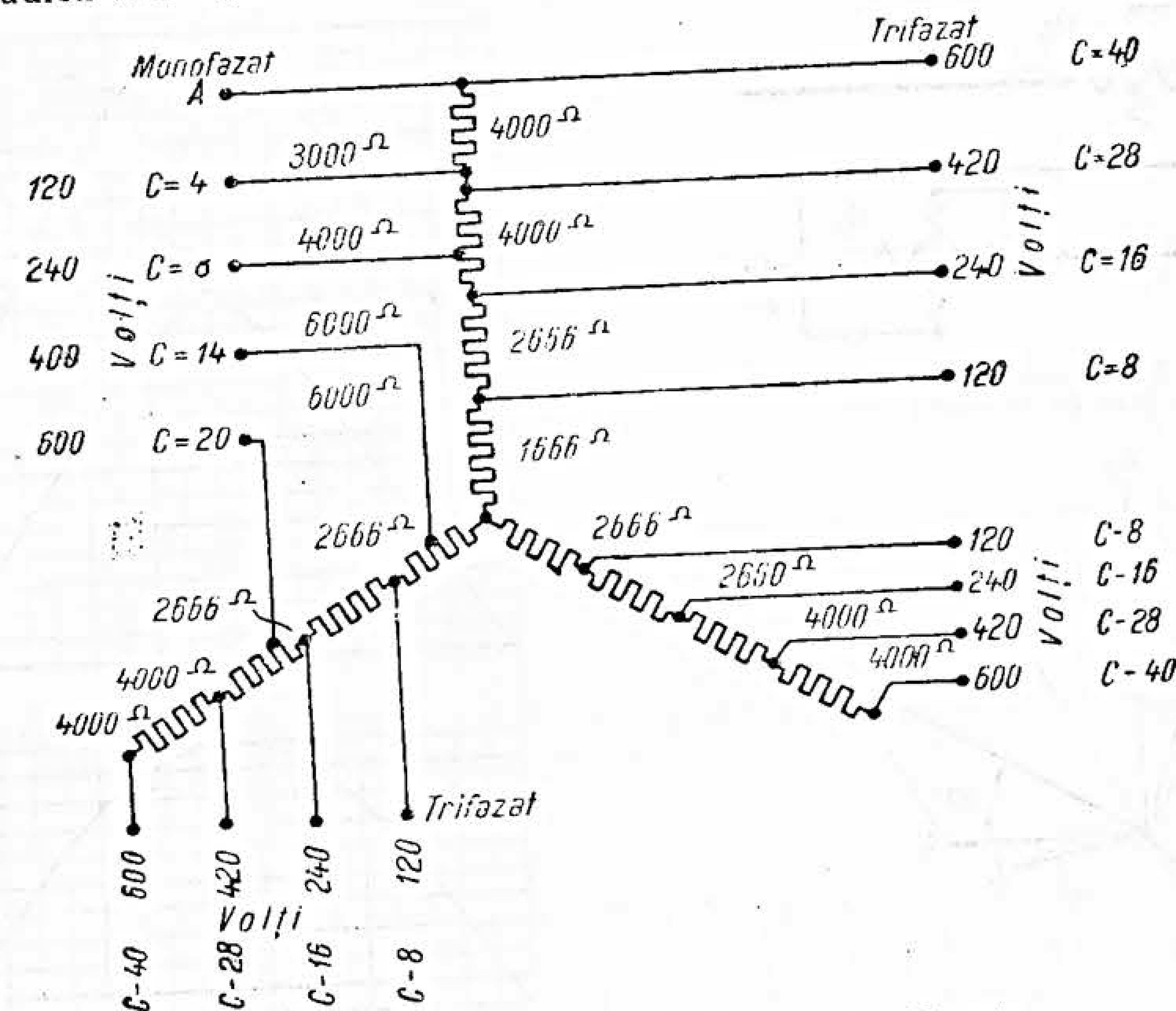


Fig. 121. — Cutie de rezistenţe adiţionale trifazată.

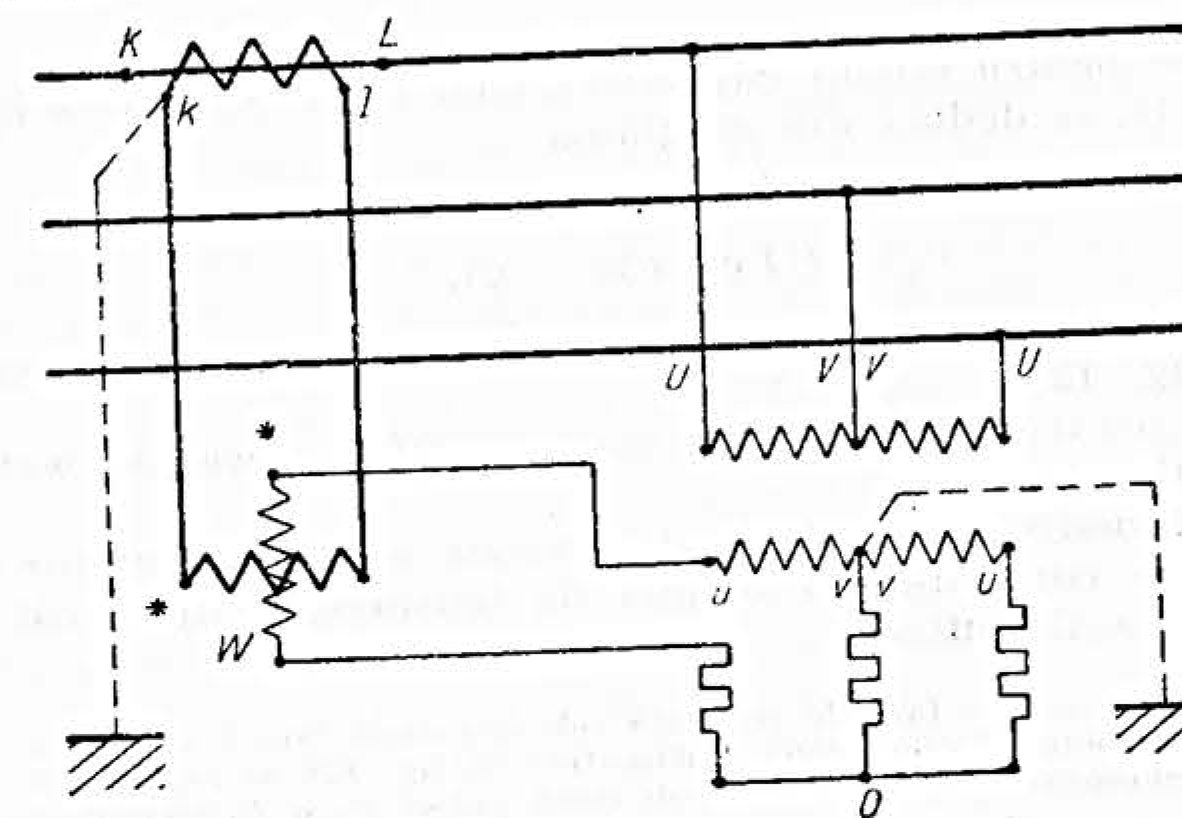


Fig. 122. — Montajul indirect al unui wattmetru pentru măsurarea puterii trifazate într'un circuit simetric şi echilibrat.

Puterea trifazată va fi egală cu diferenţa dintre cele două puteri $P = P_3 - P_1$. Astfel în ipoteza unui circuit trifazat simetric în ce priveşte tensiunile şi echilibrat în ce priveşte curenţii, — în care U, I şi φ sunt respectiv tensiunea între faze, curentul pe fază şi decalajul circuitului (*pozitiv* pentru un circuit

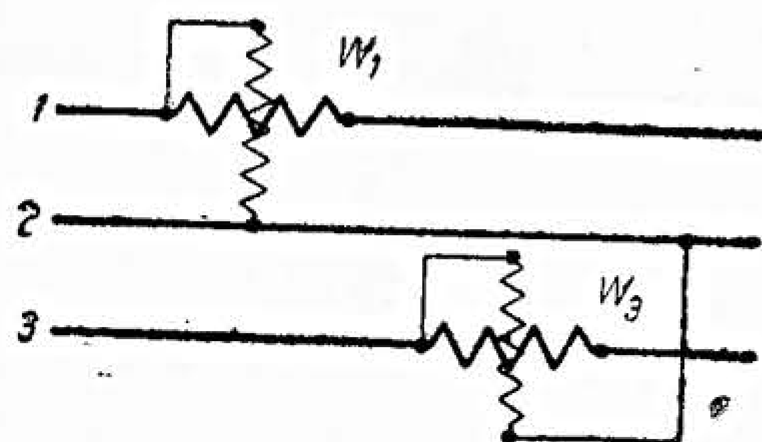


Fig. 123. — Metoda celor două wattmetre, cu faza de referinţă 2.

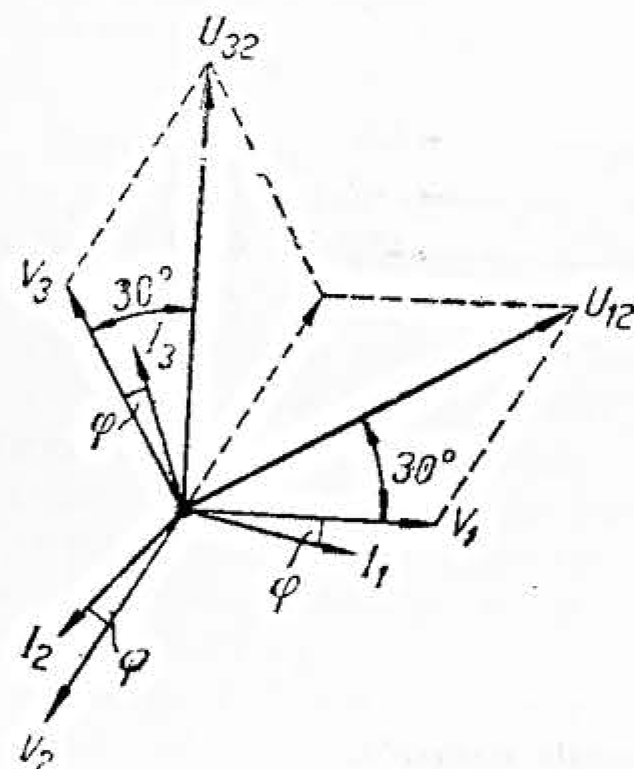


Fig. 124. — Diagrama vectorială a tensiunilor şi curenţilor unui circuit trifazat simetric şi echilibrat.

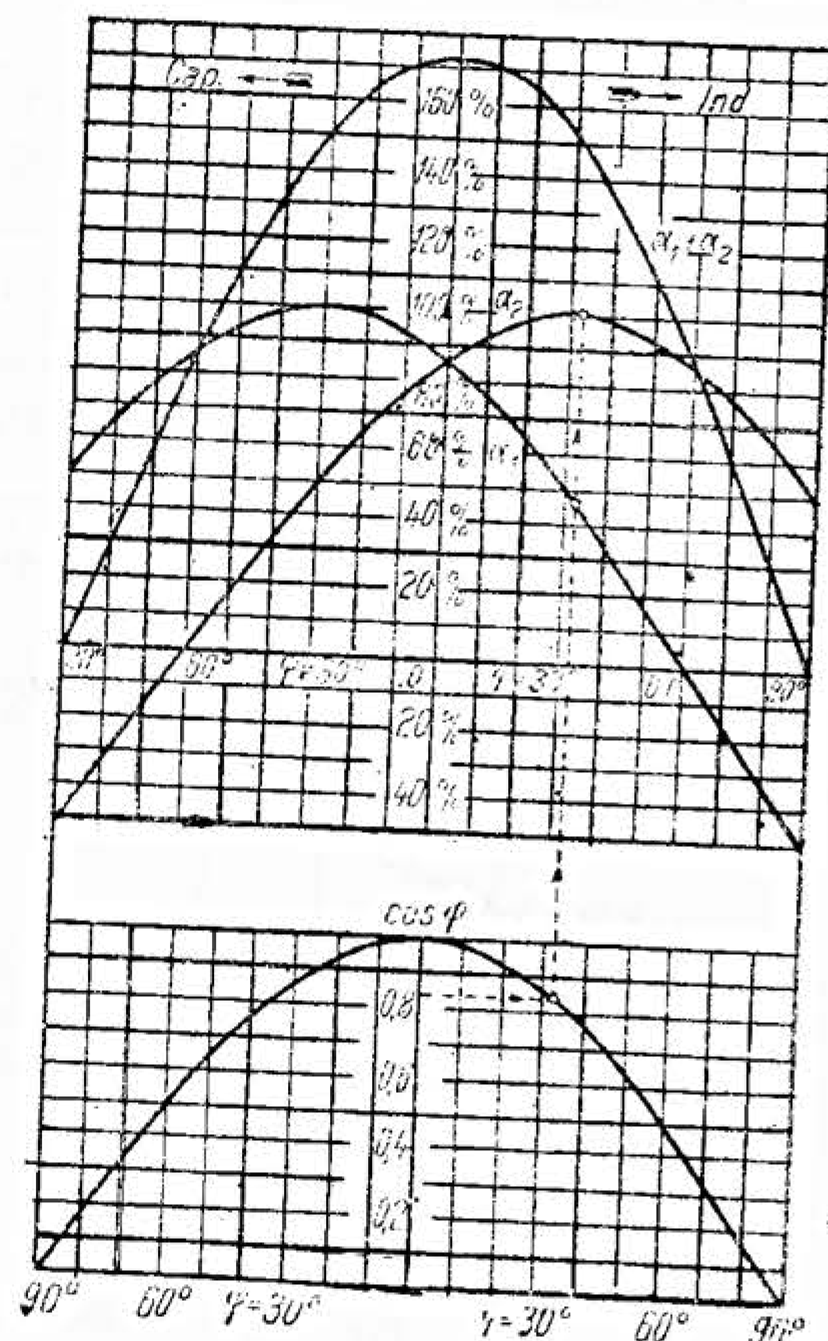


Fig. 125. — Variaţia indicaţiilor wattmetrelor în funcţie de decalajul la măsurarea puterii active prin metoda celor două wattmetre.

inductiv şi *negativ* pentru circuit capacitiv), (fig. 124), — dacă se ia faza a doua ca fază de referinţă, se deduce din diagramă

$$P_1 = UI\cos(30 + \varphi);$$

$$P_3 = UI\cos(30 - \varphi).$$

Variaţia indicaţiilor celor două wattmetre în funcţie de decalajul φ este reprezentată în fig. 125.

Se vede că pentru decalaje mai mari ca 60°, indicaţiile wattmetrului de pe faza 1-a schimbă de sens.

Pentru acest motiv wattmetrele de precizie au un comutator care permite schimbarea sensului curentului în bobina de tensiune, astfel încât să se poată citi valorile negative ale puterii.

Observaţie. Dacă se iau ca faze de referinţă celelalte două faze 1 sau 2, se obţin alte două variante de montaj ale metodei celor două wattmetre; în fig. 126 se reprezintă cea de a doua care este cea mai întrebuinţată şi pentru care cele două puteri P_1 şi P_2 au valorile:

$$P_1 = U_{12} I_1 \cos(U_{12} I_1),$$

$$P_2 = U_{23} I_2 \cos(U_{23} I_2).$$

iar pentru cazul sarcinii şi al reţelei simetrice:

$$P_1 = UI\cos(30 - \varphi),$$

$$P_2 = UI\cos(30 + \varphi).$$

Puterea trifazată este evident:

$$P = P_1 + P_2.$$

149. Determinarea factorului de putere cos φ prin metoda celor două wattmetre. Din indicaţiile celor două wattmetre se deduce relaţia:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2},$$

pentru cazul când se ia faza 3 ca fază de referinţă.

Pentru factorul de putere rezultă valoarea:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\left(\dfrac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\right)^2}}.$$

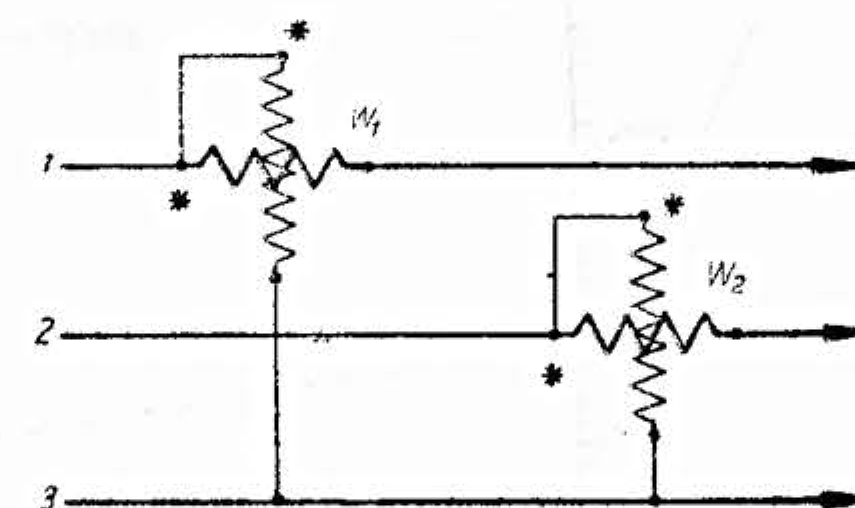


Fig. 126. — Metoda celor două wattmetre cu faza de referinţă 3.

In ambele relaţii valorile lui P_1 şi P_2 pot fi înlocuite chiar cu deviaţiile α_1 şi α_2 citite la cele două wattmetre, în cazul când acestea au aceeaşi constantă.

Astfel:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \text{şi} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\left(\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2}}.$$

In fig. 127 este reprezentată o nomogramă care dă valoarea lui cos φ în funcţie de indicaţiile P_1 şi P_2 (sau α_1 şi α_2) ale celor două wattmetre. P_1 şi P_2 fiind trasate la aceeaşi scară, punctul de întretăiere al dreptei $P_1 P_2$ cu dreapta cosinusurilor, dă valoarea căutată.

150. Montajul celor două wattmetre cu ajutorul transformatorilor de măsură. Şi aici se poate utiliza montajul semi-indirect sau indirect al celor două wattmetre, astfel cum se arată în fig. 128 şi 129.

La montajul semi-indirect cu transformatori de intensitate, bobinele secundare ale transformatorilor de intensitate sunt legate la faza de referinţă, iar pentru ca bobinele mobile ale wattmetrelor să aibă acelaşi potenţial ca bobinele lor de intensitate, rezistenţele adiţionale sunt legate la borna polarizată a bobinelor de tensiune, ca în figură. In acest mod întregul montaj de măsurare are tensiunea fazei de referinţă. La montajul indirect, bobinele secundare ale transformatorilor de intensitate sunt legate la punctul comun al transformatorilor de tensiune montaţi în V. Diferenţa de tensiune dintre bobinele unui wattmetru este în acest caz de 100 V, tensiunea secundară a transformatorilor de tensiune.

151. Avantajele şi desavantajele metodei celor două wattmetre. Avantajul principal constă în aceea că se întrebuinţează numai două aparate, ceeace constitue o soluţie economică şi o simplificare a măsurătorii, deoarece trebue făcute numai două citiri, în loc de trei. In ce priveşte precizia măsurătorilor efectuate cu două wattmetre faţă de cele efectuate cu trei wattmetre, ea este echivalentă, atât timp cât factorul de putere al reţelei nu este mai mic decât cos φ = 0,3. Dacă factorul de putere este prea mic, de exemplu cos φ = 0,1, metoda celor

două wattmetre nu mai dă rezultate acceptabile deoarece diferenţa se face între mărimi foarte apropiate.

152. **Metoda celor două wattmetre aplicată cu ajutorul unui singur wattmetru.** Se poate măsura puterea trifazată prin metoda celor două wattmetre

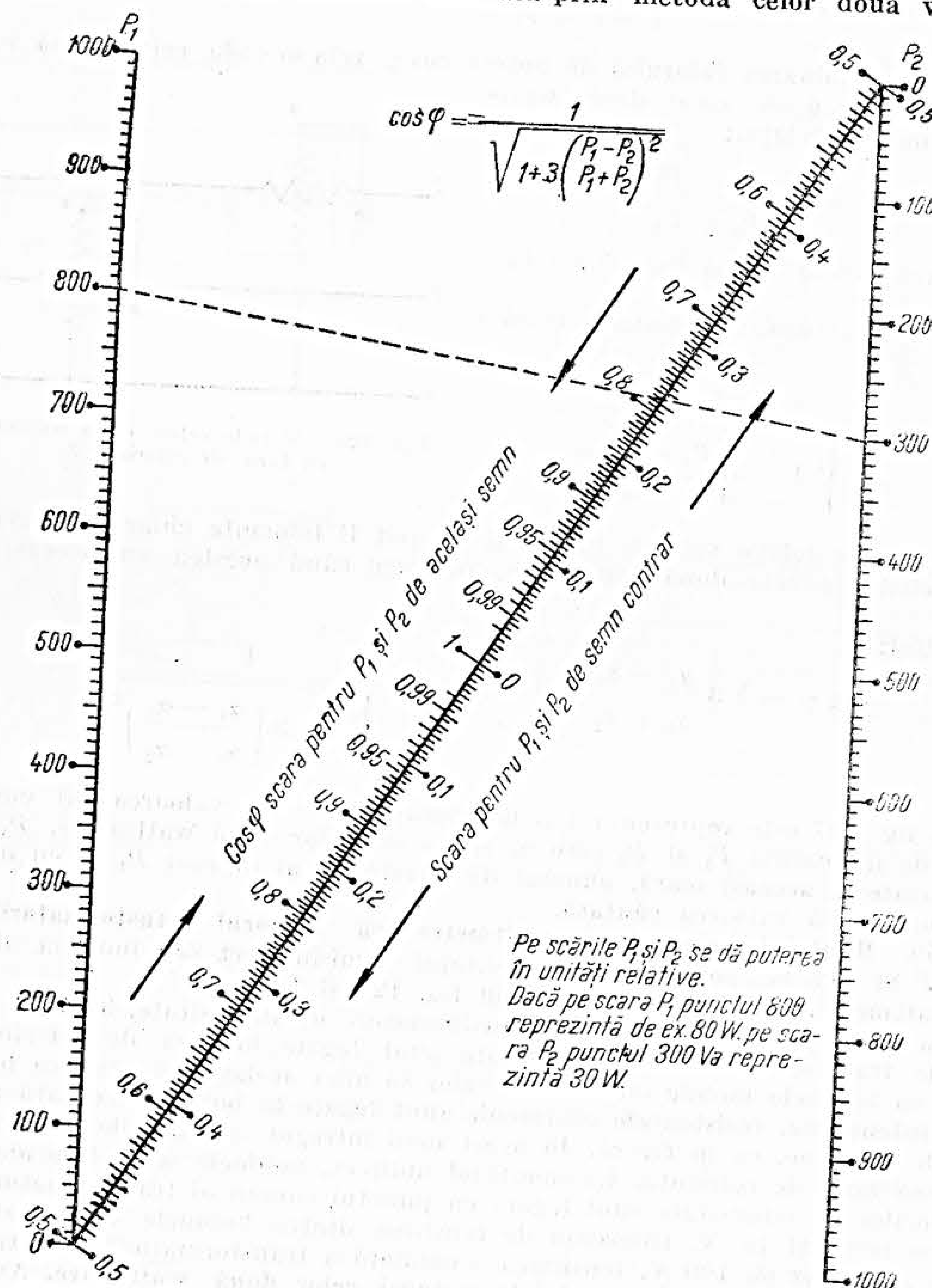


Fig. 127. – Nomogramă dând valoarea lui cos φ în funcţie de indicaţiile celor două wattmetre P_1 şi P_2.

însă cu ajutorul unui singur wattmetru în legătură cu un comutator special (fig. 130), denumit comutator wattmetric. Măsurătoarea se efectuează conform schemei de montaj din fig. 131. Comutatorul wattmetric K are 6 contacte,

dintre care contactele m_1 şi n_1, respectiv m_2 şi n_2, sunt în legătură electrică printr'un dispozitiv de contact special. Acest scurtcircuit se desface când cuţitele comutatorului se pun pe contactele $m_1 n_1$ sau $m_2 n_2$, curentul din fazele 1 respectiv 3 putând trece astfel fără întrerupere prin bobina de curent a wattmetrului W, legată la bornele mediane m şi n ale comutatorului, cu riguroasa observare a polarităţii indicată în figură.

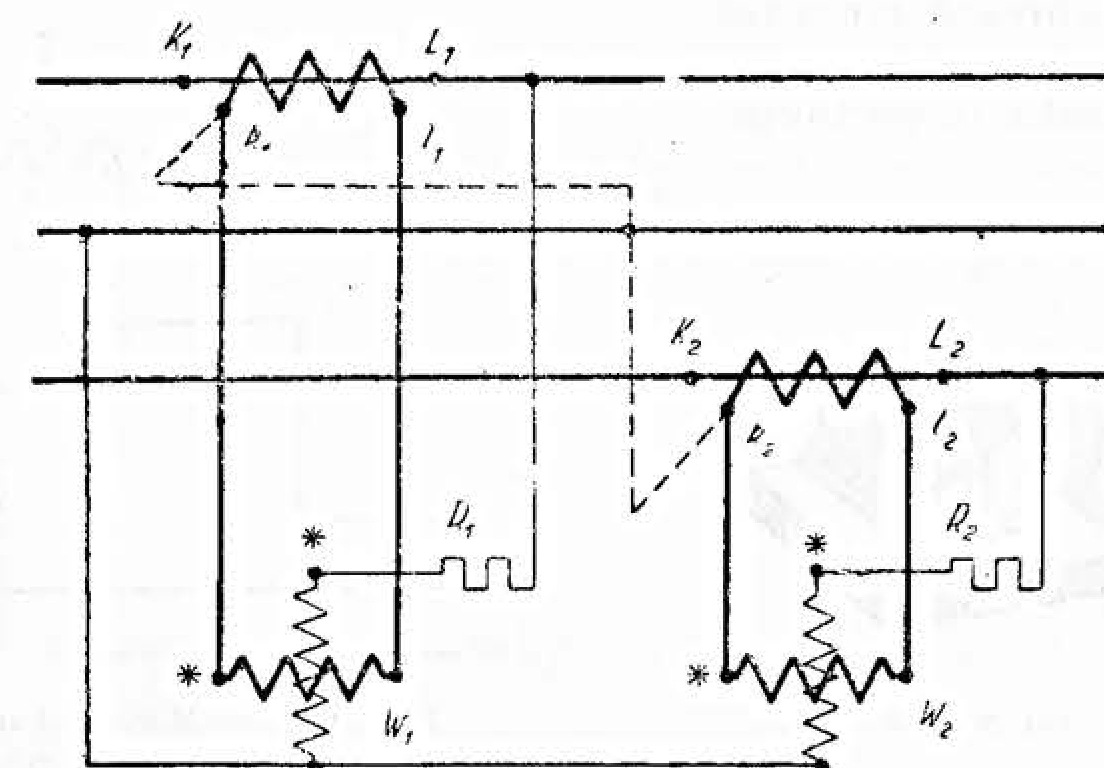


Fig. 128. – Montajul semi-indirect al celor două wattmetre, cu transformatori de intensitate.

Pentru citirea puterii trifazate, se pune comutatorul pe contactele $m_1 n_1$ şi se citeşte astfel puterea

$$P_1 = U_{12} I_1 \cos(U_{12} I_1).$$

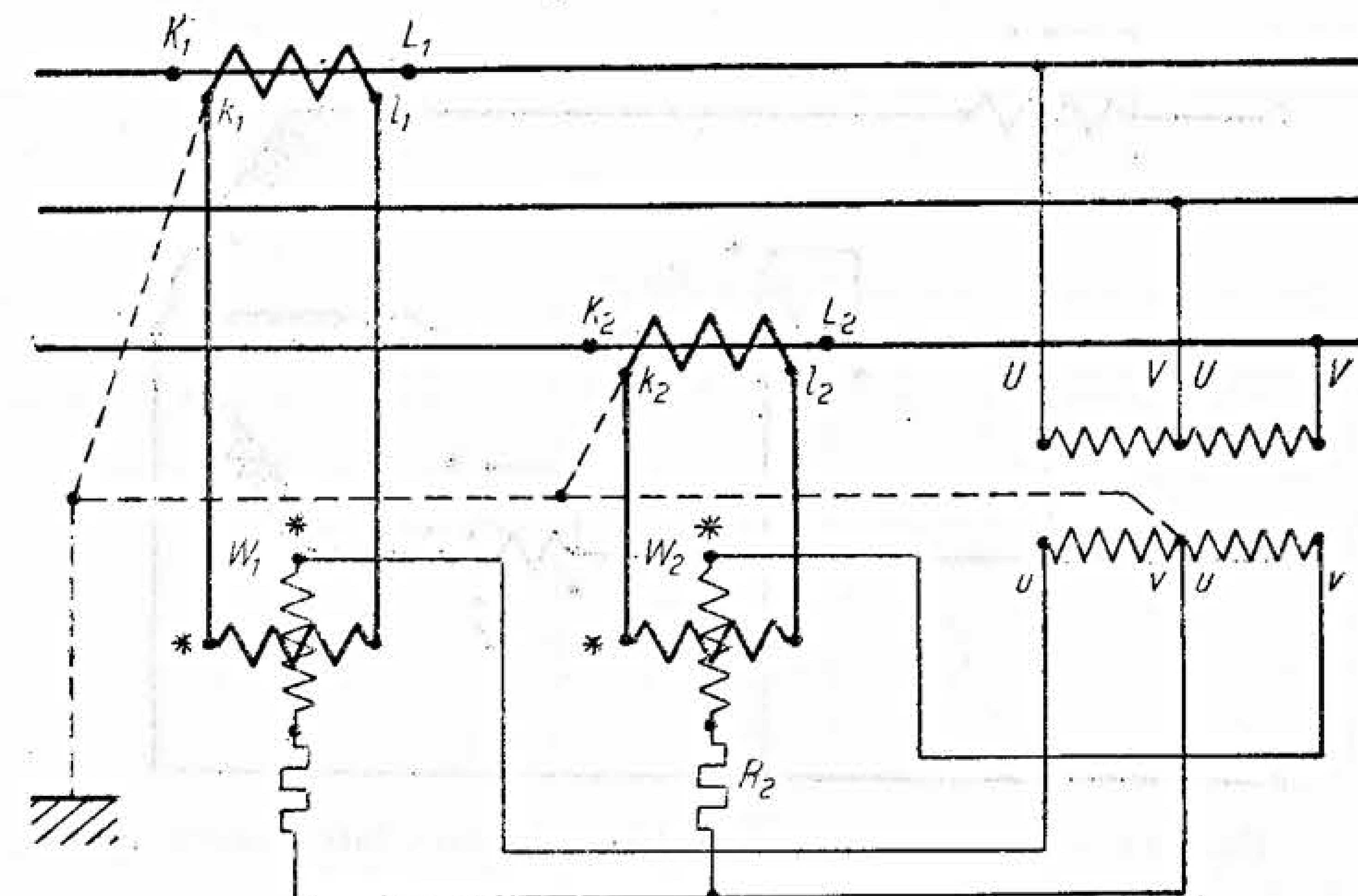


Fig. 129. – Montajul indirect al celor două wattmetre.

Apoi se pune comutatorul pe contactele $m_2 n_2$ şi se citeşte puterea

$$P_3 = U_{32} I_3 \cos(U_{32} I_3).$$

Puterea trifazată va avea valoarea:

$$P = P_1 + P_2.$$

Metoda este foarte întrebuinţată şi are avantajul că cere un singur aparat. Are inconvenientul că nu permite citirea simultană a celor două puteri P_1 şi P_2, ceeace micşorează precizia măsurătorii când sarcina variază între timp, şi că desechilibrează circuitul de măsurare, ceeace pentru cazul puterilor mici prezintă importanţă.

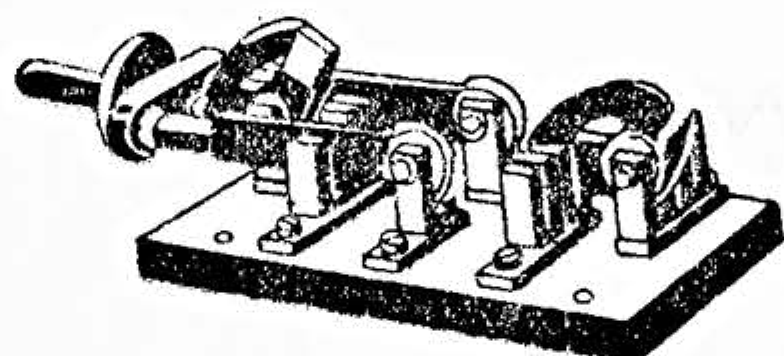


Fig. 130. — Comutator wattmetric.

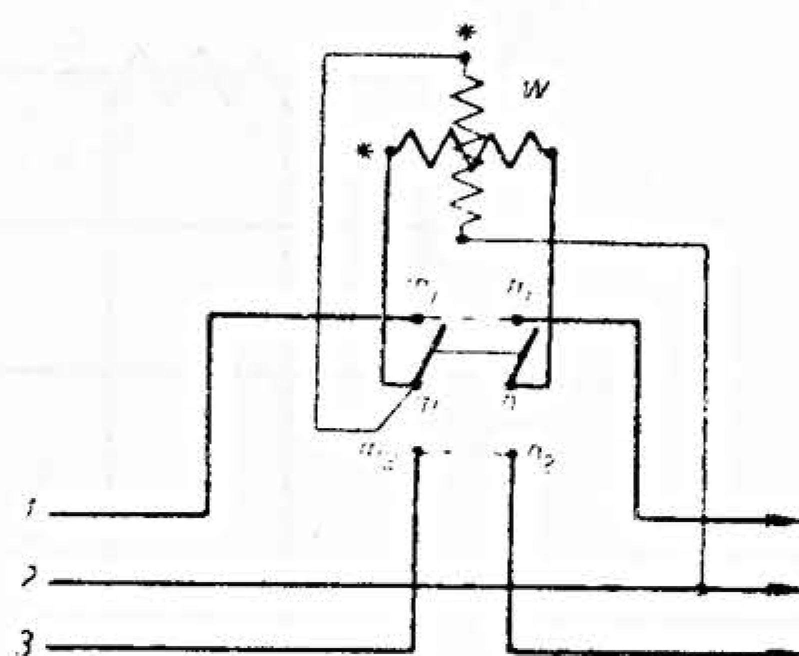


Fig. 131. — Montajul unui wattmetru pe comutator wattmetric.

153. **Măsurarea puterii trifazate active în circuitele cu fir neutru.** Conform schemei generale s'ar putea întrebuinţa patru sau trei wattmetre, ultima soluţie fiind singura întrebuinţată ca fiind cea mai simplă; cele trei wattmetre se montează conform fig. 132, adică bobinele de curent pe cele trei faze, fiind parcurse

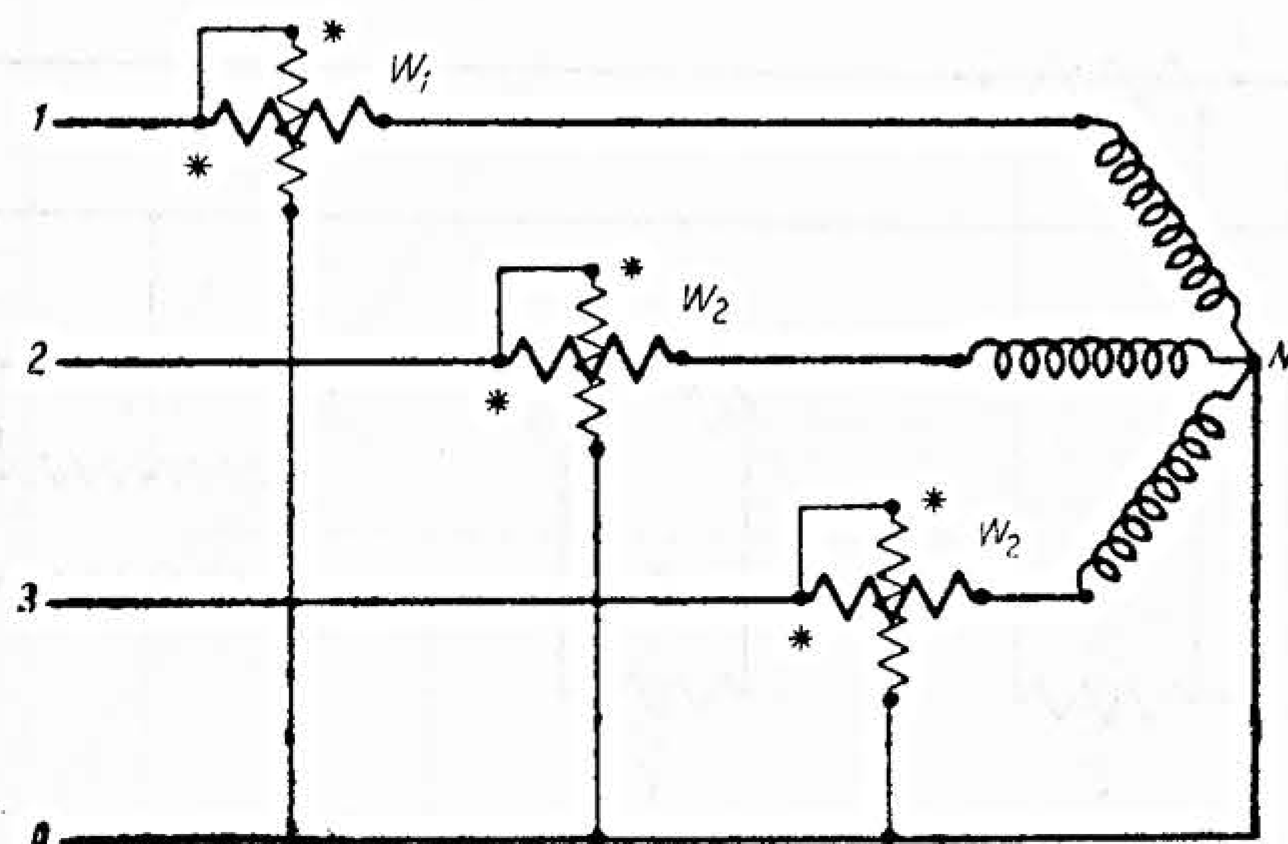


Fig. 132. — Măsurarea puterii cu trei wattmetre, într'un circuit trifazat cu fir neutru.

de curenţii I_1, I_2, I_3, iar bobinele de tensiune fiind montate între fazele respective 1, 2, 3 şi firul neutru O şi supuse astfel tensiunilor simple (pe fază) ale reţelei V_{10}, V_{20}, V_{30}.

Puterile P_1, P_2, P_3, indicate de cele trei wattmetre W_1, W_2, W_3, reprezintă puterile consumate pe fiecare fază în parte, iar puterea trifazată este reprezentată de suma lor:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = V_{10} I_1 \cos(V_{10} I_1) + V_{20} I_2 \cos(V_{20} I_2) + V_{30} I_3 \cos(V_{30} I_3).$$

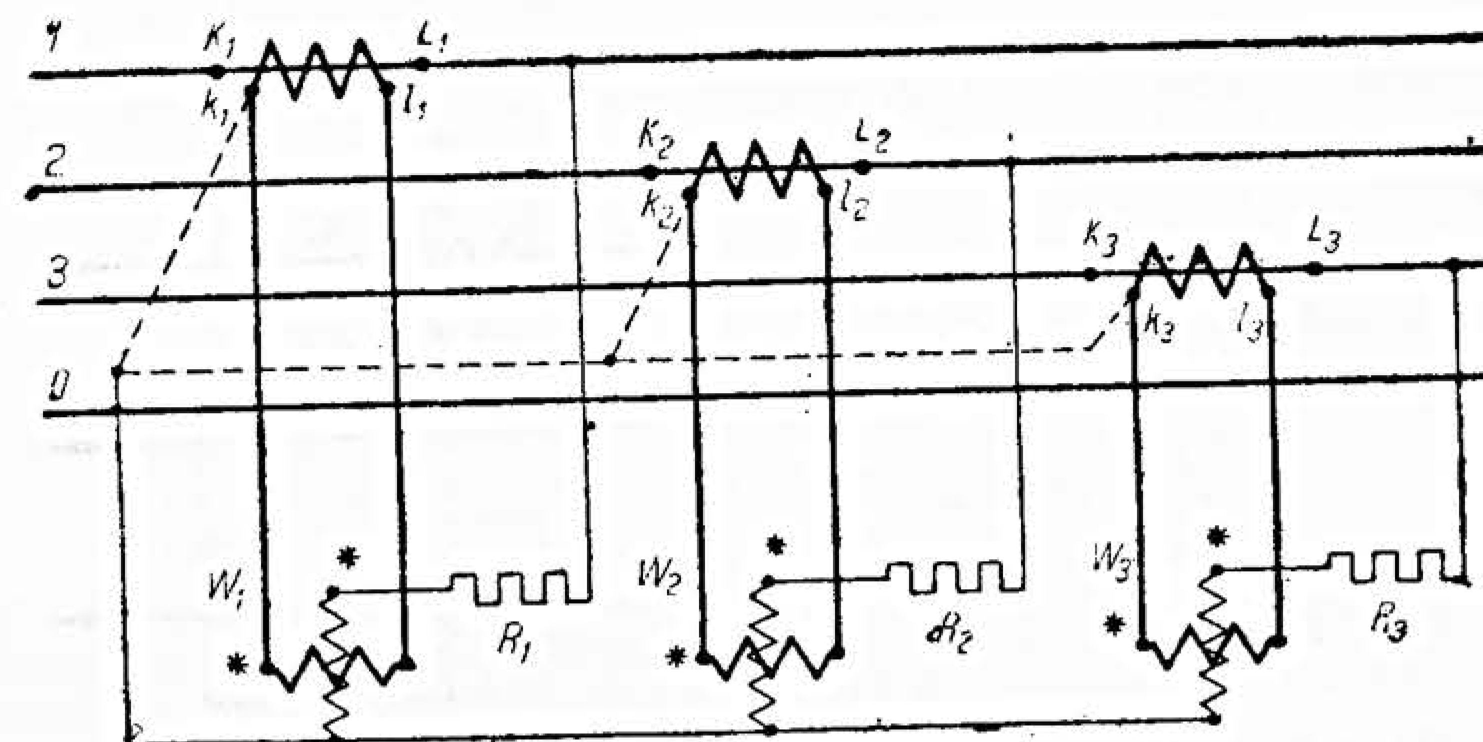


Fig. 133. — Montajul semi-indirect al celor trei wattmetre, pe transformatori de intensitate.

Aici puterile P_1, P_2 şi P_3 sunt totdeauna pozitive şi wattmetrele indică în sensul bun dacă polaritatea indicată pe figură a fost respectată.

In fig. 133 şi 134 s'au reprezentat schemele de montaj ale celor trei wattmetre cu transformatori de măsură.

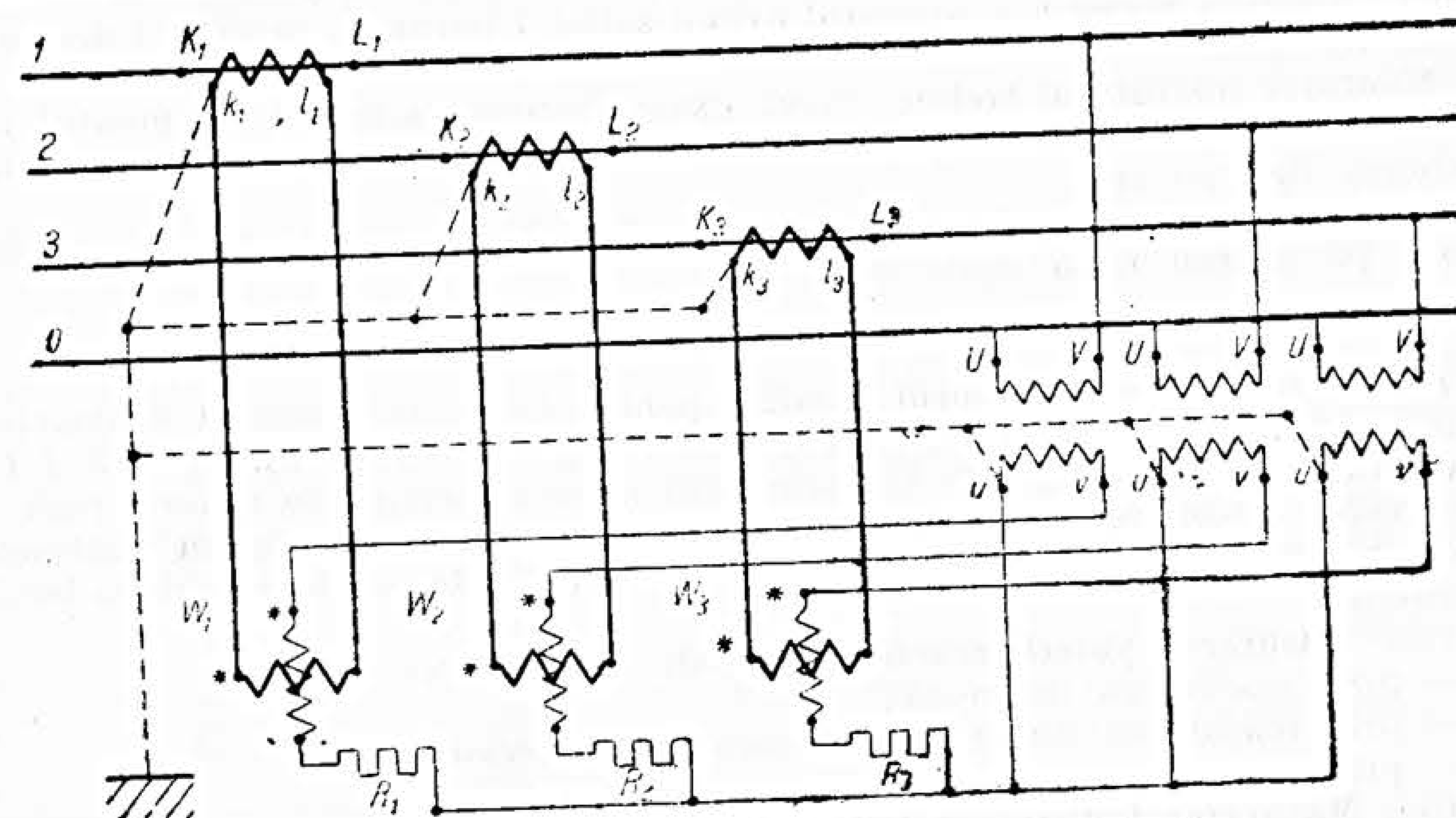


Fig. 134. — Montajul indirect al celor trei wattmetre.

154. **Wattmetre trifazate.** Pentru măsurarea puterii trifazate în circuitele fără fir neutru şi cu fir neutru, se construesc wattmetre trifazate, care sunt com-

puse din câte două, respectiv trei wattmetre monofazate, având bobinele de tensiune cuplate pe acelaşi ax asupra căruia acţionează cuplurile datorite celor două sau trei wattmetre; indicaţiile aparatelor sunt direct proporţionale cu puterea trifazată.

In fig. 135 şi 136 este reprezentat un wattmetru trifazat, denumit şi wattmetru dublu, pentru circuite trifazate fără fir neutru, cele două wattmetre monofazate fiind cuplate conform metodei celor două wattmetre.

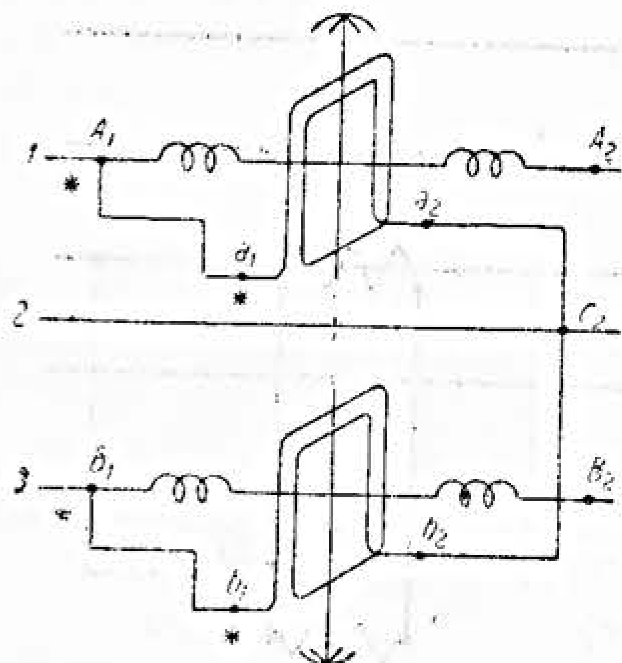


Fig. 135. — Schema principială a wattmetrului dublu.

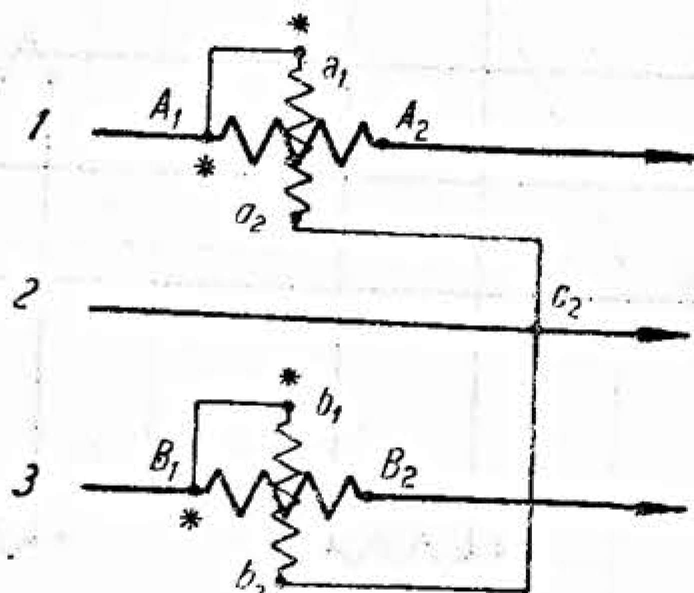


Fig. 136. — Schema de montaj a wattmetrului dublu.

Un astfel de wattmetru are în general 8 borne de racord: câte două pentru fiecare bobină de curent $A_1 A_2$ şi $B_1 B_2$ şi câte două pentru fiecare bobină de tensiune $a_1 a_2$ şi $b_1 b_2$.

De cele mai multe ori extremităţile a_2 şi b_2 ale bobinelor de tensiune, care se leagă la faza de referinţă, sunt legate în scurtcircuit şi sunt aduse la o bornă comună (în figură borna C_2), aparatul având astfel 7 borne de racord: 4 de curent şi 3 de tensiune.

Montajul aparatului trebue făcut exact conform schemei de montaj care se găseşte în general indicată pe aparat, observând polaritatea bornelor figurată pe schema de mai sus.

Scara wattmetrelor duble este uneori gradată direct în waţi, puterea maximă marcată pe cadran fiind egală cu

$$P = 1{,}73\ UI,$$

U şi I fiind tensiunea şi curentul nominal pentru care este construit wattmetrul. Alteori scara este gradată în diviziuni care merg dincolo de limita 1,73 UI şi anume până la o putere 2 UI. Această scară mărită corespunde puterii reale pe care o poate măsura wattmetrul dublu, când este utilizat ca simplu wattmetru monofazat, legând în serie cele două bobine de curent şi în paralel cele două bobine de tensiune.

155. **Măsurarea puterii reactive** se poate face în trei moduri:

— prin măsurarea indirectă;
— prin măsurarea directă cu ajutorul varmetrelor;
— prin măsurarea directă cu ajutorul wattmetrelor.

156. **Măsurarea indirectă a puterii reactive.** Principiul metodei constă în a măsura puterea activă P cu wattmetrul iar puterea aparentă S cu voltmetrul şi ampermetrul şi a deduce apoi prin calcul puterea reactivă Q din relaţia:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}.$$

care se poate aplica atât în circuitele monofazate, cât şi în cele trifazate simetrice şi echilibrate.

— *In circuitele monofazate.* Măsurându-se tensiunea U, curentul I şi puterea activă $P = UI \cos\varphi$, puterea aparentă $S = UI$ şi deci

$$Q = \sqrt{(UI)^2 - P^2}.$$

— *In circuitele trifazate simetrice şi echilibrate.* Dacă se măsoară tensiunile U, între faze curentul I pe fază şi puterea trifazată activă $P = P_1 + P_2$ prin metoda celor două wattmetre montate, de exemplu, pe fazele 1 şi 2, puterea aparentă va fi $S = \sqrt{3}\ UI$ şi deci puterea reactivă:

$$Q = \sqrt{(\sqrt{3}\ UI)^2 - (P_1 + P_2)^2}.$$

In general, acest gen de măsurătoare nu dă rezultate precise din cauza numărului mare de aparate întrebuinţate şi a consumului acestor aparate ale căror corecţii sunt destul de greu de făcut.

In plus, în curentul trifazat, metoda este limitată la tensiuni simetrice şi curenţi echilibraţi.

157. **Măsurarea directă a puterii reactive monofazate cu ajutorul varmetrelor electrodinamice.** Varmetrele electrodinamice sunt aparate speciale care permit măsurarea directă a puterii reactive. Ele nu diferă de wattmetrele obişnuite de putere activă, decât prin aceea că bobina de tensiune se pune în serie cu o inductanţă L foarte mare (fig. 137), astfel încât curentul I în bobina de tensiune să fie decalat la 90° în urmă, faţă de tensiunea de alimentare U. In aceste condiţii, deviaţia varmetrului electrodinamic va fi proporţională cu produsul $II' \cos(II')$ în care

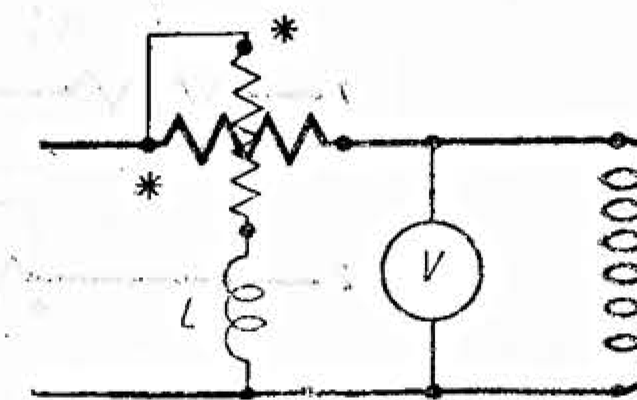


Fig. 137. — Schema principială a unui varmetru electrodinamic.

$$I' = \frac{U}{L\omega} \text{ şi } \cos(II') = \cos(90 - \varphi) = \sin\varphi;$$

$$\alpha = K \frac{U}{L\omega} I \sin\varphi = \frac{K}{L\omega} Q$$

adică *deviaţia aparatului este proporţională cu puterea reactivă* $Q = UI \sin\varphi$.

In loc de o inductanţă, se poate pune în serie o capacitate C, în care caz:

$$\alpha = K\ C\omega UI \sin\varphi = KC\omega Q.$$

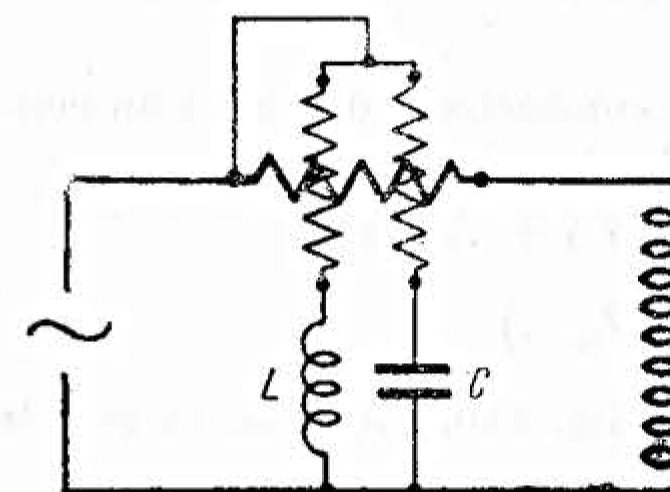


Fig. 138. — Varmetru compensat.

Indicaţiile acestor aparate sunt influenţate de variaţiile frecvenţei faţă de frecvenţa nominală a aparatului.

Deaceea se construesc varmetre compensate, cu două bobine de tensiune cuplate pe un acelaşi ax, una din ele în serie cu o inductanţă, cealaltă în serie cu o capacitate, conform schemei din fig. 138.

La acest varmetru, există relaţia:

$$\alpha = K\left[\frac{1}{L\omega} + C\omega\right] Q.$$

Alegându-se L şi C astfel încât să satisfacă relaţia de rezonanţă: $LC\omega_0^2 = 1$, în care ω_0 este frecvenţa pentru care este construit aparatul (de exemplu $\omega = 50$ Hz),

indicaţiile acestui aparat sunt puţin influenţate de variaţii moderate de $\pm 5\%$ ale frecvenţei, în jurul valorii nominale.

Observaţii. — Racordarea unui varmetru la circuitul de măsură se face cu observarea aceloraşi reguli privind polaritatea bornelor bobinei de curent şi de tensiune, ca şi la un wattmetru. In acest caz, aparatul va indica în sensul bun dacă decalajul dintre U şi I este inductiv şi în sens contrar dacă decalajul este capacitiv.

— Intocmai ca şi wattmetrele, varmetrele se fac cu sensibilităţi multiple de tensiune şi de curent. Constanta aparatului se calculează întocmai ca şi la wattmetre (§ 130), ştiind că indicaţia maximă a varmetrelor care dau puterea reactivă, $Q = UI \sin \varphi$, are loc pentru un decalaj al curentului faţă de tensiune de $\varphi = 90°$.

158. Măsurarea puterii reactive polifazate cu ajutorul varmetrelor. Pentru puterea reactivă într'un circuit polifazat se deduc metode perfect similare cu acelea indicate pentru măsurarea puterii active polifazate (§ 140 şi urm.), care se menţionează pe scurt în cele de mai jos.

159. Metoda celor n şi $n-1$ varmetre. Dacă $I_1, I_2, \ldots I_n$ sunt curenţii în cei n conductori ai unei reţele polifazate, $U_{10}\, U_{20} \ldots U_{n0}$ diferenţele de potenţial dintre aceşti conductori şi un punct oarecare, se arată că puterea totală reactivă Q polifazată are expresia:

$$Q = U_{10}\, I_1 \sin (U_{10}\, I_1) + U_{20}\, I_2 \sin (U_{20}\, I_2) + \ldots + U_{n0}\, I_n \sin (U_{n0}\, I_n)$$

şi că deci ea se poate măsura cu ajutorul a n varmetre $W_1', W_2', \ldots W_n'$ montate ca în fig. 139 de mai jos, întocmai ca şi cele n wattmetre din fig. 113.

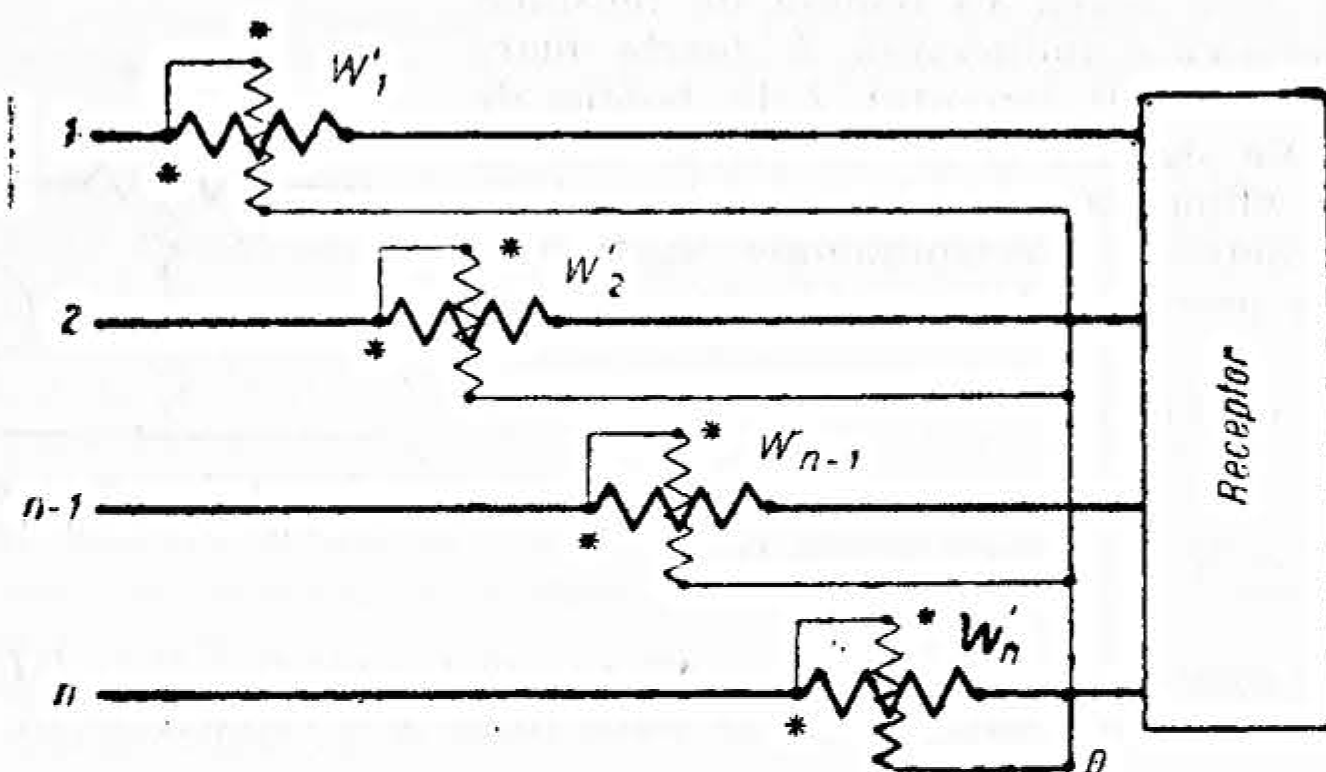


Fig. 139. — Metoda celor n varmetre.

Dacă punctul O este situat pe unul din cei n conductori, de exemplu conductorul al n-lea, expresia puterii reactive devine:

$$Q = U_{1n}\, I_1 \sin (U_{1n}\, I_1) + U_{2n}\, I_2 \sin (U_{2n}\, I_2) + \ldots + U_{n-1,\,n}\, I_{n-1} \sin (U_{n-1,\,n}\, I_{n-1})$$

şi se poate măsura cu $n-1$ varmetre montate ca în fig. 140, întocmai ca şi cele $n-1$ wattmetre din fig. 114.

Aici varmetrele au bobinele de tensiune supuse tensiunilor U_{1n}, U_{2n}, etc. dintre faze.

160. Metoda celor trei varmetre pentru măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate, fără fir neutru. Schema de montaj este redată în fig. 141 şi este perfect identică cu aceea din fig. 116 dela metoda celor trei wattmetre.

Puterea reactivă are valoarea:

$$Q = U_{10}\, I_1 \sin (U_{10}\, I_1) + U_{20}\, I_2 \sin (U_{20}\, I_2) + U_{30}\, I_3 \sin (U_{30}\, I_3). \quad (160.1)$$

Dacă Q_1, Q_2, Q_3, sunt puterile reactive indicate de cele trei varmetre W_1', W_2', W_3', se obţine:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

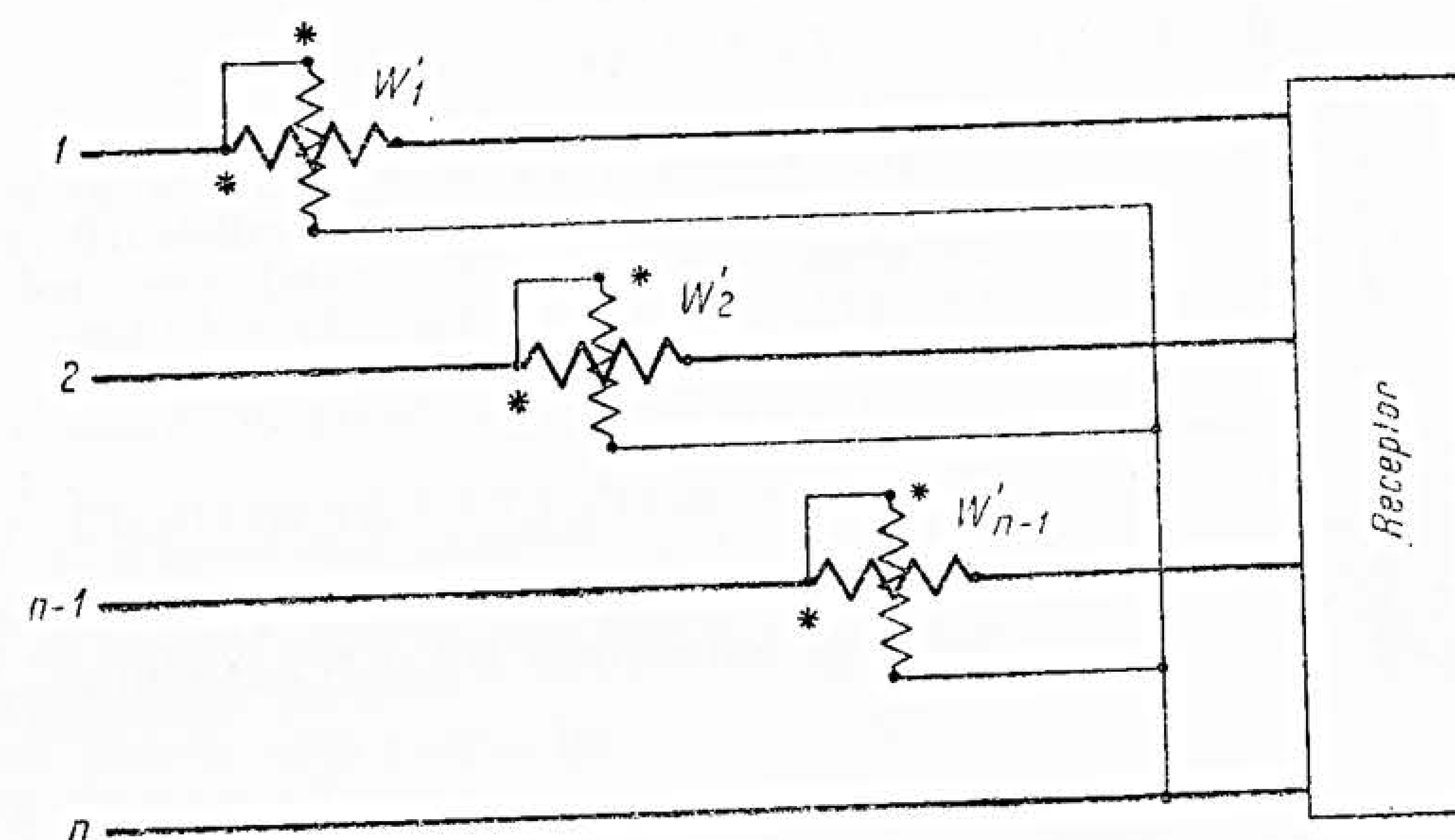


Fig. 140. — Metoda celor $n-1$ varmetre.

161. Formula generală cu trei termeni. Expresia (160.1) de mai sus a puterii reactive constitue *formula generală cu trei termeni*, care permite calculul şi măsurarea puterii reactive pentru diversele cazuri care se pot prezenta; această for-

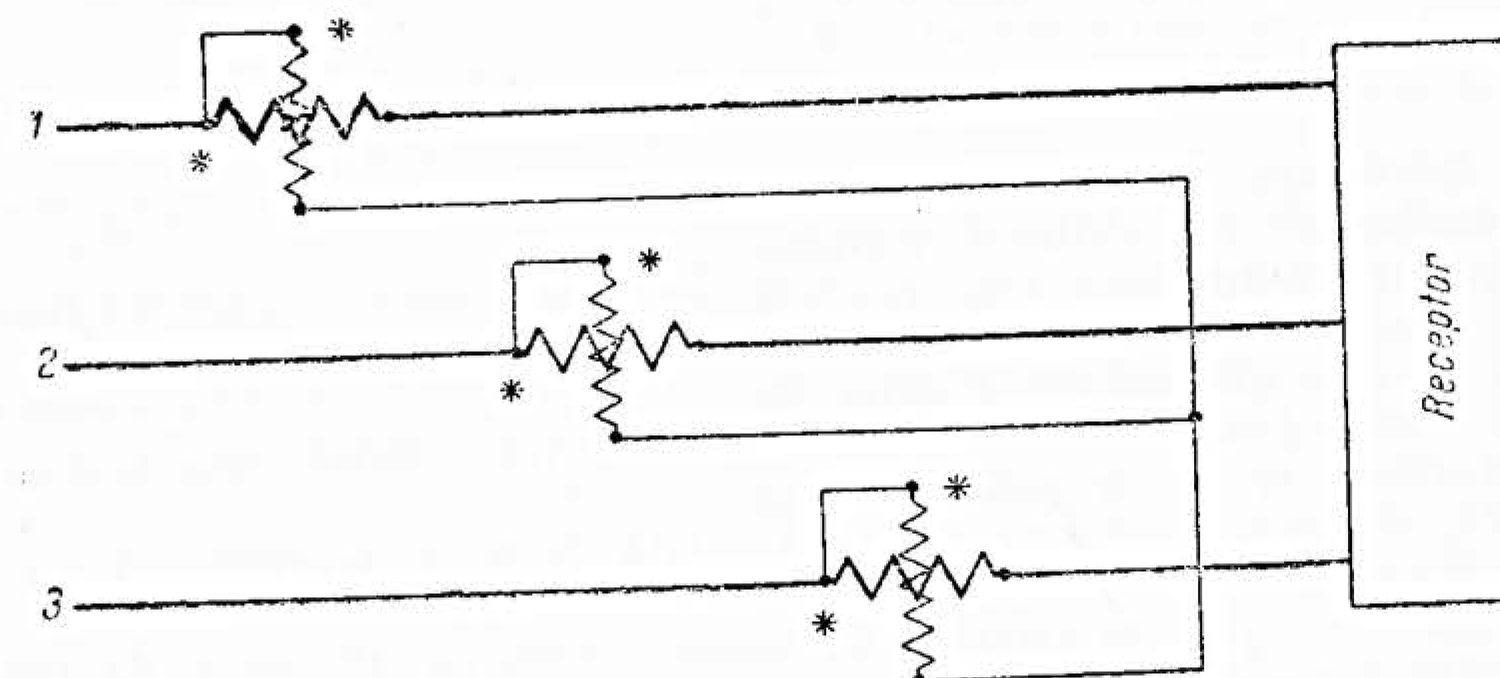


Fig. 141. — Metoda celor trei varmetre.

mulă este susceptibilă de o interpretare geometrică, astfel cum se vede din diagrama vectorială din fig. 142, unde:

U_{12}, U_{23}, U_{31} sunt tensiunile dintre faze;
O — un punct oarecare al planului topografic al potenţialelor;

I_1, I_2, I_3 — curenţii pe cele trei faze între care există relaţia: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$;

U_{10}, U_{20} şi U_{30} — diferenţele de potenţial dintre conductorii 1, 2, 3 şi punctul O;

φ_{10}, φ_{20} şi φ_{30} — decalajele dintre tensiunile U_{10}, U_{20}, U_{30} şi curenţii I_1, I_2, I_3.

Oriunde s'ar găsi în plan punctul O, expresia

$$Q = U_{10} I_1 \sin \varphi_{10} + U_{20} I_2 \sin \varphi_{20} + U_{30} \cdot I_3 \sin \varphi_{30},$$

rămâne constantă şi reprezintă puterea reactivă totală.

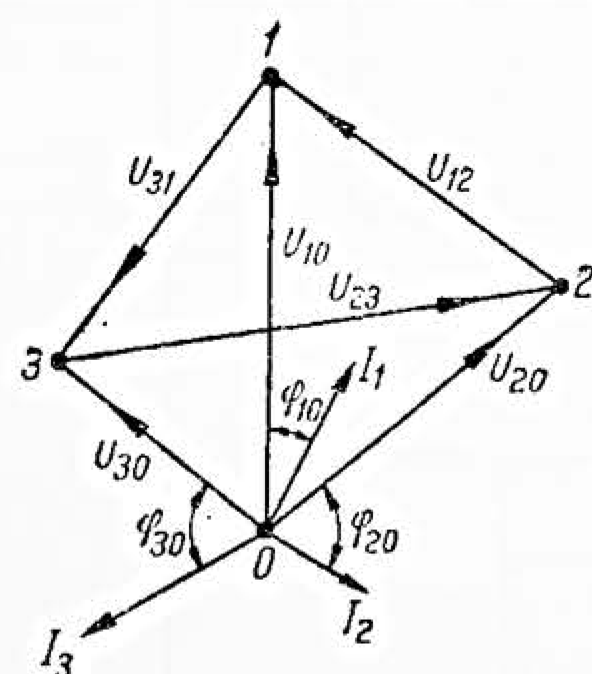


Fig. 142. — Diagrama vectorială a unui sistem trifazat nesimetric şi desechilibrat

162. Metoda celor două varmetre pentru măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate fără fir neutru. Schema de montaj este redată în fig. 143, identică cu fig. 123 referitoare la metodele celor două wattmetre.

Puterea reactivă trifazată are valoarea:

$$Q = U_{12} I_1 \sin (U_{12} I_1) + U_{32} I_3 \sin (U_{32} I_3). \quad (162.1)$$

Dacă Q_1 şi Q_3 sunt valorile puterii reactive indicate de wattmetrele W_1' şi W_3' se obţine:

$$Q = Q_1 + Q_3.$$

Expresia de mai sus (162.1) constitue *formula generală cu doi termeni*, pentru calculul şi măsurarea puterii reactive trifazate, corespunzătoare montajului de faţă.

Dacă se iau ca faze de referinţă celelalte două faze, 3 sau 1, se obţin prin permutări circulare alte montaje şi alte formule similare cu doi termeni.

Observaţie. Unul din cele două varmetre poate să dea indicaţii în sensul contrar celui normal, puterea reactivă pe care o măsoară fiind negativă. Pentru citirea acesteia, se inversează legăturile bobinei de tensiune a aparatului.

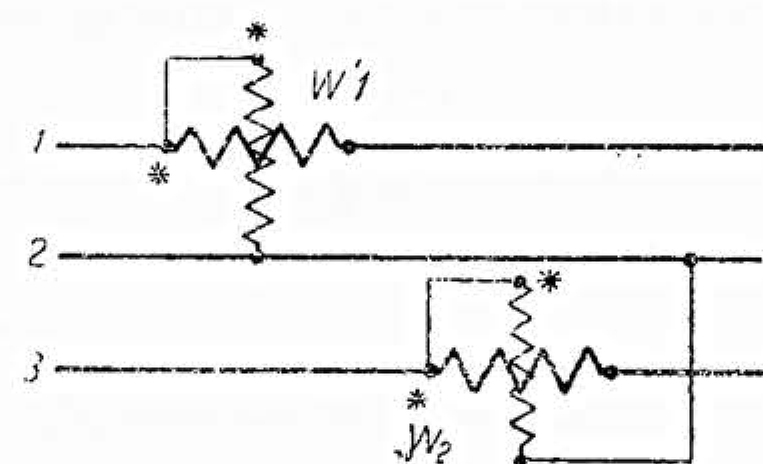


Fig. 143. — Metoda celor două varmetre

163. Măsurarea directă a puterii reactive monofazate cu ajutorul wattmetrelor obişnuite. Măsurarea este posibilă numai în condiţiile speciale redate în fig. 144 şi anume alimentând bobina de tensiune a wattmetrului nu cu tensiunea V a receptorului, ci cu o altă tensiune auxiliară U, de aceeaşi frecvenţă şi decalată faţă de tensiunea V cu 90° în urmă (sau înainte).

In aceste condiţii, wattmetrul va măsura puterea P', dată de tensiunea U cu curentul I adică:

$$P' = UI \cos (UI) = UI \cos (90 - \varphi) = UI \sin \varphi,$$

adică: *wattmetrul măsoară o putere activă proporţională cu puterea reactivă* $Q = VI \sin \varphi$, a cărei valoare va fi deci:

$$Q = P' \frac{V}{U}.$$

Metoda nu se aplică în curent monofazat, din cauza greutăţii de a avea la îndemână tensiunea auxiliară necesară, dar principiul este folosit în circuitele trifazate, unde tensiunile auxiliare de natura celei de mai sus se găsesc în însăşi cuprinsul circuitului.

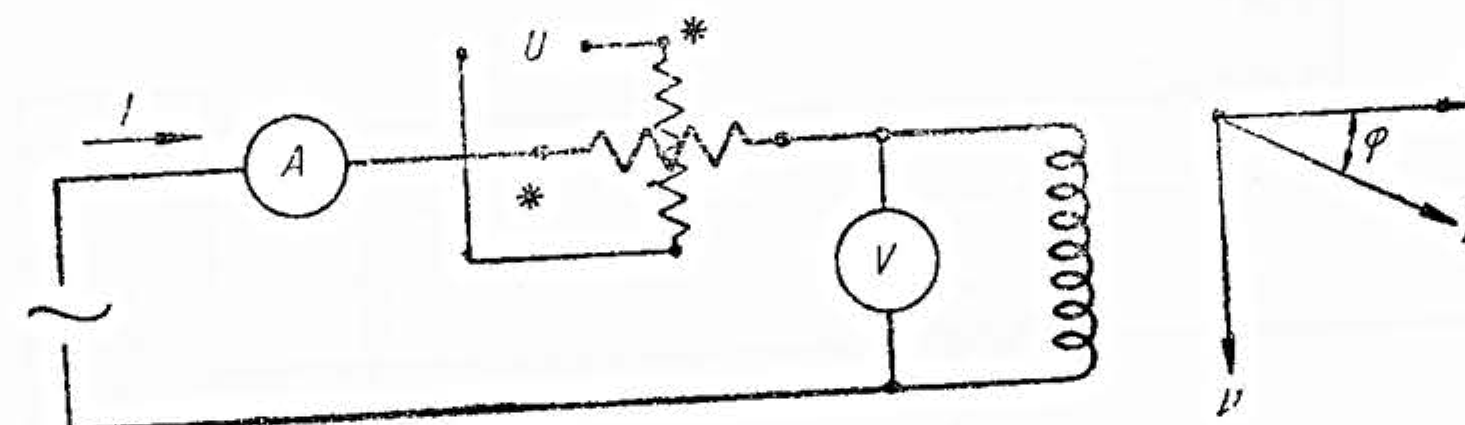


Fig. 144. — Măsurarea puterii reactive cu ajutorul unui wattmetru

164. Măsurarea directă a puterii reactive în circuite trifazate fără fir neutru, cu ajutorul wattmetrelor obişnuite. Se deosebesc două metode: metoda celor trei wattmetre şi metoda celor două wattmetre, ambele valabile pentru *circuitele trifazate cu tensiuni simetrice între faze şi curenţi desechilibraţi*, cazul care se prezintă în general în practică.

165. Metoda celor trei wattmetre. Se deduce din expresia cu trei termeni a puterii trifazate reactive (§ 160):

$$Q = U_{10} I_1 \sin (U_{10} I_1) + U_{20} I_2 \sin (U_{20} I_2) + U_{30} I_3 \sin (U_{30} I_3),$$

în care punctul O (diagrama din fig. 142) se alege chiar în centrul de greutate al triunghiului echilateral al tensiunilor între faze simetrice U_{12}, U_{23}, U_{31}, ca în fig. 145 de mai jos. Tensiunile U_{10}, U_{20} şi U_{30} devin egale cu tensiunile simple, V_1, V_2, V_3, expresia puterii reactive devenind:

$$Q = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2 + V_3 I_3 \sin \varphi_3;$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

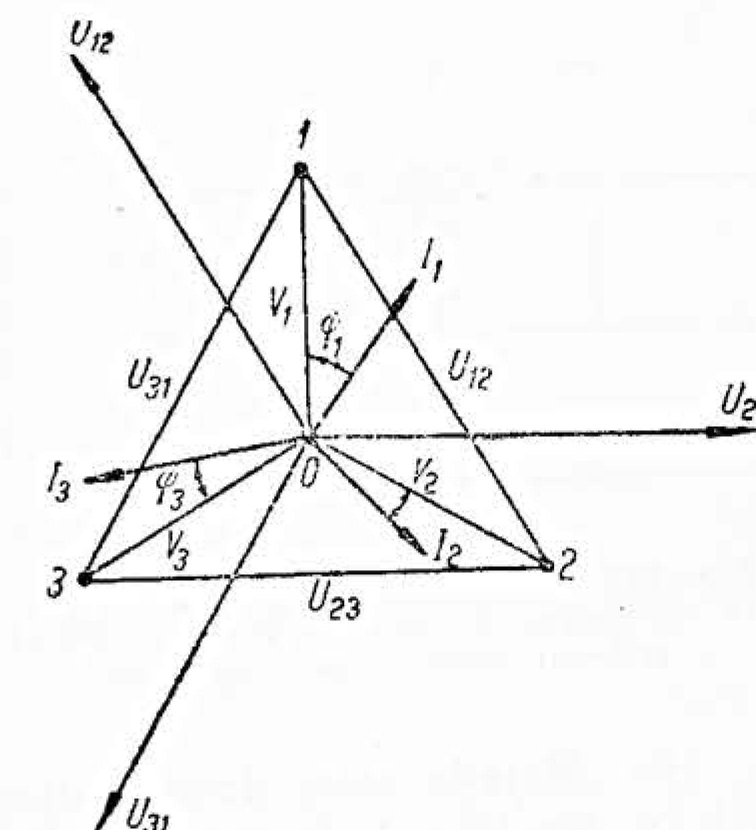


Fig. 145. — Diagrama vectorială a curenţilor şi tensiunilor într'un circuit trifazat, simetric ca tensiuni şi desechilibrat ca curenţi

Inlocuind puterile reactive Q_1, Q_2 şi Q_3 prin puterile active echivalente — date de tensiunile auxiliare U_{23}, U_{31} şi U_{13}, decalate la 90° în urmă faţă de tensiunile simple V_1, V_2, V_3, cu curenţii I_1, I_2, I_3, — se obţine:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} [U_2\ I_1 \cos (U_2; I_1) + U_{31} I_2 \cos (U_{31} I_2) + U_{12} I_3 \cos U_{12} I_3)], \quad (165.1)$$

adică puterea reactivă Q se poate măsura cu trei wattmetre montate ca în fig. 146, cu respectarea polarităţii indicate.

Se constată că bobinele de tensiune ale wattmetrelor sunt supuse tensiunilor dintre faze.

Dacă P_1, P_2, P_3, sunt puterile indicate de cele trei wattmetre W_1', W_2', W_3', se obține

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3).$$

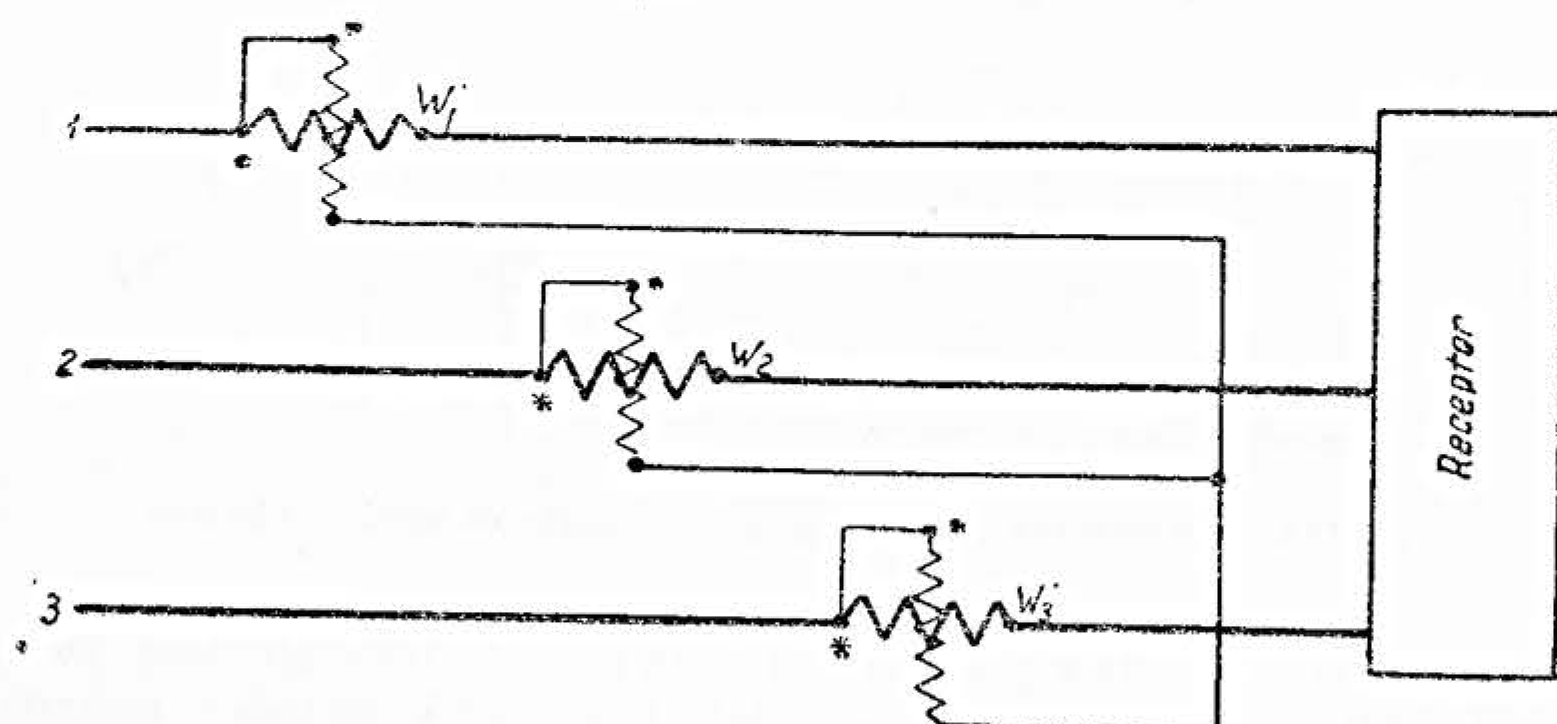


Fig. 146. — Măsurarea puterii reactive cu trei wattmetre într'un ciclu trifazat simetric.

Observație. Dacă circuitul este echilibrat și ca curenți, puterea reactivă poate fi măsurată printr'un singur wattmetru W_1', montat ca în fig. 147; puterea reactivă trifazată va fi:

$$Q = \sqrt{3}\, Q_1,$$

Q_1 fiind puterea indicată de wattmetru.

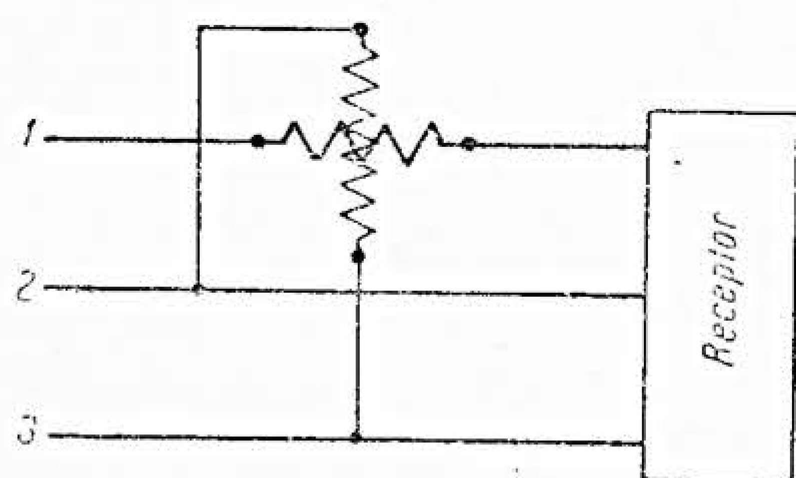


Fig. 147. — Măsurarea puterii reactive cu un singur wattmetru, într'un circuit trifazat simetric și echilibrat.

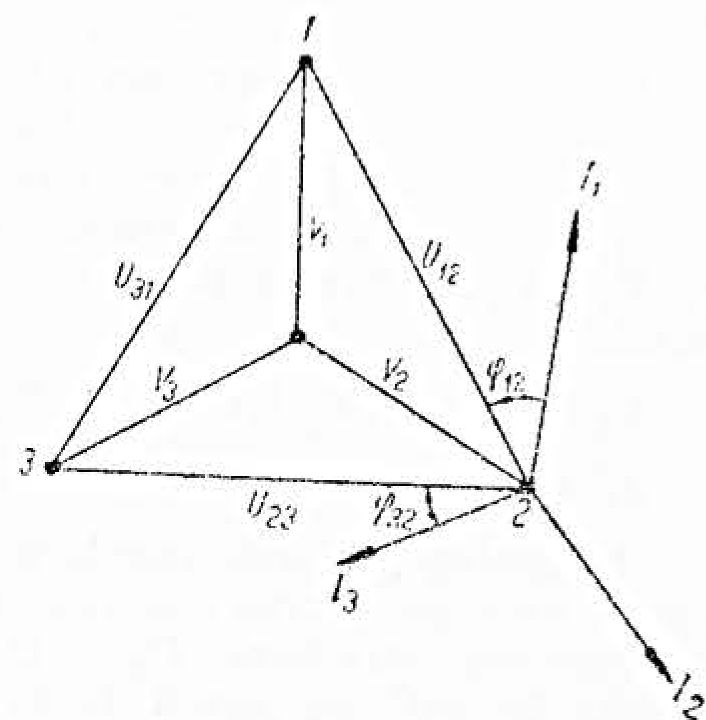


Fig. 148. — Diagrama vectorială pentru metoda celor două wattmetre cu faza de referință 2.

166. **Metoda celor două wattmetre.** Se deduce din expresia cu doi termeni a puterii reactive trifazate (162.1):

$$Q = U_{12} I_1 \sin(U_{12} I_1) + U_{32} I_3 \sin(U_{32} I_3);$$

$$Q = U_{12} I_1 \sin\varphi_{12} + U_{32} I_3 \sin\varphi_{32} = Q_1 + Q_2,$$

căreia îi corespunde diagrama din fig. 148, în care punctul O este ales în vârful 2 al triunghiului tensiunilor dintre faze.

Inlocuind puterile reactive Q_1 și Q_2 prin puterile active echivalente date de tensiunile auxiliare $-V_3$ respectiv $+V_1$ — decalate cu 90° în urmă față de tensiunile U_{12}, respectiv U_{32} — cu curenții I_1 respectiv I_3, se obține expresia:

$$Q = \sqrt{3}\,[-V_3 I_1 \cos(V_3 I_1) + V_1 I_3 \cos(V_1 I_3)], \qquad (166.1)$$

adică puterea reactivă Q_1 se poate măsura cu două wattmetre montate ca în fig. 149.

Se creează un punct neutru artificial N, cu ajutorul unei rezistențe R_2, egală ca valoare cu fiecare din rezistențele R_1 și R_3 ale bobinelor de tensiune ale celor două wattmetre (incluziv rezistențele adiționale respective).

Primul wattmetru W_1' are bobina de curent pe faza 1, iar bobina de tensiune este supusă la tensiunea simplă $-V_3$, legând borna *nepolarizată* la faza 3 și borna polarizată la punctul neutru N.

Al doilea wattmetru are bobina de curent pe faza 3, iar bobina de tensiune este supusă tensiunii simple $+V_1$, legând *borna polarizată* la faza 1 și borna nepolarizată la punctul neutru N.

Dacă P_1 respectiv P_3 sunt puterile măsurate de cele două wattmetre, puterea reactivă trifazată va fi:

$$Q = \sqrt{3}\,(P_1 + P_2),$$

una din puterile P_1 sau P_2 putând fi negativă.

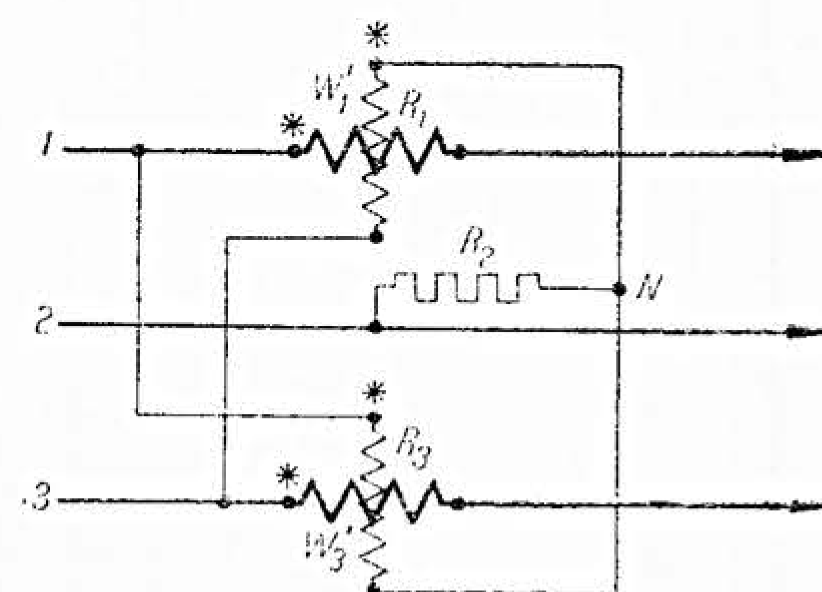


Fig. 149. — Măsurarea puterii reactive cu două wattmetre într'un circuit trifazat simetric.

Observații. — Dacă se ia ca fază de referință conductorul 3 sau 1, se obțin alte expresii pentru puterea reactivă Q și alte scheme de montaj, care se deduc din expresia de mai sus (166.1) prin permutări circulare.

— Expresiei (166.1) i se poate da și forma integrală următoare, adeseori întrebuințată:

$$Q = \sqrt{3}\,\frac{1}{T}\int_0^T - v_3 i_1\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_1 i_3\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T (-v_3 i_1 + v_1 i_3)\, dt.$$

Metoda celor două wattmetre aplicată la circuitele cu tensiuni simetrice și curenți echilibrați. In acest caz, dacă V este tensiunea simplă pe fază, I curentul pe cele trei faze și φ decalajul rețelei, indicațiile celor două wattmetre montate conform schemei din fig. 149 vor avea valoarea:

$$P_1 = VI \sin(\varphi + 30°);$$

$$P_3 = VI \sin(\varphi - 30°).$$

In fig. 150 sunt reprezentate curbele de variație ale indicațiilor celor două wattmetre în funcție de decalajul considerat, inductiv și capacitiv.

Se constată că pentru $\varphi = 30°$, indicația celui de al doilea wattmetru schimbă de sens.

167. **Rezistențe adiționale pentru măsurarea puterii active și reactive.** Pentru a se putea măsura puteri trifazate active și reactive cu o *aceeași constantă a wattmetrelor*, se construiesc cutii de rezistențe adiționale speciale, care permit trecerea imediată dela măsurarea puterii active prin metoda celor două wattmetre, la măsurarea puterii reactive. Aceste cutii sunt destinate să funcționeze cu două wattmetre identice și de o anumită rezistență a bobinelor de tensiune.

168. Măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate cu fir neutru, prin metoda celor trei wattmetre. Dacă V_1, V_2, V_3 sunt tensiunile pe fază adică tensiunile simple ale circuitului, I_1, I_2, I_3 curenţii de pe cele trei faze, iar φ_1, φ_2 şi φ_3 decalajele curenţilor faţă de tensiunile simple, puterea reactivă trifazată are expresia:

$$Q = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2 + V_3 I_3 \sin \varphi_3,$$

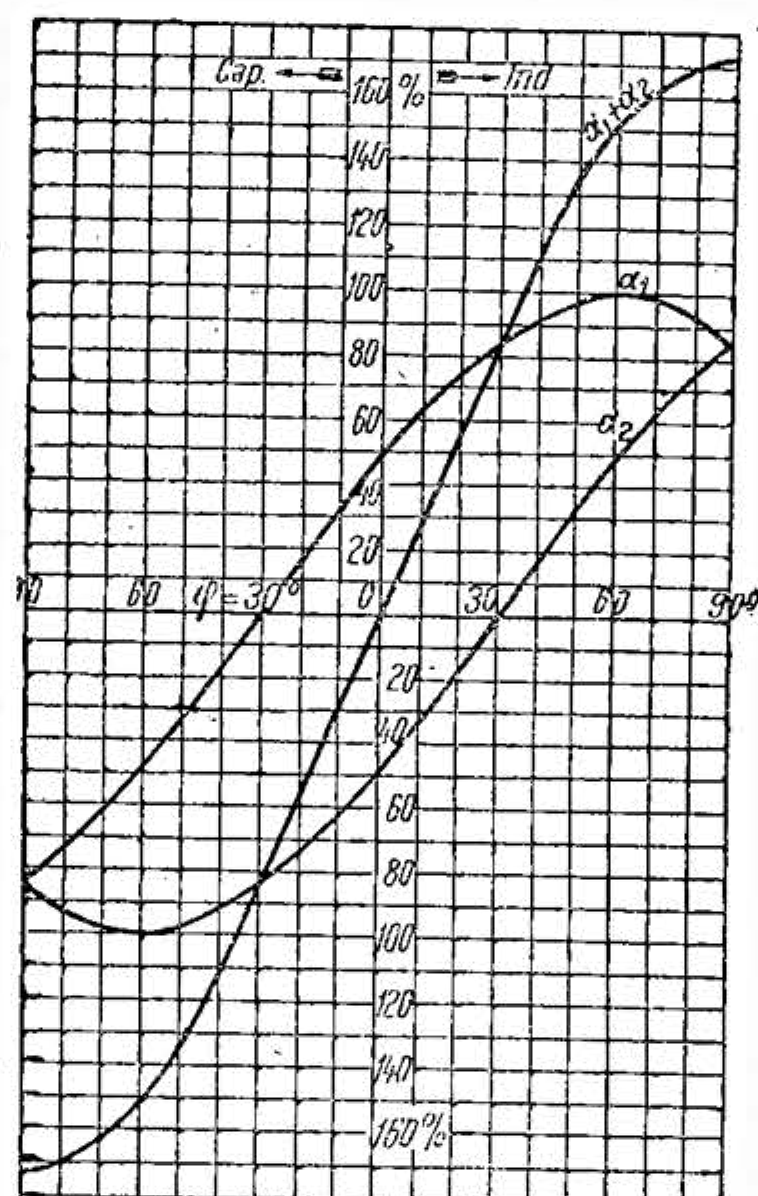


Fig. 150. — Variaţia indicaţiilor wattmetrelor în funcţie de decalaj, la măsurarea puterii reactive prin metoda celor două wattmetre

care este identică cu expresia (160.1) dela § 160.

In consecinţă, puterea reactivă se va măsura şi aici prin aceeaşi metodă a celor trei wattmetre montate ca în fig. 151 de mai jos.

Aceasta este singura metodă aplicabilă aici.

d) Măsurarea factorului de putere

169. Factorul de putere al unui circuit monofazat este raportul dintre puterea în waţi, măsurată cu wattmetrul şi puterea aparentă, măsurată cu ampermetrul şi voltmetrul.

In circuitele neinductive, factorul de putere este evident egal cu unitatea. In circuitele de curent alternativ sinusoidal, în care curentul este decalat cu un unghi φ faţă de tensiune, factorul de putere este $\cos \varphi$.

170. Măsurarea indirectă a factorului de putere.

— *Intr'un circuit monofazat*

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI},$$

în care P este puterea în waţi măsurată cu wattmetrul, U tensiunea circuitului în volţi, măsurată cu voltmetrul şi I curentul în amperi, măsurat cu ampermetrul.

— *Intr'un circuit trifazat echilibrat*

$$\cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{3}\, UI}.$$

Deasemenea, dacă α_1 şi α_2 sunt indicaţiile celor două wattmetre montate într'un circuit trifazat echilibrat cu trei fire pentru măsurarea puterii, s'a văzut la § 149 că:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

α_1 şi α_2 fiind indicaţiile celor două wattmetre, iar faza 3 fiind faza de referinţă.

Dacă se ia $n = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$,

$$\cos \varphi = \left[1 + 3\,\frac{(1-n)^2}{(1+n)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

şi trasându-se curba respectivă (fig. 152) se deduce $\cos \varphi$ pentru orice raport $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (v. şi § 149).

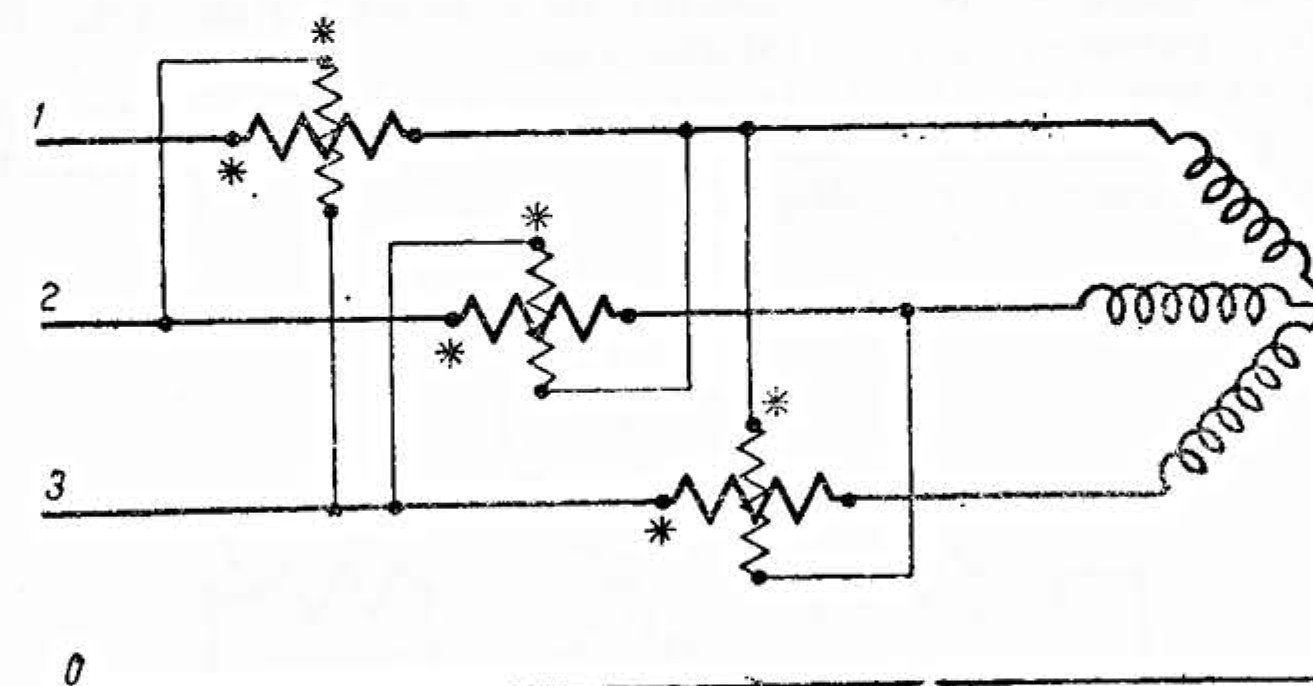


Fig. 151. — Măsurarea puterii reactive într'un circuit trifazat cu fir neutru

Apoi, întrucât $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\text{Puterea reactivă}}{\text{Puterea activă}}$,

se poate deasemenea trasa $\cos \varphi$ în funcţie de acest raport (fig. 153).

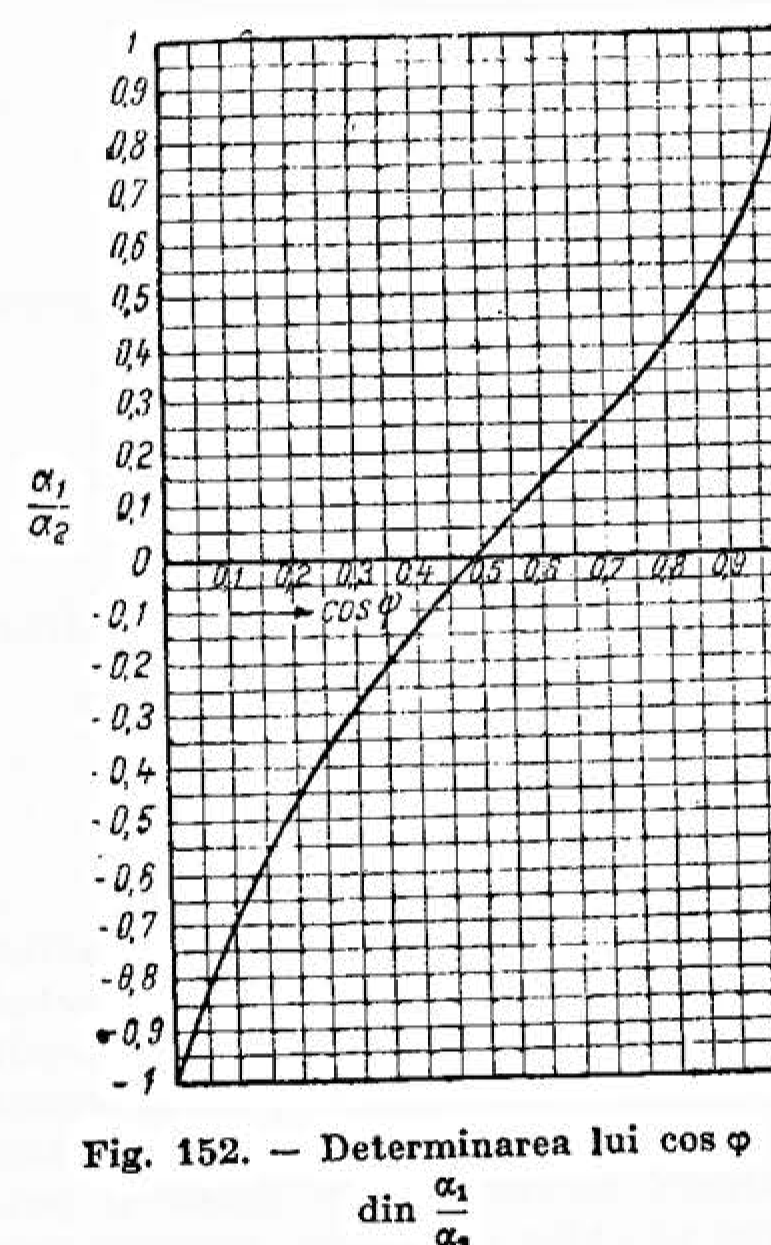


Fig. 152. — Determinarea lui $\cos \varphi$ din $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$

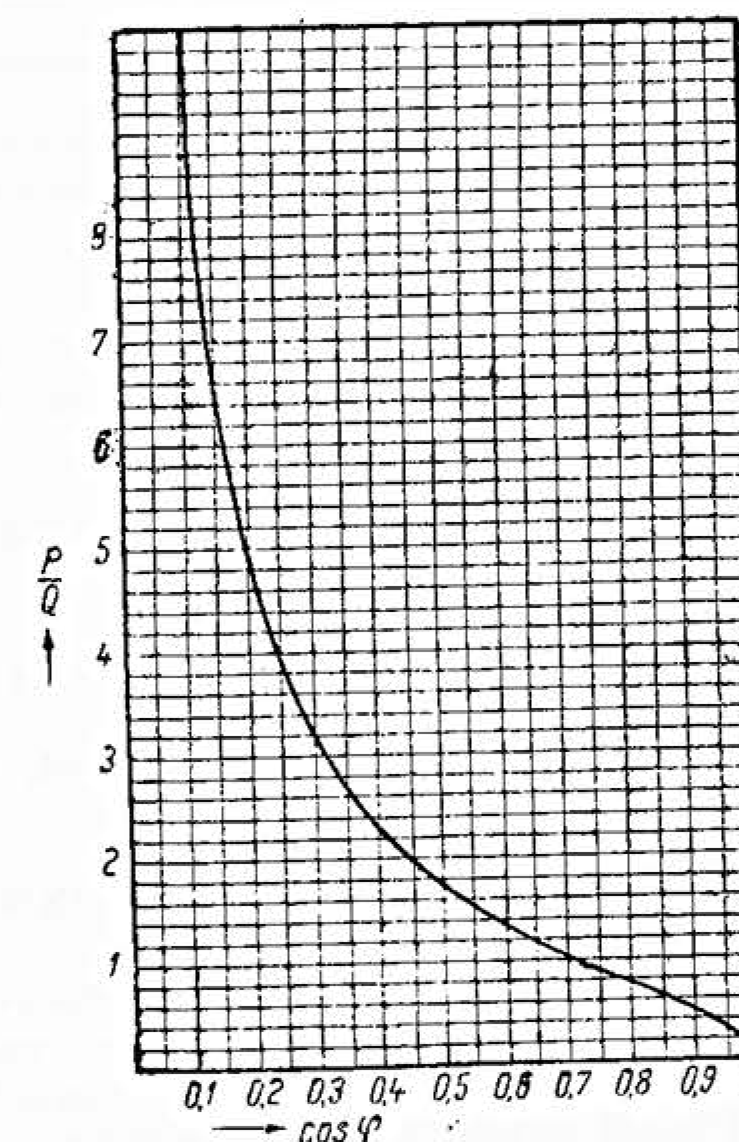


Fig. 153. — Determinarea lui $\cos \varphi$ din $\dfrac{P \text{ (activ)}}{Q \text{ (reactiv)}}$

171. Măsurarea directă a factorului de putere se face cu ajutorul *fazmetrului (cos φ-metrului).*

In fazmetrul electrodinamic monofazat, echipajul mobil al instrumentului este format din două bobine B_1 şi B_2 fixate pe un ax, la 90° una faţă de cealaltă (bobine încrucişate).

Bobinele se mişcă în câmpul produs de o bobină fixă AA, formată din două jumătăţi şi parcursă de curentul circuitului.

Bobinele mobile, una din ele în serie cu o rezistenţă neinductivă R şi cealaltă în serie cu o inductanţă L, sunt alimentate de tensiunea circuitului, astfel cum se vede în schema alăturată (fig. 154).

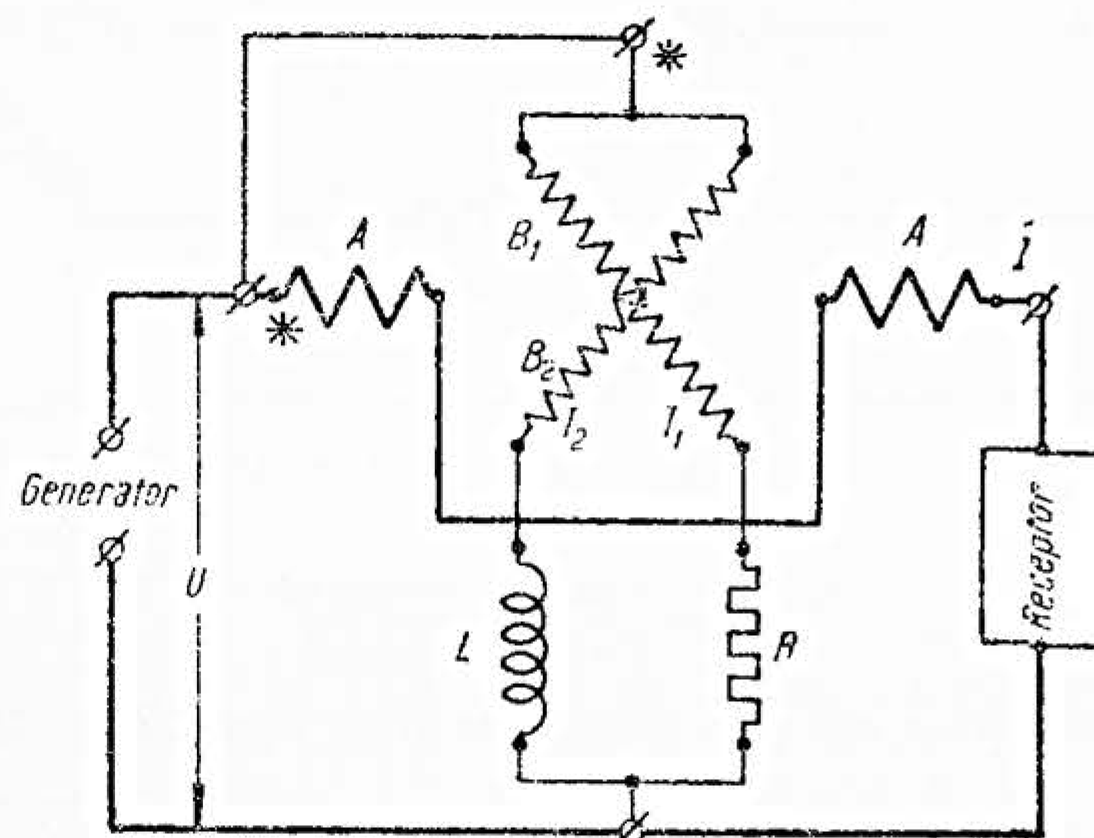


Fig. 154. — Schema electrică a fazmetrului electrodinamic cu bobine încrucişate.

Dacă I_1 şi I_2 sunt curenţii în bobinele încrucişate, φ decalajul curentului I faţă de tensiunea U şi α indicaţia aparatului,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K_1 I_1}{K_2 I_2} \operatorname{tg} \varphi$$

adică indicaţia α a aparatului este în funcţie de decalajul reţelei φ. Intrucât $I_2 = \frac{U}{L\omega}$, α depinde de frecvenţă. Constructiv, se face

$$\operatorname{tg} \alpha = K \operatorname{tg} \varphi$$

pentru o variaţie de $\pm 5\%$ a frecvenţei. Pentru variaţii mai mari, aparatul trebue să aibă un dispozitiv de reglaj al inductanţei L. Indicaţiile aparatului sunt independente de tensiune, care totuşi nu trebue să scadă sub anumite limite, astfel încât cuplul activ să nu fie prea mic, în care caz frecările şi cuplul antagonist al firelor de legătură nu ar fi neglijabile. Aparatul este influenţat în mare măsură de forma curbei de tensiune. Aparatul se gradează în cos φ şi în grade şi poate avea o scară semi-circulară cu zero la mijloc şi chiar circulară pentru unele instrumente de exploatare (pentru putere absorbită şi debitată). Se construesc fazmetre monofazate şi trifazate, de tip electrodinamic, ferodinamic şi de inducţie. Primul fazmetru de inducţie a fost realizat de M. O. Dolivo-Dobrovolski.

In fig. 155 este reprezentată schema unui fazmetru electrodinamic trifazat.

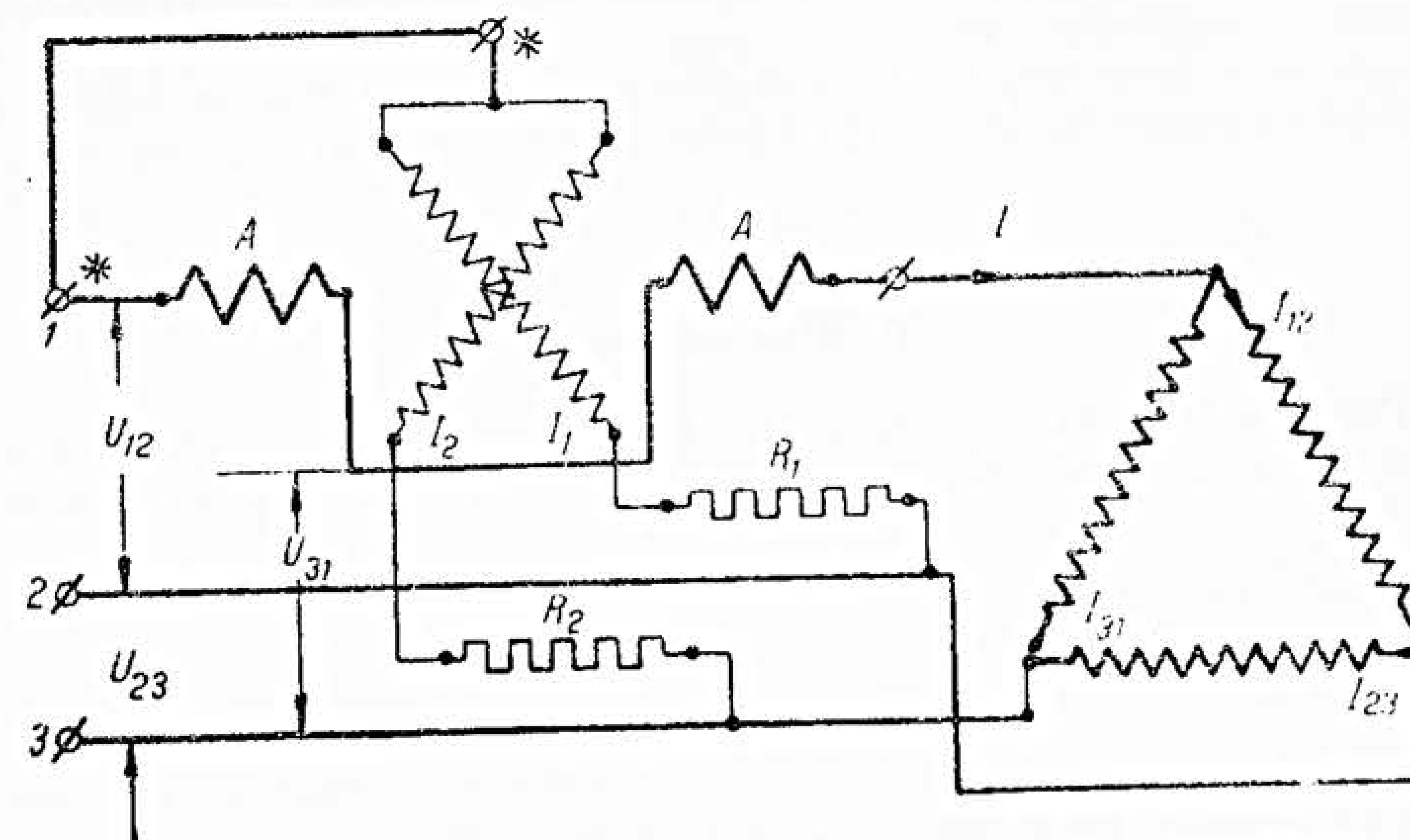


Fig. 155. — Schema electrică a fazmetrului electrodinamic trifazat.

e) Măsurarea frecvenţei

172. **Instrumentele pentru măsurarea frecvenţei** se bazează aproape exclusiv pe fenomenul de rezonanţă.

Pe principiul de rezonanţă mecanică se construesc frecvenţmetrele cu lamele, care au fost descrise la cap. D, § 75, iar pe principiul rezonanţei electrice, aparatele cu ac indicator.

— *Frecvenţmetrele cu ac indicator* au un circuit de rezonanţă compus dintr'o rezistenţă, o inductanţă şi o capacitate, acordat astfel încât să intre în rezonanţă la frecvenţa medie de măsurat. Fig. 156 arată montajul principial al unui astfel de aparat. In figură: F este bobina de câmp; L, inductanţa; C şi C_1, capacităţi; D_1 şi D_2, bobine mobile coaxiale (bobine încrucişate).

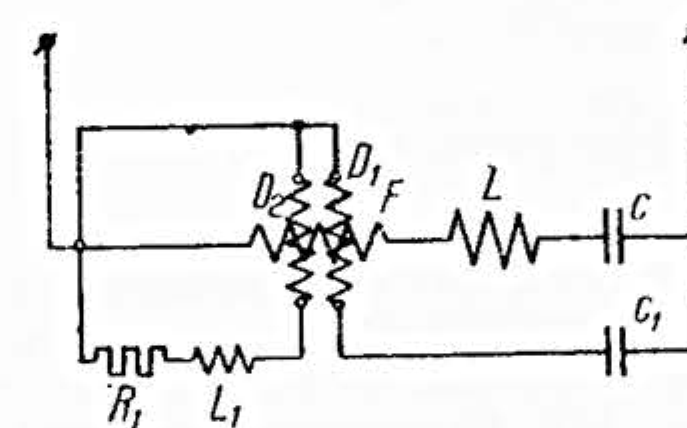


Fig. 156. — Schema pricipială a unui frecvenţmetru cu ac indicator.

Circuitul oscilant este constituit din bobina de câmp F, inductanţa L şi capacitatea C.

Tensiunea aplicată la bornele aparatului alimentează bobina D_1, care este în serie cu capacitatea C_1. Curentul din această bobină este decalat cu 90° înainte faţă de curentul din bobina F. Cuplul antagonist mişcării bobinei D_1 este produs de bobina D_2, în paralel cu D_1 şi în serie cu rezistenţa R_1 şi inductanţa L_1.

După cum frecvenţa de măsurat este mai mare sau mai mică decât frecvenţa de rezonanţă, bobina mobilă D_1 se roteşte într'o parte sau într'alta a poziţiei medii. Pentru a avea un cuplu activ mare, aceste aparate se construesc de tipul ferodinamic.

Domeniul de măsurare al acestor aparate este redus, de exemplu 48—52 Hz. Ele sunt folosite în special pentru aparatele înregistratoare, acestea trebuind să posede neapărat un ac indicator.

Indicaţiile aparatului sunt independente de tensiune, chiar pentru diferenţa de $\pm 20\%$.

173. **Măsurarea indirectă a frecvenței** într'un circuit de curent alternativ se face măsurând viteza alternatorului care alimentează circuitul, sau a unui motor sincron branșat pe circuit.

Dacă $2p$ este numărul de poli al alternatorului și n este viteza alternatorului în rotații pe secundă, frecvența f este dată de relația:

$$f = pn \text{ Hz}.$$

f) Sincronizarea

174. **Punerea în paralel** a generatorilor de curent alternativ, este o operație foarte importantă în exploatările electrice și impune îndeplinirea următoarelor trei condiții:

— egalitate de tensiune;
— egalitate de frecvență;
— concordanță de fază.

Pentru realizarea acestor condiții se execută următoarele măsurători:

175. **Compararea tensiunilor.** Se întrebuințează deobicei un voltmetru cu două sisteme, cu acele indicatoare mișcându-se pe același cadran, ca în fig. 157. Indicatorul K arată, de exemplu, tensiunea de pe bare, iar indicatorul Z indică tensiunea generatorului de pus

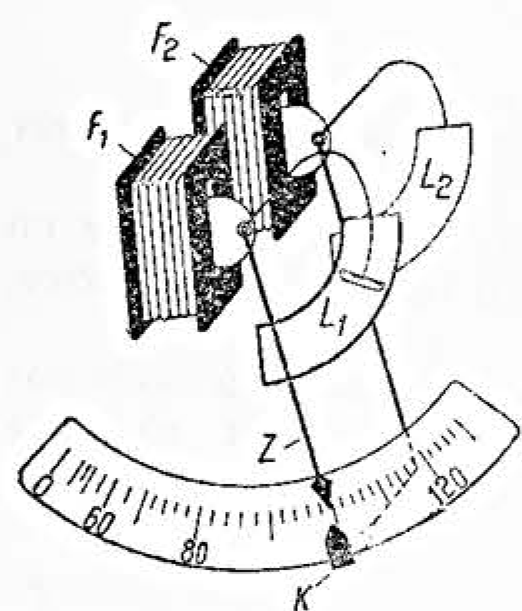


Fig. 157. — Voltmetru dublu pentru punere în paralel

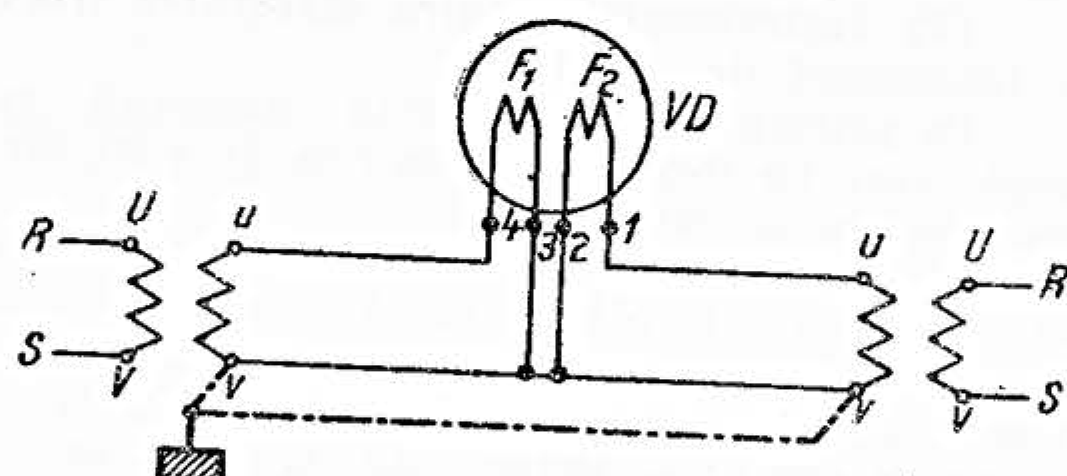


Fig. 158. — Schema de montaj pentru un voltmetru dublu

în paralel, care este excitat până când tensiunile se egalizează. Schema de montaj este reprezentată în fig. 158, în care partea din stânga se leagă la generatorul de pus în paralel, iar partea din dreapta la barele uzinei.

176. **Compararea frecvențelor.** Se întrebuințează de cele mai multe ori frecvențmetrul cu două serii de lamele, dintre care una este pentru rețea, iar cealaltă pentru generatorul de cuplat. In unele cazuri, se întrebuințează și frecvențmetre cu ac indicator cu două sisteme, similar cu voltmetrul dublu, menționat mai sus.

177. **Concordanța de fază** trebue verificată cu deosebită atenție. In fig. 159 *a*, sunt figurate:

a — curba tensiunii rețelei;
b — curba tensiunii generatorului de cuplat, de aceeași amplitudine cu curba «*a*», dar de frecvență puțin diferită;
c — curba tensiunii rezultante;
d — curba bătăilor tensiunii rezultante.

Cuplajul în paralel trebue să se facă în momentul când curba *c* trece prin zero, tensiunea rețelei fiind în acel moment egală și opusă tensiunii generatorului.

Mijlocul cel mai simplu pentru a recunoaște existența unei tensiuni între două puncte este legarea unei lămpi cu incandescență între aceste puncte.

In montajul din fig. 160, *a*, momentul când lămpile P — numite lămpi de sincronizare — vor fi stinse, corespunde trecerii prin zero a curbei rezultante *c*. Cuplajul se va face deci la *stingerea* lămpilor. Tensiunea nominală a lămpilor trebue să fie egală cu tensiunea rețelei.

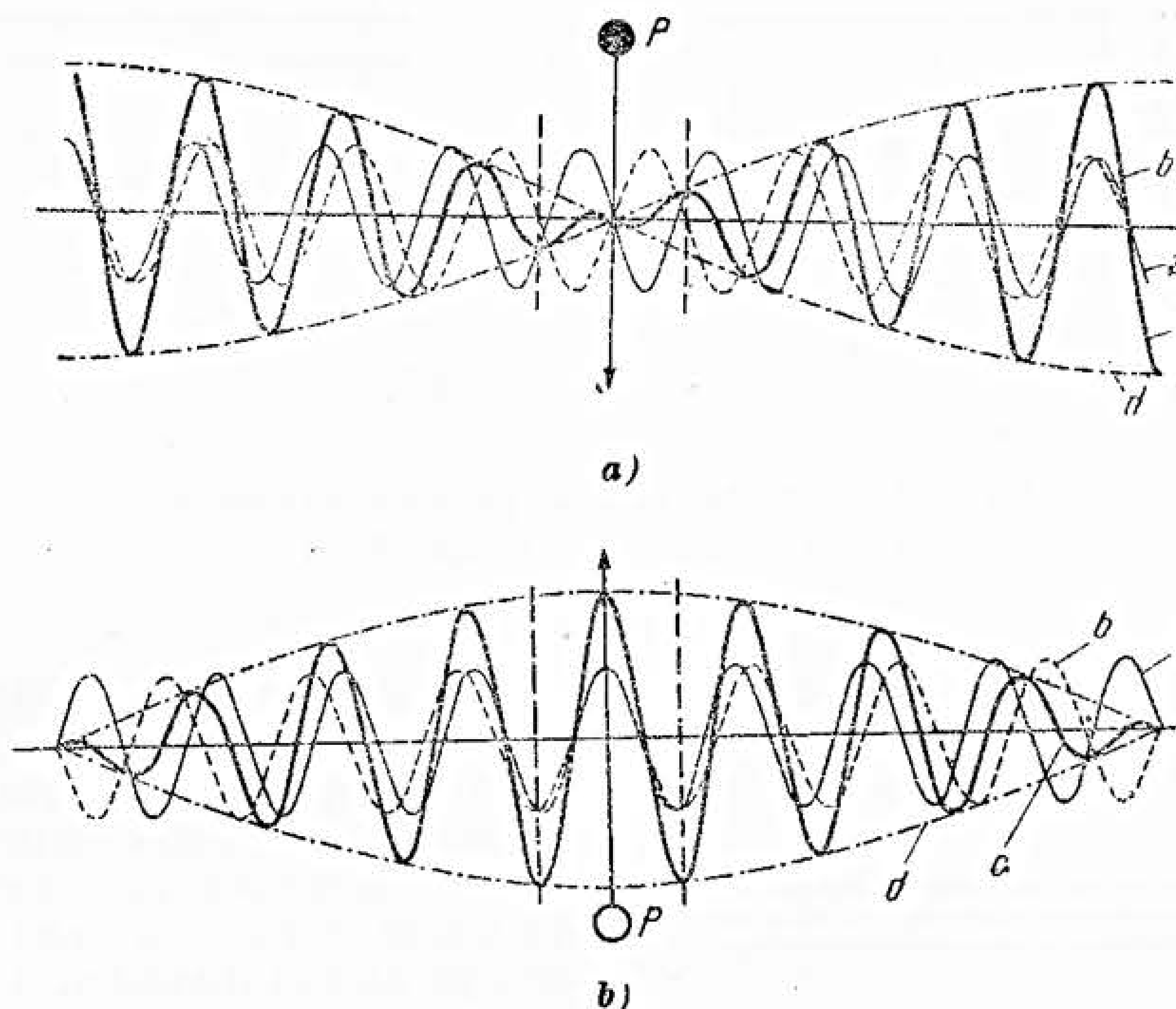


Fig. 159. — Curbele tensiunilor în momentul cuplajului
a — la stingere; *b* — la aprindere

In cazul montajului din fig. 160, *b*, curbele tensiunilor sunt reprezentate în fig. 159, *b*, în care:

a este curba inversă a tensiunii rețelei;
b — curba generatorului de cuplat;
c — curba tensiunii rezultante;
d — curba bătăilor tensiunii rezultante.

Cuplajul se va face la *aprinderea* lămpilor.

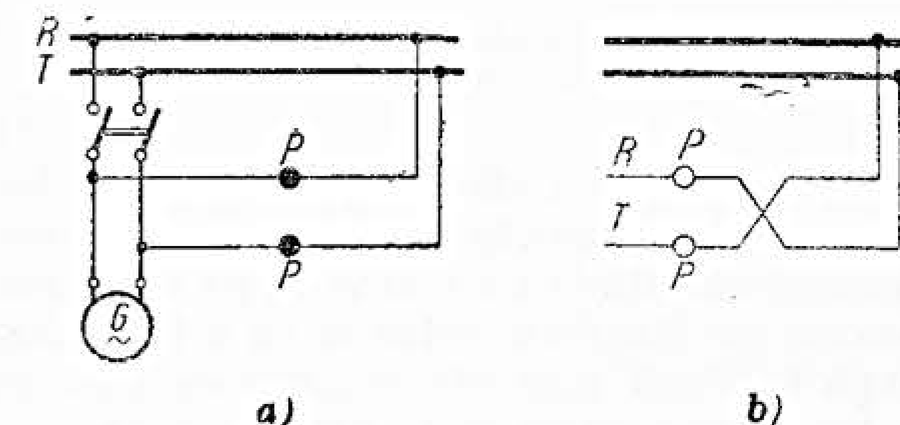


Fig. 160. — Montaj direct pentru sincronizare
a — la stingere; *b* — la aprindere

In cazul rețelelor de înaltă tensiune, aceste dispozitive de sincronizare se vor realiza utilizând transformatori de tensiune, ca în fig. 161, *a* și *b*.

Dacă tensiunea secundară a transformatorilor este de 100 V, se vor întrebuința două lămpi de sincronizare de 100 V tensiune nominală, sau o singură lampă de 200 V.

In loc de lămpi, la care nu se poate aprecia exact momentul de cuplare, se întrebuințează voltmetre de zero (pentru stingere) sau voltmetre de maxim (pentru aprindere). Voltmetrele trebue să aibă diviziunile mari, fie în preajma valorii zero, fie în preajma valorii maxime, pentru ca să se poată bine aprecia momentul când trebue făcut cuplajul.

178. **Dispozitive de sincronizare.** Pentru cuplajul maşinilor trifazate, un sistem vechi este folosirea sincronoscopului cu lămpi (cu foc învârtitor), (fig. 162) care are trei lămpi legate ca în figură. Lămpile se aprind succesiv într'un sens sau altul, după cum maşina se învârteşte prea repede sau prea încet (frecvenţa

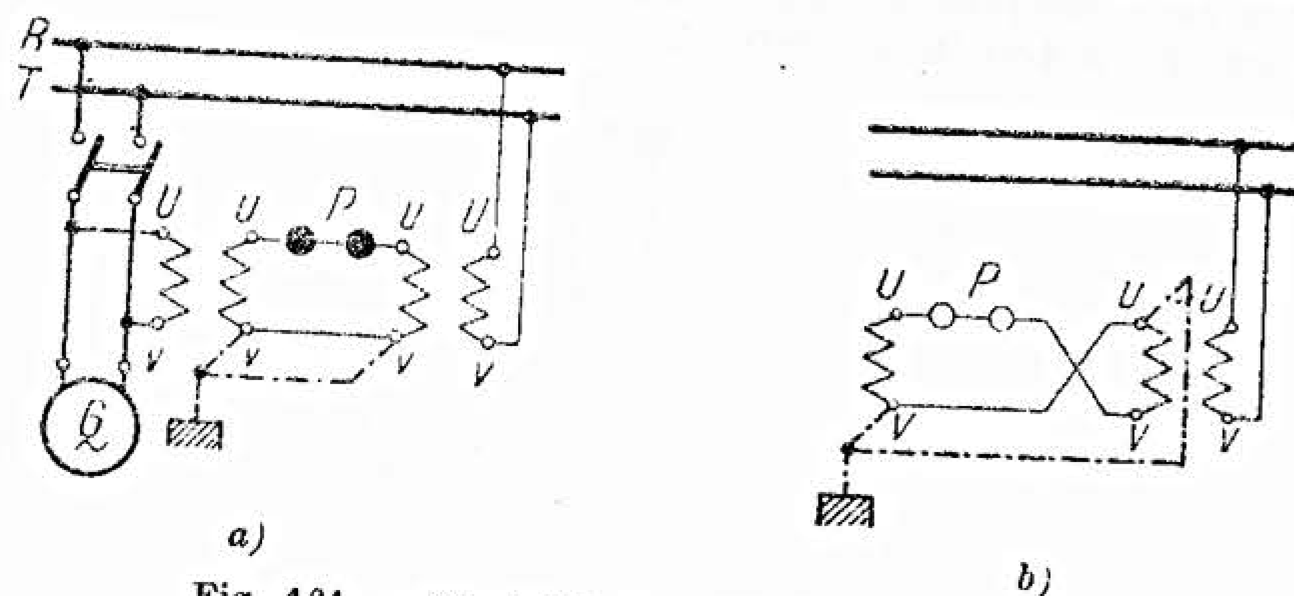


Fig. 161. — Montaj indirect pentru sincronizare
a — la stingere; *b* — la aprindere.

sa este mai mare sau mai mică decât a reţelei). Acest dispozitiv indică şi cum trebue reglată viteza maşinii de cuplat. Cuplajul alternatorului se face în momentul în care lampa legată între o fază a reţelei şi faza corespunzătoare a alternatorului rămâne stinsă. In practică, sincronoscopul este construit cu 6 lămpi legate două câte două în paralel şi aşezate pe acelaşi diametru. La acest montaj, în loc de focul învârtitor dela sincronoscopul cu trei lămpi, apare o pată întunecată şi una luminoasă (sub globul translucid al aparatului), care se învârtesc. Punerea în paralel se face când pata luminoasă stă pe loc, într'o anumită poziţie.

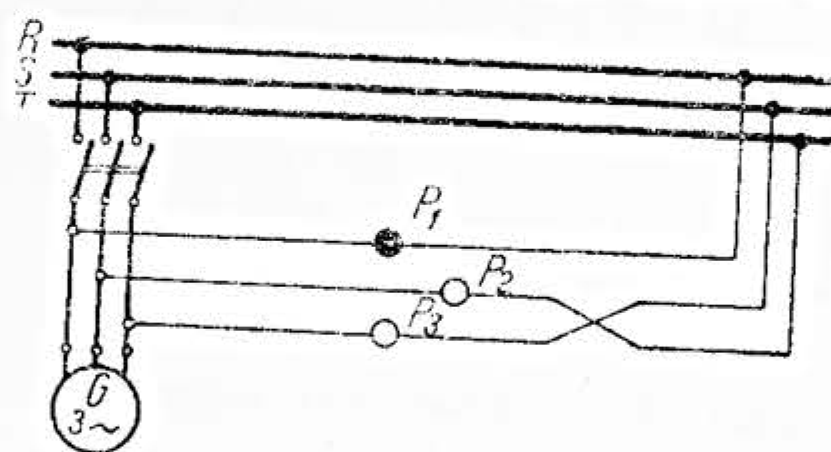


Fig. 162. — Montajul lămpilor unui sincronoscop cu foc învârtitor.

Sincronoscopul cu lămpi se întrebuinţează în general pentru uzine mici şi funcţionează satisfăcător, mai ales dacă este aşezat în umbră.

Pentru uzinele mari, se întrebuinţează sincronoscopul cu ac învârtitor, care se compune dintr'un stator P, pe ale cărui piese polare sunt aşezate bobinele magnetizante şi dintr'un rotor A cu o înfăşurare trifazată. Bornele *4* şi *5* dela stator se leagă la două faze ale maşinii de pus în paralel; bornele *1*, *2*, *3* se leagă prin trei rezistenţe la barele uzinei. Consumul propriu în rotor este de circa 19 W, în stator de circa 2 W (fig. 163 şi 164).

Acul se învârteşte într'un sens sau altul, după cum maşina de cuplat se învârteşte mai repede sau mai încet decât viteza de sincronism. La sincronism, acul rămâne fix în poziţia verticală, indicată printr'un reper, sau trece foarte încet prin faţa lui. Intrerupătorul se închide totdeauna când acul trece prin dreptul reperului în direcţia « prea repede ».

Pentru a se evita ca acul să se rotească prea repede, sincronoscopul nu se leagă la reţea decât dacă maşina este aproape de sincronism, ceeace se poate constata cu ajutorul frecvenţmetrului dublu sau cu ajutorul unor lămpi de sincronizare. Pentru tensiuni înalte se întrebuinţează aceleaşi metode ca şi pentru joasa tensiune.

Pentru a avea toate aparatele la îndemână, ele se reunesc într'un singur corp, care se aşează fie pe pupitrul de comandă, fie pe tabloul general.

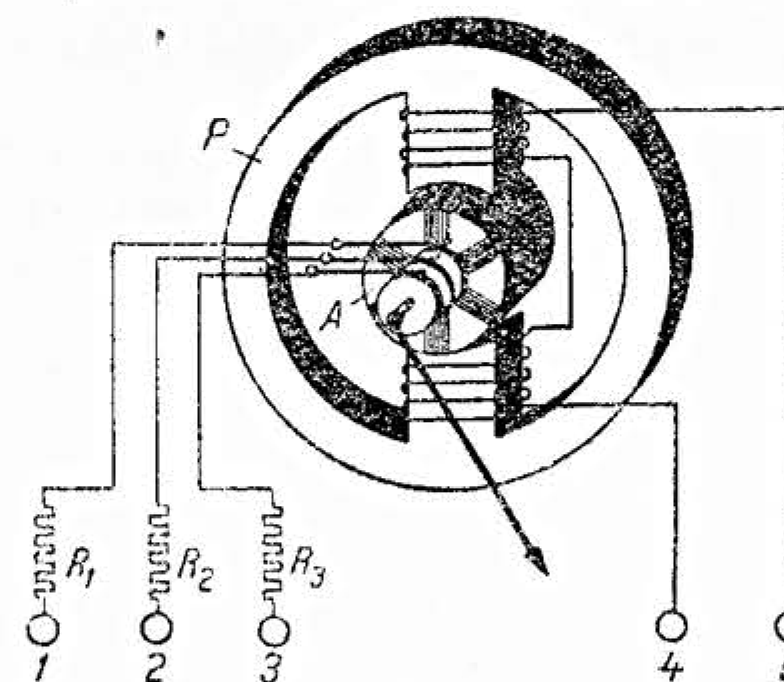


Fig. 163. — Sincronoscop cu ac indicator.

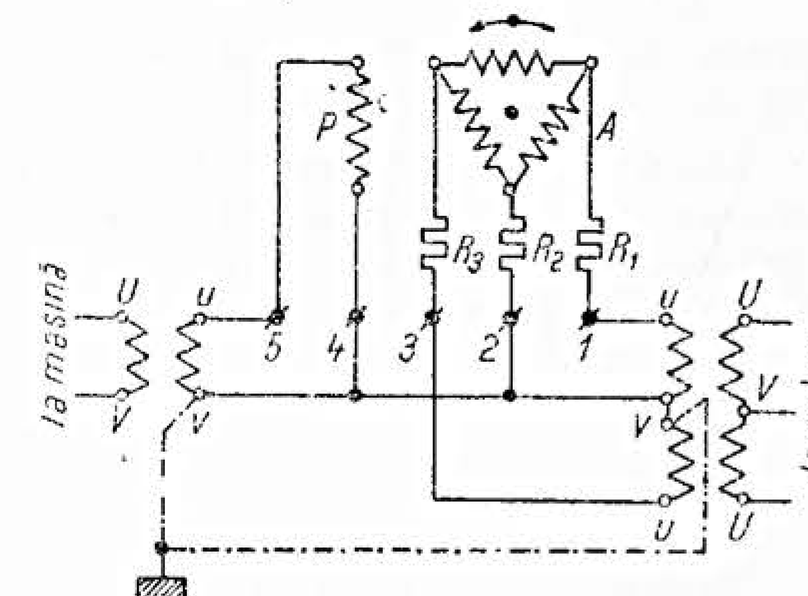


Fig. 164. — Montajul unui sincronoscop trifazat cu ac indicator pe transformatori de tensiune; *stânga* — la maşină; *dreapta* — la reţea.

g) Măsurarea rezistenţelor

179. **Materiale conductoare şi izolante.** Nu există o demarcaţie netă între materialele denumite « conductoare » şi cele « izolante ».

Primele opun trecerii curentului rezistenţe cu mult mai mici decât celelalte; rezistenţele pot varia dela valorile cele mai mici până la sute de mii de ohmi. Peste aceste valori, se consideră că rezistenţele intră în domeniul rezistenţelor de izolaţie.

Metodele de măsurare a rezistenţelor sunt deosebite, după ordinul de mărime a rezistenţelor respective.

180. **Metoda ampermetrului şi voltmetrului** este metoda cea mai simplă pentru măsurarea rezistenţelor curente din tehnica industrială, cuprinse între zecimi de ohmi şi mii de ohmi.

Montajul se poate face în două moduri, după cum voltmetrul se leagă la bornele rezistenţei de măsurat (montajul aval), sau la bornele ansamblului rezistenţelor de măsurat — ampermetru (montaj amonte).

In fig. 165 este reprezentat montajul *aval*.

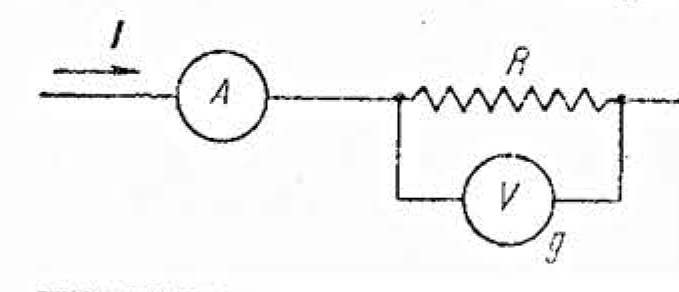


Fig. 165. — Montaj aval pentru măsurarea rezistenţelor.

Dacă g este rezistenţa interioară a voltmetrului, U tensiunea citită la voltmetru şi I curentul citit la ampermetru, valoarea reală a rezistenţei este:

$$R_x = \frac{U}{I - \frac{U}{g}}, \qquad (180.1)$$

$\frac{U}{g}$ fiind curentul care trece prin voltmetru.

Asupra acestei valori se comite numai eroarea datorită nepreciziei aparatelor şi a cărei expresie este

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \pm \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\right)\left(1 + \frac{R_x}{g}\right)$$

în care $\frac{\Delta U}{U}$ şi $\frac{\Delta I}{I}$ sunt erorile relative (maxime probabile) de etalonare ale voltmetrului şi ampermetrului şi care se pot calcula imediat din indicaţiile aparatelor şi din cunoaşterea clasei lor de precizie.

Dacă nu cunoaştem rezistenţa g a voltmetrului şi nu putem afla deci valoarea exactă din formula (180.1) suntem obligaţi să adoptăm pentru rezistenţa de măsurat R_x valoarea care s'ar obţine din raportul indicaţiilor voltmetrului şi ampermetrului

$$R_m = \frac{U}{I}.$$

Eroarea de metodă în acest montaj este:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = -\frac{R_x}{R_x + g} = -\frac{1}{1+\frac{g}{R_x}},$$

şi este cu atât mai mică cu cât rezistenţa voltmetrului g este mai mare şi cu cât rezistenţa de măsurat R_x este mai mică.

Dacă în montajul amonte reprezentat în fig. 166, r este rezistenţa ampermetrului, valoarea reală a rezistenţei este:

$$R_x = \frac{U - rI}{I}, \tag{180.2}$$

în care rI este căderea de tensiune la bornele ampermetrului.

Eroarea datorită aparatelor este în acest caz

$$\frac{\Delta X}{X} = \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\right)\left(1 + \frac{r}{R_x}\right),$$

care se calculează aşa cum s'a spus mai sus.

Dacă nu se cunoaşte rezistenţa r a ampermetrului, şi nu se poate deci afla valoarea exactă din formula (180.2), se va adopta pentru rezistenţa de măsurat valoarea

$$R_m = \frac{U}{I}.$$

Fig. 166. — Montaj amonte pentru măsurarea rezistenţelor

Eroarea de metodă este:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{r}{R_x},$$

şi este cu atât mai mică cu cât rezistenţa ampermetrului r este mai mică şi cu cât rezistenţa R_x de măsurat este mai mare.

In cazul deci când nu se cunosc rezistenţele r şi g, pentru a obţine o valoare $R_m = \frac{U}{I}$ cât mai apropiată de valoarea reală, rezistenţele mici se vor măsura cu montajul aval, iar cele mari cu montajul amonte.

181. **Metoda comparaţiei.** Se compară între ele două rezistenţe de acelaşi ordin de mărime, parcurse de acelaşi curent.

Montajul este indicat în fig. 167.

Dacă R este o rezistenţă etalon cunoscută, rezistenţa de măsurat

$$R_x = R\frac{U_x}{U},$$

în care U_x este diferenţa de potenţial măsurată la bornele rezistenţei R_x şi U aceea măsurată la bornele rezistenţei R, curentul din circuit fiind reglat, dacă este nevoe, la aceeaşi valoare pentru ambele măsurători, cu ajutorul reostatului r. Relaţia de faţă ar fi exactă în cazul când $R_x = R$. In caz contrar, se comite o eroare sistematică a cărei expresie este

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_x - R}{R_x + g},$$

în care g este rezistenţa voltmetrului.

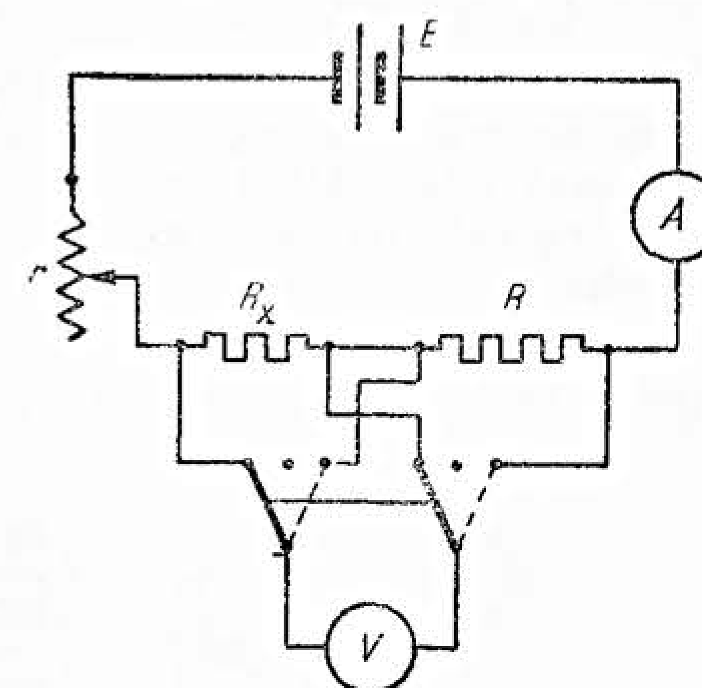


Fig. 167. — Măsurarea rezistenţelor prin metoda comparaţiei

Metoda se întrebuinţează în special pentru rezistenţe mici şi devine o metodă de precizie dacă tensiunile U_x şi U se măsoară prin metode potenţiometrice (subcap. *F*, § 103).

182. **Metodele de punte** sunt metode de precizie pentru măsurarea rezistenţelor.

183. **Puntea Wheatstone** se întrebuinţează pentru măsurători de rezistenţe cuprinse între circa 1 Ω şi 1 MΩ. Schema punţii este redată în fig. 168 în care pentru punţile de precizie a şi b sunt deobicei două cutii de rezistenţe cu fişe de 1 + 10 + 100 + 1000 Ω (subcap. *C*, § 23) care constitue braţele punţii.

R este o rezistenţă de comparaţie cu decade, de 1—10 000 Ω;

R_x — rezistenţa de măsurat;

G — un galvanometru de curent continuu de sensibilitate 10^{-7}~10^{-9}A/mm;

r — rezistenţă pentru limitarea curentului în montaj;

E — f.e.m., deobicei de 1,5—4 V (pile sau acumulatori).

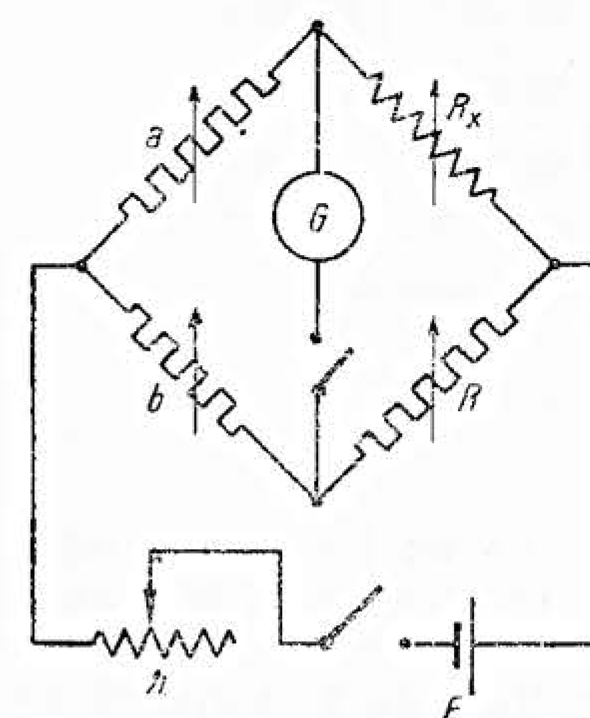


Fig. 168. — Schema de principiu a punţii Wheatstone

Pentru un raport ales $\frac{a}{b}$, se variază R până la obţinerea echilibrului la galvanometru (rezistenţa r fiind scurtcircuitată la echilibru, pentru a se mări sensibilitatea punţii). La echilibru,

$$R_x = R\frac{a}{b}.$$

Precizia măsurătorilor cu punţile de precizie este de circa 0,5%. Eroarea relativă maximă probabilă a măsurătorii cu puntea Wheatstone este dată de relaţia

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b},$$

în care $\frac{\Delta R}{R}$, $\frac{\Delta a}{a}$ şi $\frac{\Delta b}{b}$ sunt erorile relative de etalonare a rezistenţelor întrebuinţate, a căror valoare comună poate varia între $\frac{1}{5000}$ şi $\frac{1}{500}$. Teoretic, sensibilitatea maximă se obţine în cazul când

$$a = b = R = R_x = \text{rezistenţa galvanometrului.}$$

Sensibilitatea poate fi mărită prin sporirea f.e.m. E şi întrebuinţarea unui galvanometru mai sensibil (circa 1×10^{-9} A/mm). La executarea unei măsurători, pentru alegerea raportului a/b trebue să se ţină seama de curenţii maximi care sunt admisibili în rezistenţele punţii. In anumite cazuri şi pentru a ţine seama de cele de mai sus, diagonala pilei se va schimba cu diagonala galvanometrului.

Realizările constructive ale punţii Wheatstone sunt diferite. In fig. 169 este reprezentată schema unei punţi de precizie, cu decade şi fişe.

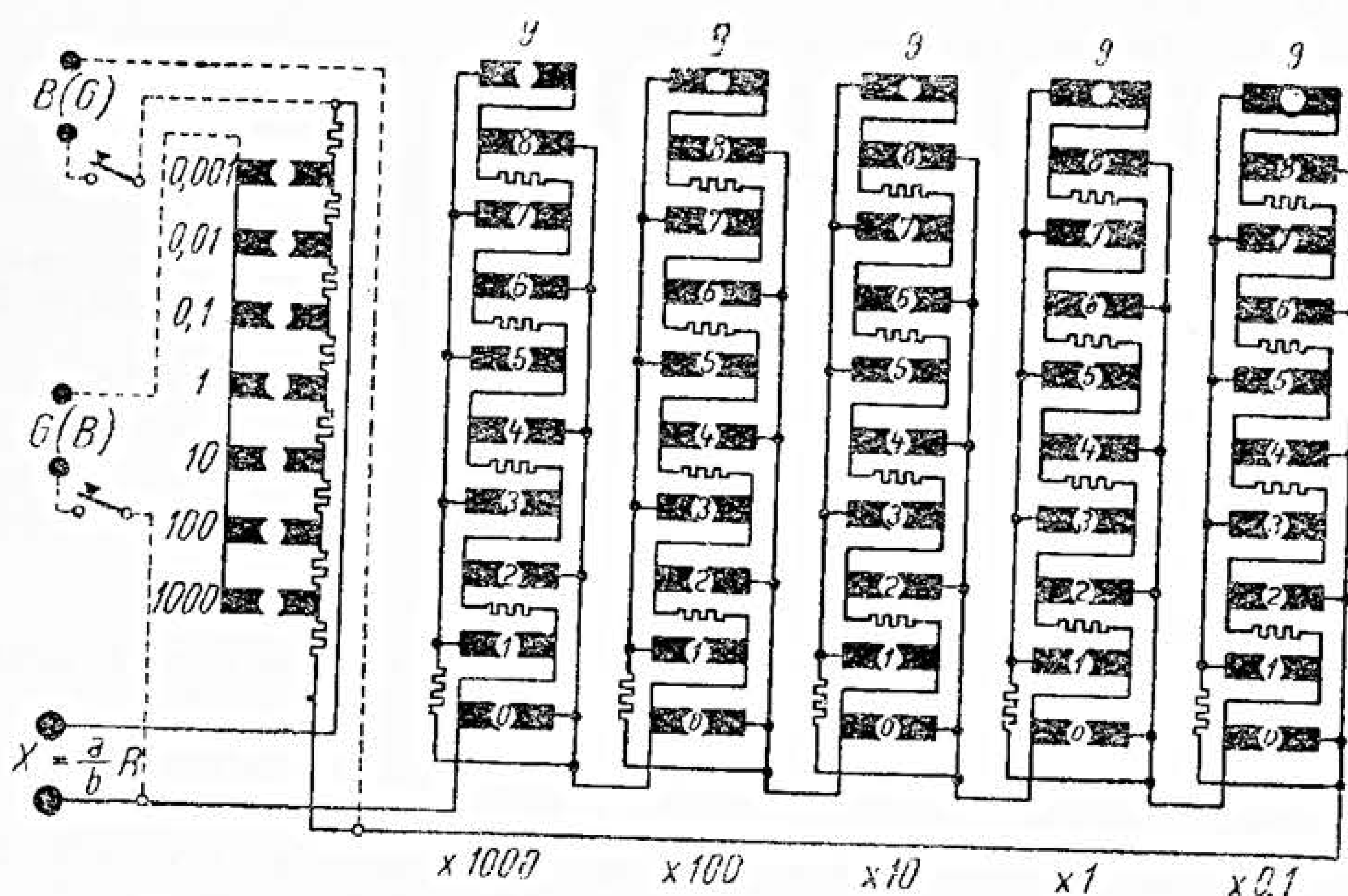


Fig. 169. — Puntea Wheatstone de precizie cu decade şi fişe.

In fig. 170 şi 171 este reprezentată o punte cu fir, de un tip întrebuinţat pentru măsurători curente. La această punte, rezistenţa de comparaţie R se fixează la o anumită valoare (0,1 — 1 — 10 — 100 sau 1000 Ω) şi se variază raportul a/b, rezistenţele a şi b fiind formate din rezistenţele fixe R_a şi R_b în serie cu un fir cu cursor S.

Punţile Wheatstone pot fi alimentate şi în *curent alternativ*, pentru măsurători de inductanţe, inductanţe mutuale, capacităţi, etc., în care caz se alimentează cu o sursă de tensiune alternativă de frecvenţă industrială, dar mai ales de frecvenţă muzicală (800—1000 Hz), furnizată de o mică bobină de inducţie, de un vibrator sau de un oscilator, iar aparatul de zero este sau un galvanometru de vibraţii, când tensiunea de alimentare este sinusoidală, sau un telefon când puntea este alimentată cu un vibrator cu tensiune nesinusoidală.

184. **Măsurări de rezistenţe electrolitice.** Ca o aplicaţie la măsurările de rezistenţe cu punţile alimentate în curent alternativ, în fig. 172 este reprezentată schema unei astfel de punţi pentru măsurarea rezistenţei electroliţilor.

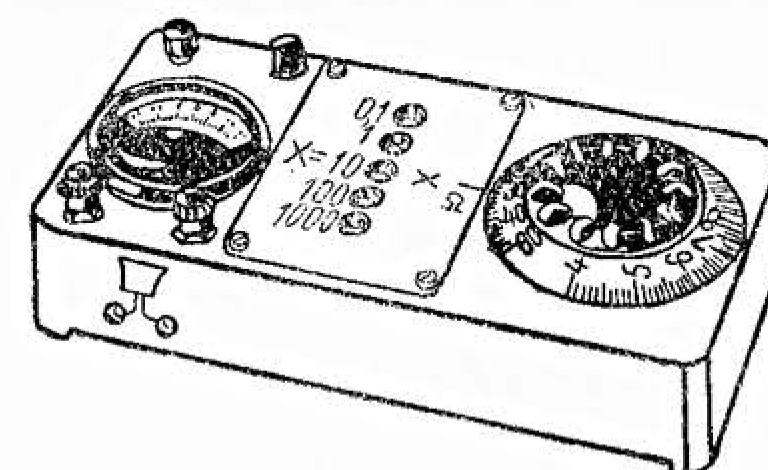


Fig. 170. — Aspectul exterior al punţii Wheatstone cu fir

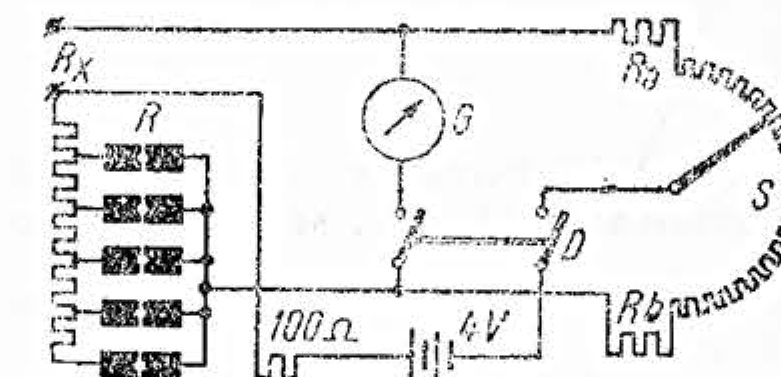


Fig. 171. — Schema electrică a punţii Wheatstone cu fir

Braţele de punte a şi b sunt formate aici dintr'o rezistenţă cu fir $a' + b'$ şi cursor, la extremităţile căreia pot fi adăugate în serie alte două rezistenţe fixe R_a şi R_b, a căror valoare comună este de 4,5 ori rezistenţa firului; aceste două rezistenţe pot fi scurtcircuitate cu doi întrerupători.

Firul $a' + b'$ este împărţit în general în 100 de diviziuni, care se citesc pe o riglă gradată.

Raportul braţelor de punte $\frac{a}{b}$ poate avea una din valorile:

$\frac{a'}{100 - a'}$ cu rezistenţele R_a şi R_b scurtcircuitate;

$\frac{a' + 450}{100 - a'}$ cu rezistenţa R_b scurtcircuitată;

$\frac{a'}{550 - a'}$ cu rezistenţa R_a scurtcircuitată;

$\frac{a' + 450}{550 - a'}$ cu ambele rezistenţe R_a şi R_b în serie;

deci raportul $\frac{a}{b}$ poate căpăta orice valoare în condiţii optime.

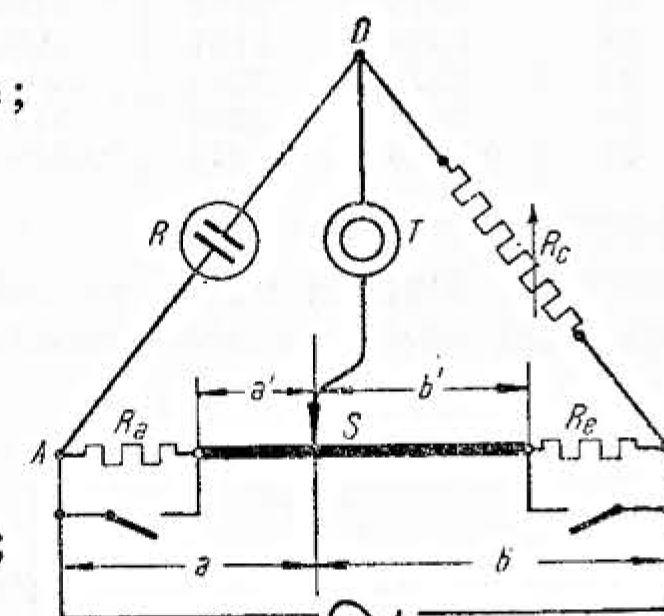


Fig. 172. — Punte cu fir pentru măsurarea rezistenţelor electrolitice

R_c este o rezistenţă de comparaţie, formată dintr'o cutie de rezistenţe de precizie cu fişe;

R este rezistenţa de măsurat, formată dintr'un electrolit închis într'o celulă de sticlă şi având doi electrozi platinaţi.

Puntea este alimentată cu curent alternativ de 800—1000 Hz, produs de un vibrator; instrumentul de zero este în acest caz un telefon T.

Pentru măsurarea rezistenţei electrolitului, se procedează în modul următor:

Se introduce în celula electrolitică un lichid de rezistivitate cunoscută ρ_e şi se măsoară rezistenţa R_e a electrolitului, variind raportul $\frac{a}{b}$ prin deplasa-

rea cursorului S, până la obţinerea sunetului minim în telefon; în acest caz:

$$R_e = R_c \frac{a}{b}; \text{ dar } R_e = \rho_e \frac{l}{s},$$

l fiind distanţa dintre electrozi şi s suprafaţa acestora. Se deduce de aici ceeace se numeşte constanta celulei:

$$C = \frac{l}{s} = \frac{R_e}{\rho_e}.$$

Pentru măsurarea rezistivităţii ρ a unui electrolit oarecare, se umple celula cu electrolitul respectiv, se măsoară ca mai sus rezistenţa R a electrolitului:

$$R = \rho \frac{l}{s} = \rho C$$

şi se obţine astfel rezistivitatea electrolitului din relaţia: $\rho = \frac{R}{C}$.

In tabela 18, se dau conductivităţile în Ω^{-1} cm^{-1} la diferite temperaturi şi pentru diverşi electroliţi.

Tabela 18

Temperatura °C	Na_2SO_4 max.	NaCl saturat	$MgSO_4$ max.	KCl normal	KCl 1/10 normal	KCl 1/30 normal	KCl 1/100 normal	Gips saturat
15	0,7028	0,2015	0,04555	0,09254	0,01048	0,002243	0,001147	0,001734
16	7151	2036	4676	09443	1072	2294	1173	1782
17	7275	2112	4799	09633	1095	2345	1199	1831
18	7398	2161	4922	09824	1119	2397	1225	1880
19	7522	2210	5046	10016	1143	2449	1251	1928
20	7645	2260	5171	10209	1167	2501	1278	1976
21	0,7768	0,2310	0,05297	0,10402	0,01191	0,002553	0,001305	0,002024

185. **Puntea dublă** se întrebuinţează pentru măsurători de rezistenţe mici (sub 1 Ω), căci prin acest montaj se elimină rezistenţele de contact. Schema principială este redată în fig. 173, în care:

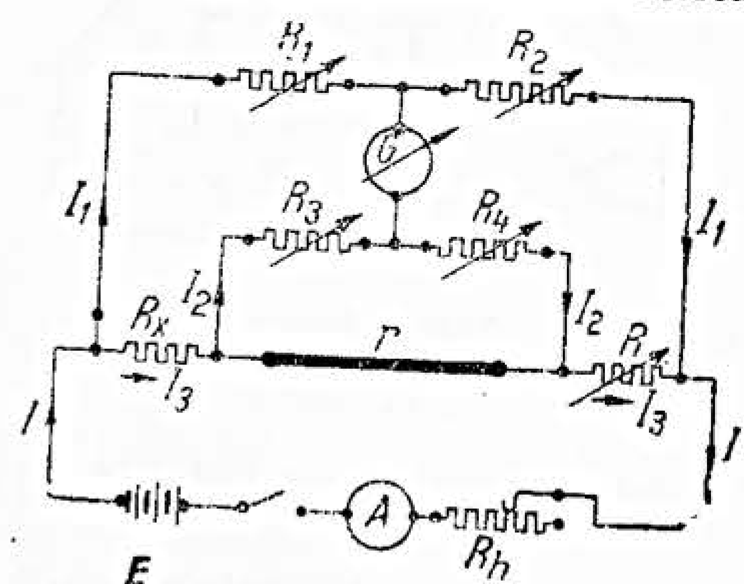


Fig. 173. – Schema principială a punţii duble

R_x este rezistenţa de măsurat;
R_1, R_2, R_3, R_4 — rezistenţe de precizie variabile, cu fişe sau ploturi;
R — rezistenţa de comparaţie;
R_0 — rezistenţa firului de legătură între R şi R_x;
G — galvanometru de curent continuu.

Dacă se ia $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ şi se variază R până la obţinerea echilibrului:

$$R_x = R \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_0 (R_1 R_4 - R_2 R_3)}{R_2 (R_3 + R_4 + R_0)} = R \frac{R_1}{R_2}$$

In cazul când din motive constructive $R_1 R_4 - R_2 R_3$ nu este chiar zero, pentru a se putea aplica formula simplă

$$R_x = R \frac{R_1}{R_2},$$

trebue ca $R_0 = 0$ adică practic, firul de legătură între rezistenţa R_x şi rezistenţa calibrată R să aibă o rezistenţă cât mai redusă.

Ca rezistenţă de comparaţie R se ia fie un conductor calibrat pe care se mişcă un cursor (în execuţiile mai vechi), fie o rezistenţă etalon fixă R_c (în realizările moderne). In acest caz, pentru obţinerea echilibrului, se variază simultan R_1 şi R_3 ca în schema din fig. 174, făcându-se în mod automat şi variaţia rezistenţelor R_2 şi R_4, astfel ca relaţia $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ să fie satisfăcută.

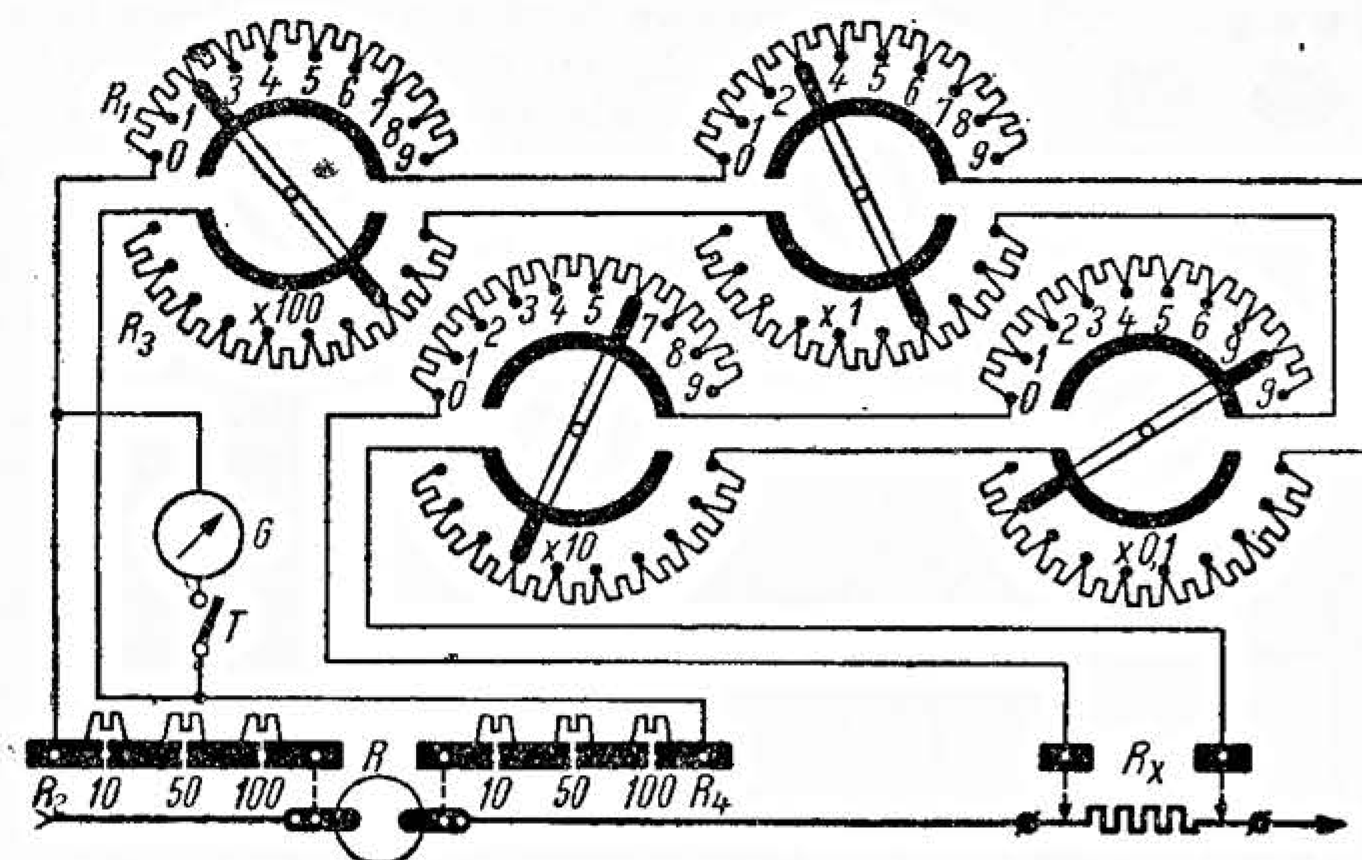


Fig. 174. – Punte dublă cu rezistenţă etalon

Cu puntea dublă se măsoară, între altele, rezistivităţile conductorilor electrici. Măsurându-se rezistenţa unei lungimi de l m dintr'un conductor şi cunoscând secţiunea conductorului s, în mm², rezistivitatea este:

$$\rho = R \frac{s}{l} \text{ în } \Omega \cdot mm^2/m,$$

la temperatura t a măsurătorii.

Pentru a determina rezistivitatea la o altă temperatură, de exemplu la 20°C, se va întrebuinţa formula aproximativă

$$\rho_{20} = \rho_t [1 + \alpha (20° - t)],$$

în care α este coeficientul de temperatură al rezistivităţii metalului respectiv la temperatura t.

Pentru conductorii de cupru în special, pentru care s'a măsurat rezistivitatea ρ_t la o temperatură anumită t, rezistivitatea ρ_{t_0} la o altă temperatură t_0, se poate calcula corect considerând că rezistivitatea cuprului creşte cu 0,000068 Ω mm²/m, pentru fiecare creştere de 1°C a temperaturii: $\rho_{t_0} = \rho_t + 0,000068\ (t_0 - t)$.

In fig. 175 şi 176 este reprezentat aspectul şi schema electrică a unei punţi universale sovietice tip MTV-1, în care sunt combinate o punte Wheatstone şi una dublă (Thomson); cu aceasta se pot măsura rezistenţe între 10^{-6} şi 10^{6} Ω.

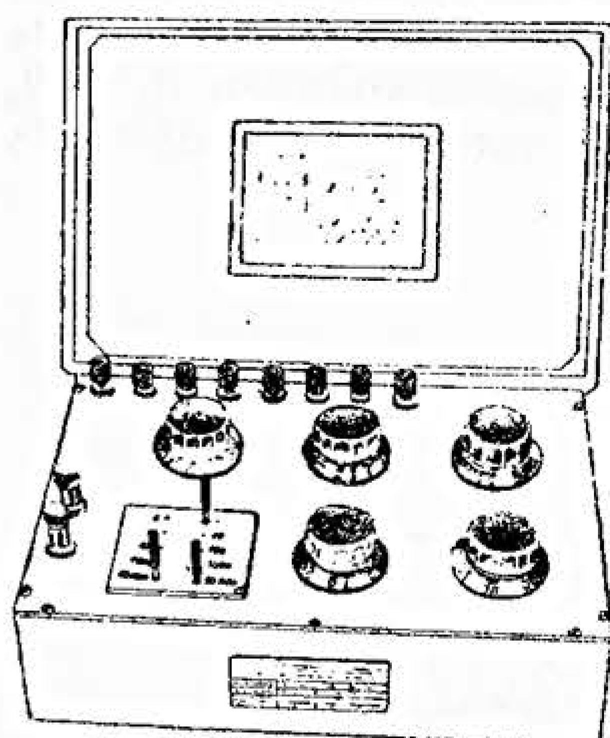
In ce priveşte eroarea de măsurare la puntea dublă, ea are o expresie analoagă cu aceea dela puntea Wheatstone:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta l}{l},$$

$\frac{\Delta l}{l}$ fiind eroarea de citire a poziţiei cursorului pe rigla rezistenţei calibrate de comparaţie R.

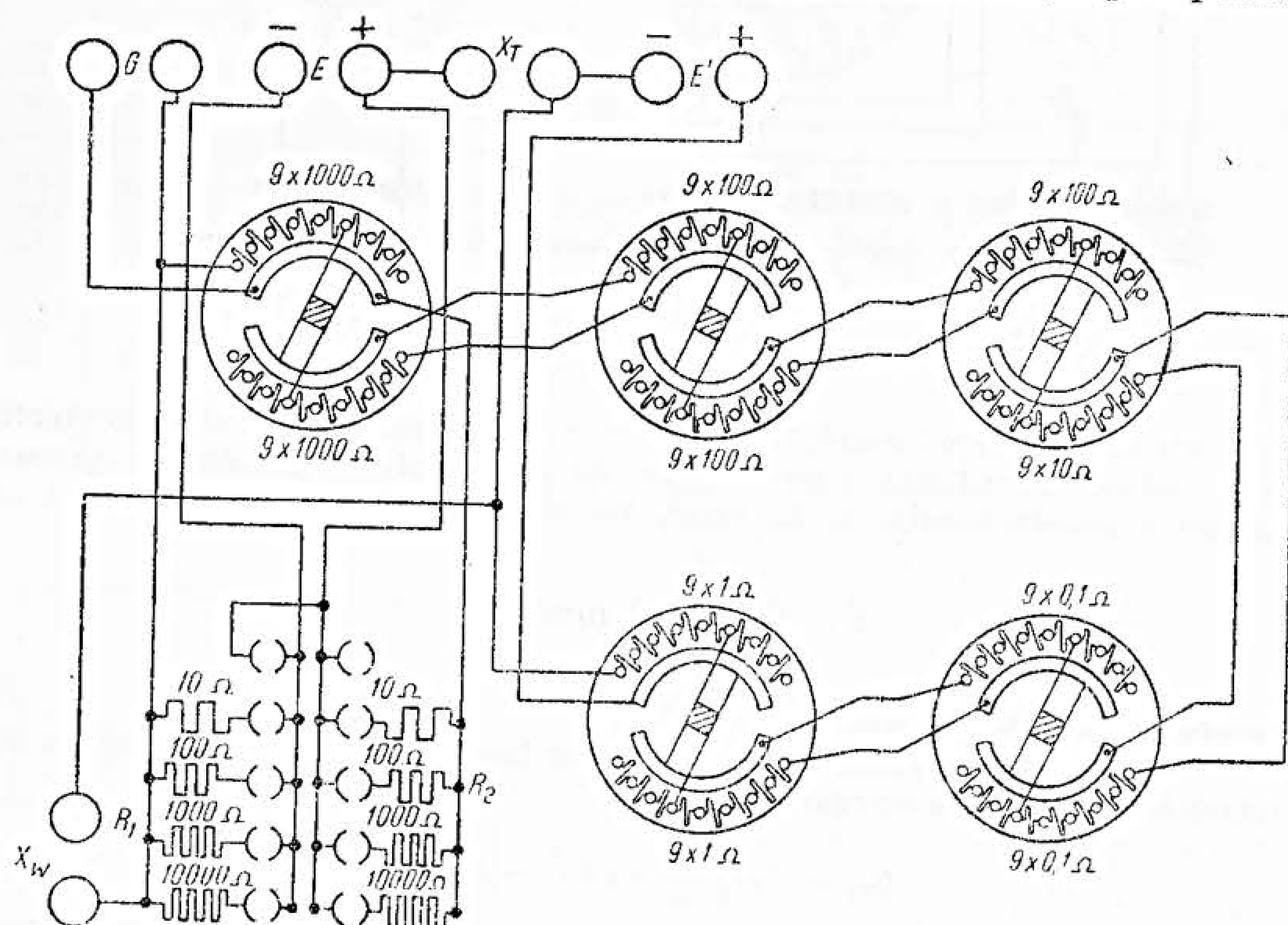
Aceasta presupune bineînţeles că s'au luat măsurile necesare pentru a nu se trece prin rezistenţa de măsurat R_x un curent mai mare decât acela care ar produce încălzirea ei, întrucât în acest caz rezistenţa ar lua o altă temperatură decât aceea ambiantă, la care se execută măsurătoarea.

Deasemenea curentul în circuitul de alimentare este limitat de valoarea maximă admisibilă pentru curentul din rezistenţa calibrată R.



a)

186. Rezistenţe de izolaţie. Prin rezistenţa de izolaţie a unui dielectric, se înţelege capacitatea lui



b)

Fig. 175–176. – Punte universală tip MTU-1 pentru măsurări de rezistenţe
a – vedere; b – schema electrică

de a se opune trecerii curentului electric dat de o tensiune continuă U, valoarea acestei rezistenţe fiind:

$$R_x = \frac{U}{I}.$$

Se deosebesc două feluri de rezistenţe de izolaţie şi anume:

Rezistenţa interioară, (sau de volum) adică de trecere a curentului prin masa dielectricului prins între doi electrozi (ca de exemplu rezistenţa de izolaţie între conductorul unui cablu de forţă izolat cu un dielectric şi mantaua de plumb, rezistenţa între doi conductori izolaţi ai aceluiaşi cablu, rezistenţa între conductorul de cupru al înfăşurării unei maşini electrice şi carcasa maşinii, etc.).

Rezistenţa la suprafaţă, adică de trecere a curentului între electrozi pe la suprafaţa dielectricului (ca de exemplu rezistenţa de izolaţie a unui izolator pentru liniile telefonice între firul conductor şi suportul metalic de fixare pe stâlp, rezistenţa de izolaţie între două cleme metalice fixate pe aceeaşi parte a unei plăci de material izolant, etc.).

Aceste rezistenţe de izolaţie se deosebesc fundamental de rezistenţele conductorilor metalici, atât prin mărimea lor (care este de sute de mii de ohmi, de megohmi şi chiar de sute de mii de megohmi), cât şi prin dependenţa lor de anumiţi parametri, astfel cum se indică la § 187.

Din această cauză măsurarea rezistenţelor de izolaţie nu se mai poate face prin mijloacele obişnuite de măsurare descrise mai sus, ci prin metode speciale ca: *metoda galvanometrului,* (cea mai întrebuinţată) *metoda pierderii de sarcină,* etc. Acestea constitue metode întrebuinţate în laborator pentru studiul dielectricilor. In practica industrială însă pentru măsurarea rezistenţelor de izolaţie, se întrebuinţează aparate industriale denumite ohmmetre, megohmmetre, etc., care sunt aplicaţia industrială a metodei galvanometrului.

187. Metoda galvanometrului constă în măsurarea curentului de trecere prin dielectric, sau a curentului de scurgere pe la suprafaţa dielectricului, între doi electrozi, între care se aplică o diferenţă de potenţial continuă U.

Astfel, în fig. 177 este reprezentat montajul măsurării rezistenţei interioare a unei plăci de material izolant.

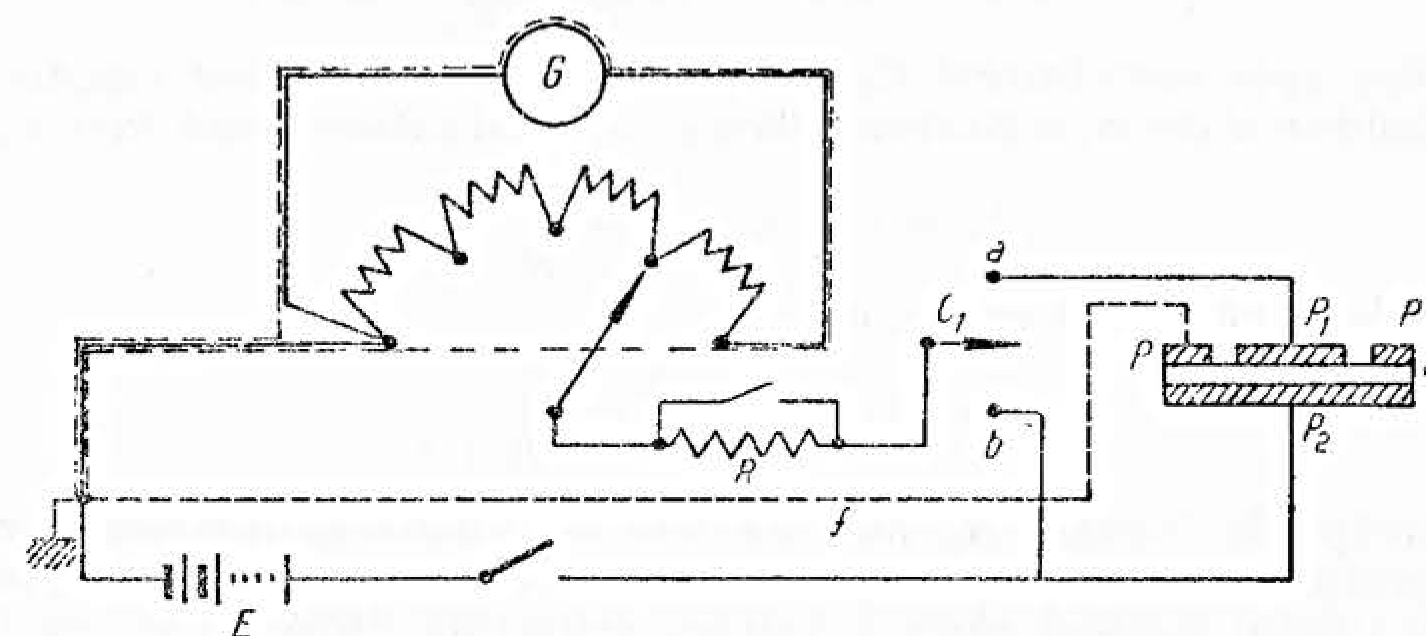


Fig. 177. – Măsurarea rezistenţei interioare a unei plăci din material izolant

Sursa de curent continuu E este în general o baterie de elemente uscate, eventual tensiunea continuă furnizată de un redresor de curent alternativ; valoarea ei variază între 100—200 V pentru măsurătorile curente, putând ajunge şi valori de 500—1000 V; această sursă se pune în serie cu placa de material izolant D prinsă între electrozii P_1, P_2, cu un comutator C_1 şi cu un galvanometru G de mare sensibilitate (10^{-10} A/mm), care are un şunt universal S pentru reducerea sensibilităţii galvanometrului în trepte zecimale $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, şi $\frac{1}{10\,000}$ şi o rezistenţă R de ordinul a 1 M Ω, care serveşte atât la protecţia galvanometrului, cât şi la etalonarea acestuia.

In jurul electrodului P_1 se montează un electrod auxiliar în formă de inel, constituind ceeace se numeşte un inel de gardă, al cărui rol este indicat mai departe.

Pentru măsurarea curentului i care trece prin dielectric, se pune comutatorul C_1 pe poziţia a şi şuntul S pe poziţia care dă o deviaţie convenabilă α la galvanometru, începând dela cea mai mică sensibilitate, ca măsură de prudenţă.

Dacă n este puterea de multiplicare a şuntului, corespunzătoare unei anumite sensibilităţi (pentru 1/1000 de exemplu, $n = 1000$), iar k este constanta galvanometrului din relaţia $i = k\alpha$, valoarea curentului este $i = nk\alpha$ şi deci valoarea rezistenţei de izolaţie R_x a dielectricului se află din relaţia:

$$i = \frac{U}{R + R_x},$$

$$R_x = \frac{U}{i} - R$$

$$R_x = \frac{U}{nk\alpha} - R,$$

tensiunea U la bornele sursei $\grave{E}$ măsurându-se cu un voltmetru de mare rezistenţă interioară.

Un al doilea mod de a proceda este acela al *metodei de substituţie*, care constă în a etalona galvanometrul la fiecare măsurătoare cu ajutorul rezistenţei de precizie R.

Se pune comutatorul C_1 pe poziţia „*a*“, ca şi mai sus, şi se măsoară curentul în rezistenţa de măsurat R_x. Se obţine o deviaţie α_x a galvanometrului, corespunzătoare unui şunt n_x, curentul fiind

$$i_x = n_x \alpha_x \cdot K = \frac{U}{R + R_x}.$$

Se pune apoi comutatorul C_1 pe poziţia „*b*“, substituind rezistenţa R_x cu R şi obţinându-se o deviaţie convenabilă α_R corespunzătoare unui şunt n_R:

$$i_R = n_R \cdot \alpha_R \; K = \frac{U}{R}.$$

Din cele două relaţii se obţine:

$$R = R\left(\frac{n_R \, \alpha_R}{n_x \, \alpha_x} - 1\right).$$

Rezistenţa de izolaţie R_x nu este bine determinată, deoarece curentul i_x, care trece prin această rezistenţă R_x sub acţiunea tensiunii aplicate U, este variabil şi scade cu timpul tinzând către o valoare constantă după un interval de timp care poate fi destul de mare.

Deaceea curentul i, adică deviaţia galvanometrului, se măsoară după un anumit interval de timp dela aplicarea tensiunii U (timp de electrizare), care în mod convenţional s'a stabilit în general la 1′ (sau 20″) aflându-se o rezistenţă R_x corespunzătoare.

Rezistenţele de izolaţie depind apoi de o serie de parametri (tensiunea aplicată U, temperatura T şi starea de umiditate a dielectricului), *scăzând* când unul din aceşti parametri *creşte*.

Pentru aceste motive, la măsurarea unei rezistenţe de izolaţie, valorile tensiunii, temperaturii şi umidităţii sub care trebue executată măsurătoarea, este necesar să fie bine precizate.

Pentru executarea corectă a măsurătorii trebue evitat în sfârşit ca prin galvanometru să treacă, în afară de curentul care traversează efectiv rezistenţa

de izolaţie şi curentul de scurgere între cei doi electrozi P_1 şi P_2, pe suprafaţa dielectricului.

Pentru aceasta se utilizează inelul de gardă P, care se leagă prin firul f, reprezentat punctat în schema de montaj din fig. 177 şi legat la acelaşi pol al bateriei E la care este legat şi electrodul P_1.

In acest fel, între electrozii P şi P_1 neexistând diferenţă de potenţial nu există nici curenţi de scurgere, iar curenţii de scurgere dintre P_2 şi P se închid în circuitul bateriei E fără a mai trece prin galvanometru.

Măsurătoarea se mai execută adeseori schimbând polaritatea bateriei E şi făcând media a două măsurători.

Pentru executarea încercării în condiţiile optime, prescripţiile tehnice în vigoare dau indicaţii precise asupra constituirii întregului dispozitiv de montaj, asupra formei şi dimensiunilor electrozilor principali, asupra inelului de gardă şi ecranării, (reprezentată punctat în fig. 177) asupra valorii tensiunii U, etc.

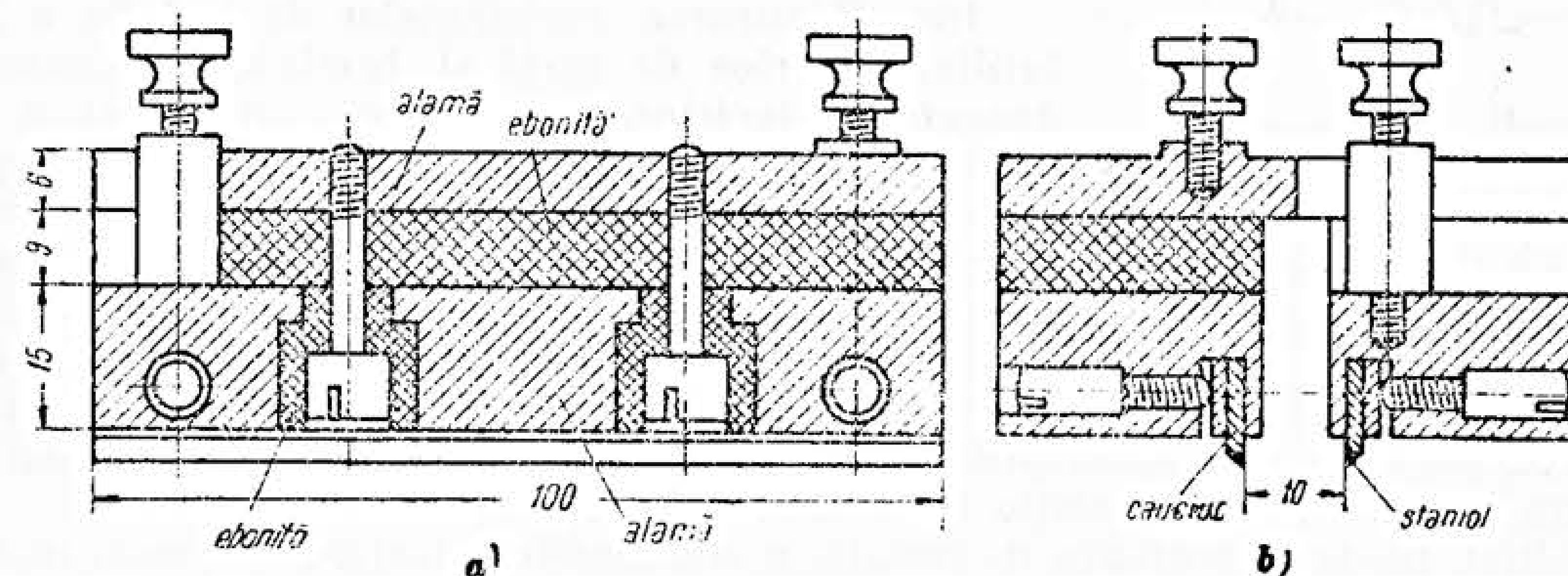


Fig. 178. — Electrozi pentru măsurarea rezistenţei la suprafaţă a unui material izolant; *a)* secţiune longitudinală; *b)* secţiune transversală

Pentru măsurarea rezistenţei la suprafaţă a dielectricilor, se utilizează electrozi de formă specială, ca de exemplu cea reprezentată în fig. 178, măsurătoarea executându-se în general sub o tensiune de 1000 V.

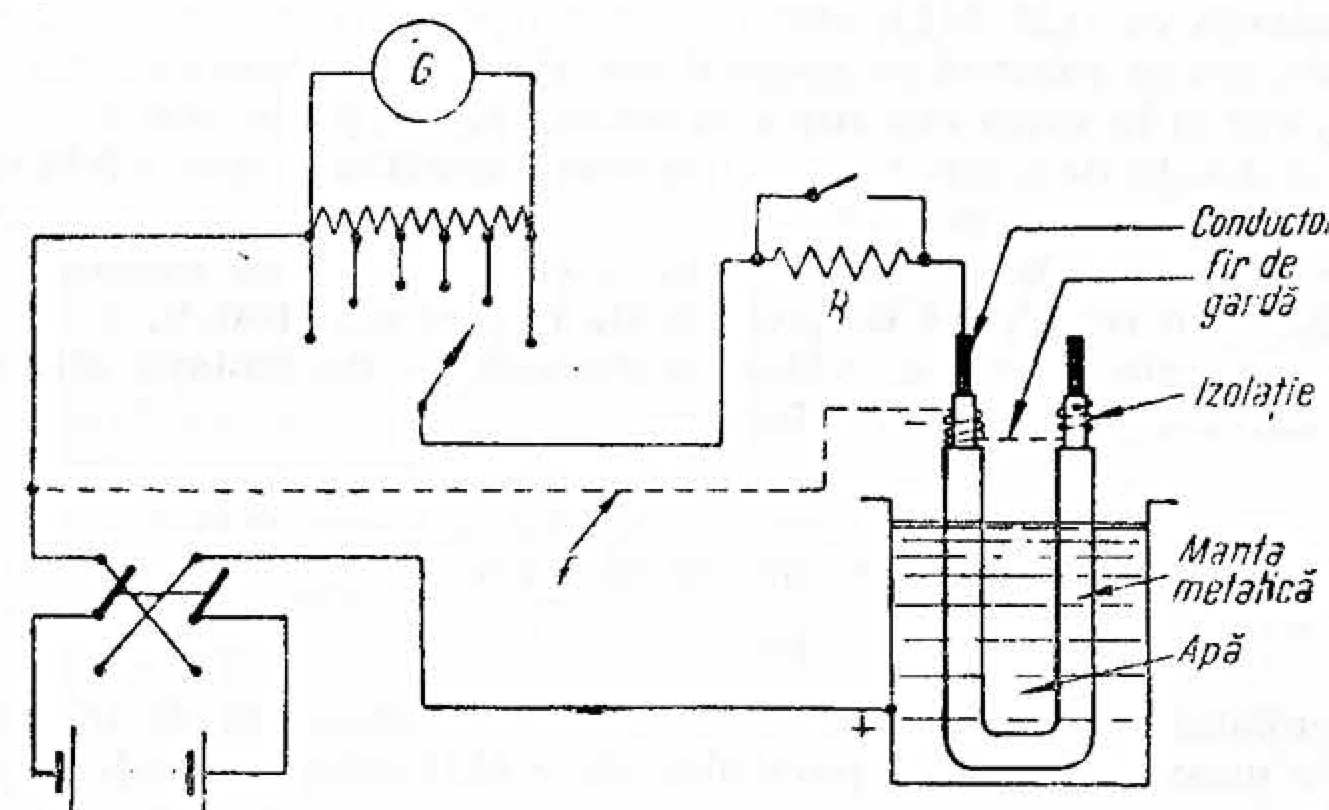


Fig. 179. — Măsurarea rezistenţei de izolaţie a unui cablu

In fig. 179 este reprezentată schema similară a dispozitivului de măsurare a rezistenţei de izolaţie a unui cablu cu înveliş metalic, montat într'un vas metalic plin cu apă.

188. Metoda pierderii de sarcină este reprezentată în fig. 180 în care:
R este rezistenţa de măsurat;
C — o capacitate cunoscută, în μF;
B — un galvanometru balistic;
E — o baterie de pile sau acumulatori.

La închiderea contactului a, se încarcă condensatorul C, care se descarcă imediat în balistic, închizând contactul b.

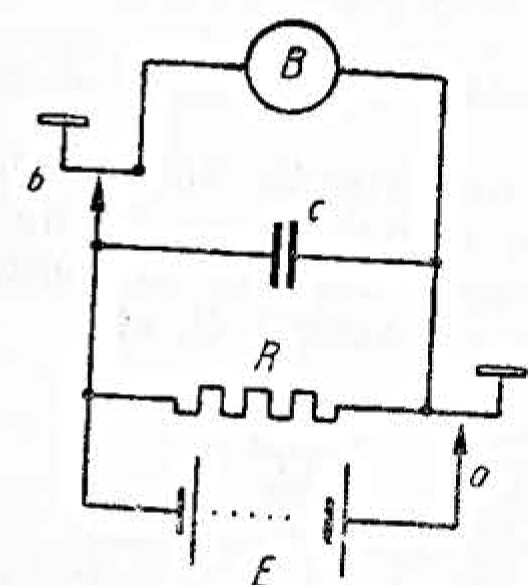


Fig. 180. — Măsurarea rezistenţei de izolaţie prin metoda pierderii de sarcină

Se repetă operaţia, lăsând însă să treacă un timp t între încărcare şi descărcare.

Dacă α_1 şi α_2 sunt elongaţiile respective ale balisticului, valoarea rezistenţei R este:

$$R = \frac{t}{2{,}303\ C\ \lg\ (\alpha_1/\alpha_2)}.$$

189. Măsurarea rezistenţelor de izolaţie a instalaţiilor electrice de forţă şi lumină, a maşinilor şi aparatelor electrice. Funcţionarea ireproşabilă a instalaţiilor electrice de forţă şi lumină, a maşinilor electrice, a aparatelor electrice de manevră şi reglaj, a aparatelor electrice casnice, etc., depinde în primul rând de buna stare a rezistenţei lor de izolaţie.

Pentru acest motiv, măsurarea rezistenţei de izolaţie face negreşit parte din încercările de recepţie ale acestor instalaţii, maşini şi aparate electrice; în prescripţiile tehnice respective, se indică limitele admisibile, sub care rezistenţele de izolaţie nu trebue să coboare.

Altfel, pentru rezistenţa de izolaţie a conductelor electrice ale unei instalaţii de forţă şi lumină, atât între un circuit oarecare şi pământ, cât şi între două circuite independente, se prescrie o rezistenţă minimală de

$$1000\ U\,\Omega$$

U fiind tensiunea de serviciu a instalaţiei exprimată în volţi; adică, pentru o instalaţie de forţă de 220 V se cere o rezistenţă de izolaţie de minimum 0,22 MΩ, pentru 380 V o rezistenţă de 0,38 MΩ, etc.

Măsurătoarea se execută în general sub o tensiune continuă de ordinul tensiunii de serviciu şi în orice caz sub o tensiune de cel puţin 100 V.

Pentru instalaţii de semnalizare, cifra corespunzătoare este 0,3 MΩ, rezistenţa de izolaţie fiind măsurată sub 12 V.

Pentru instalaţii telefonice interioare şi circuite pentru măsurări la distanţă, se cere în general o rezistenţă de izolaţie de 6 MΩ sub 100 V.

Pentru maşinile electrice, valoarea rezistenţei de izolaţie dintre diferitele înfăşurări şi carcasă este dată de formula:

$$R_x = \frac{\text{Tensiunea nominală}}{\dfrac{\text{Puterea nominală în kVA}}{100} + 1000}\ \text{M}\Omega.$$

Pentru aparatele electrice casnice, se cere o rezistenţă de izolaţie a înfăşurărilor faţă de masa metalică a aparatului de 1 MΩ măsurată sub o tensiune continuă de 500 V.

Pentru măsurarea acestor rezistenţe de izolaţie, se întrebuinţează în general aparate industriale numite ohmmetre, megohmmetre, inductori, etc., descrise în cele de mai jos.

190. Măsurarea rezistenţei de izolaţie a circuitelor electrice faţă de pământ. Dacă instalaţia nu se găseşte sub tensiune, măsurătoarea se execută întocmai ca

pentru celelalte rezistenţe de izolaţie menţionate mai sus, cu aparatele industriale descrise la § 191.

Dacă instalaţia se găseşte sub tensiune, se poate întrebuinţa metoda voltmetrului, conform schemei reprezentate în fig. 181, care se referă la o instalaţie de curent continuu.

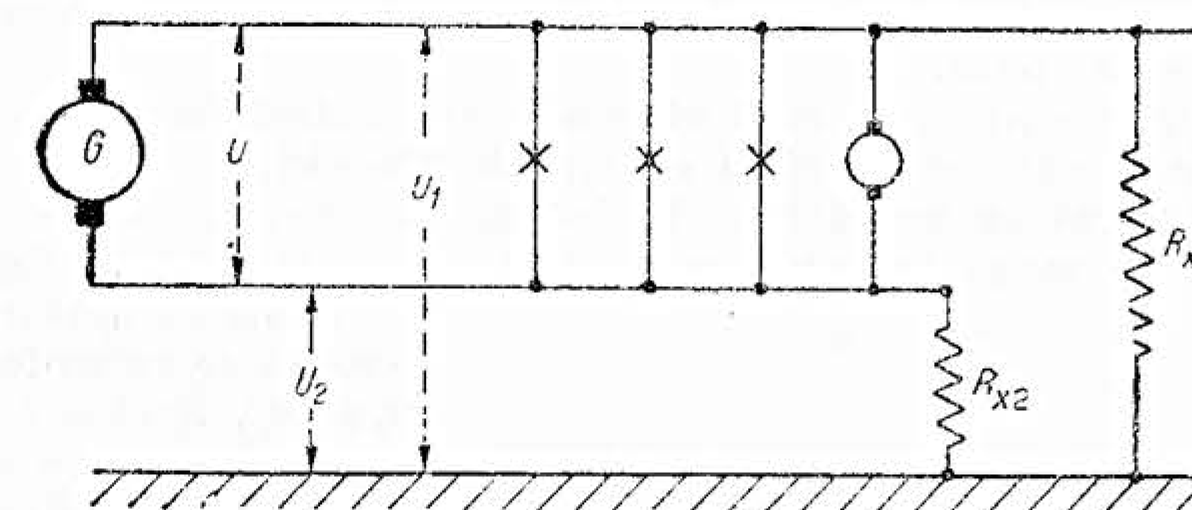


Fig. 181. — Măsurarea rezistenţei de izolaţie cu voltmetrul (circuitul sub tensiune)

Tensiunile între cei doi conductori U şi între fiecare din ei şi pământ U_1 şi U_2 se citesc cu ajutorul unui voltmetru; R fiind rezistenţa interioară a voltmetrului, pentru rezistenţele R_{x_1}, şi R_{x_2} faţă de pământ, se obţin valorile:

$$R_{x_1} = R\cdot\frac{U - U_1 - U_2}{U_2} \qquad R_{x_2} = \frac{U - U_1 - U_2}{U_1}.$$

In curent continuu, se întrebuinţează un instrument cu bobină mobilă, iar în curent alternativ un instrument cu bobină mobilă şi redresor sau termocuplu (circa 1000 Ω/V).

Metoda dă rezultate satisfăcătoare până la rezistenţe de 1 MΩ.

191. Aparatele pentru măsurarea directă a rezistenţelor de izolaţie. Ohmmetre. Pentru rezistenţe până la circa 100 MΩ, se pot întrebuinţa instrumente bazate pe principiul punţii Wheatstone cu fir şi cu o scară gradată în ohmi. Domeniul de măsurare se poate mări, luându-se pentru braţele de punte rezistenţe adecuate.

Ohmmetrele se compun în esenţă dintr'o sursă de curent continuu şi un aparat cu bobină mobilă şi magnet permanent. Sursa poate fi sau o baterie uscată, sau un mic generator de curent continuu cu magnet permanent (magnetou).

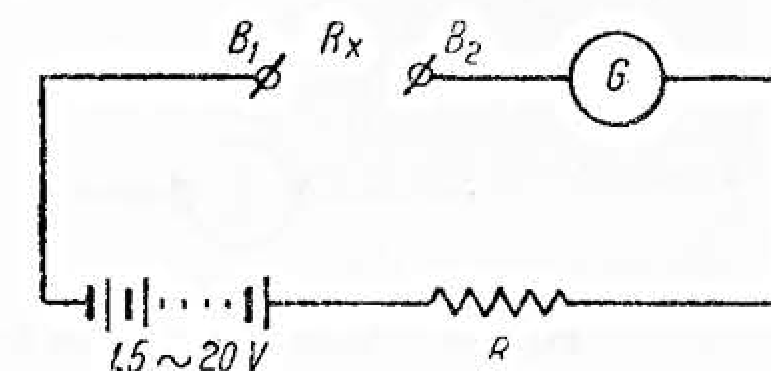


Fig. 182. — Ohmmetrul cu baterie

192. Ohmmetrul de baterie. In fig. 182 este reprezentată schema unui ohmmetru cu baterie.

Aparatul este constituit dintr'o baterie de pile uscate de o anumită f.e.m., din aparatul de măsurat, dintr'o rezistenţă R şi din două borne B_1 şi B_2 la care se leagă rezistenţa de măsurat.

Aparatul se etalonează direct în ohmi în modul următor:

Se scurtcircuitează bornele B_1, şi B_2 (deci $R_x = 0$) şi se alege rezistenţa R astfel ca acul aparatului de măsurat să bată la maximum pentru valoarea nominală a f.e.m.

Apoi se leagă la bornele B_1 B_2 rezistenţe de precizie cunoscute de diverse valori (de la 0 la ∞) şi se înseamnă poziţiile corespunzătoare ale acului pe cadra-

nul aparatului cu valorile rezistenţelor respective, aparatul fiind astfel gradat în ohmi. Pentru măsurarea unei rezistenţe de izolaţie se scurtcircuitează în primul rând bornele B_1, B_2 şi se aduce acul la zero al gradaţiei, cu ajutorul unui şunt magnetic al aparatului de măsurat. Apoi se leagă rezistenţa de măsurat între aceste borne şi se citeşte valoarea în ohmi pe aparat.

Când prin variaţia şuntului magnetic acul nu se poate aduce la zero, bateria trebue schimbată.

Bateriile întrebuinţate în mod obişnuit sunt baterii uscate pentru lămpi de buzunar. Tensiunile utilizate sunt în general de 4,5—18 V.

193. **Ohmmetrul cu magnetou.** În loc de baterie, se poate întrebuinţa ca sursă de curent un magnetou cu manivelă cum este indicat în fig. 183.

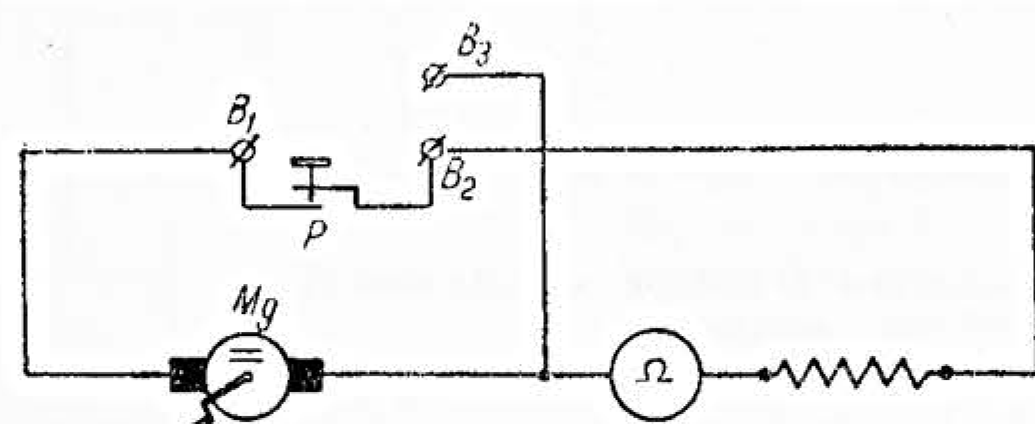


Fig. 183. — Ohmmetrul cu magnetou

Pentru a măsura o rezistenţă, aceasta se racordează la bornele B_1 şi B_2, apoi se scurtcircuitează aceste borne cu ajutorul butonului P şi se roteşte magnetoul Mg cu o viteză potrivită astfel încât acul aparatului să vină la gradaţia zero a scării.

Ridicându-se apoi butonul P şi continuându-se să se rotească magnetoul cu aceiaşi viteză, se citeşte pe scara aparatului rezistenţa în ohmi (sau megohmi). Se observă că la aceste aparate indicaţia depinde de tensiunea aplicată (adică de viteza de rotaţie a manivelei).

Curba de tensiune produsă de magnetou (până la câteva sute de volţi) este ondulată şi poate fi turtită prin întrebuinţarea de condensatori, sau prin executarea

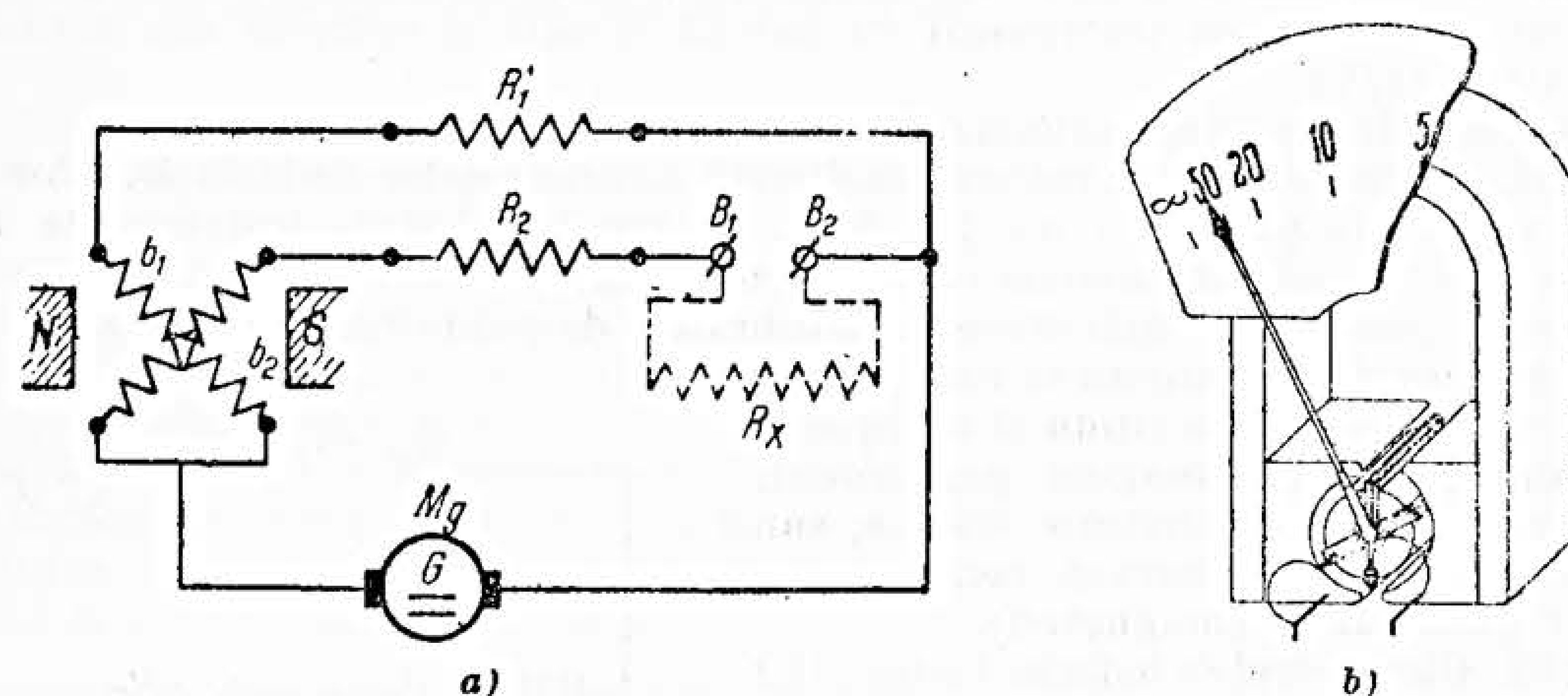


Fig. 184. — Megohmmetrul cu bobine încrucişate (logometrul magnetoelectric)
a — schema electrică; b — vedere

generatorului cu mai multe secţiuni (în general pentru reducerea costului se fac numai două secţiuni). Aparatul poate fi întrebuinţat şi ca voltmetru de curent continuu, între bornele B_2, B_3.

Megohmmetrul cu magnetou şi cu bobine încrucişate (logometrul magnetoelectric). La acest aparat, instrumentul cu bobină mobilă şi magnet permanent este de tipul logometrelor, deci cu două bobine încrucişate, perpendiculare una pe cealaltă şi care se mişcă în câmpul unui magnet permanent. Schema electrică a aparatului este redată în fig. 184 a, în care b_1 şi b_2 sunt cele două bobine ale logometrului

de rezistenţe r_1 respectiv r_2, montate în serie cu rezistenţele de protecţie R_1, respectiv R_2, iar Mg magnetoul.

Rotind manivela magnetoului, curentul va trece prin bobina b_1, acul indicator fixat pe axul bobinelor (fig. 184, b), aşezându-se în dreptul diviziunii marcată ∞. Legând la bornele B_1 şi B_2 rezistenţa de măsurat R_x, acul va indica valoarea acesteia pe cadranul aparatului. Deviaţia α a aparatului este dată de relaţia

$$\operatorname{tg}\alpha = K\frac{R_1}{R_2 + R_x} = f(R_x),$$

K, R_1 şi R_2 fiind constante constructive ale aparatului.

Indicaţia α este deci independentă de tensiune, adică de viteza de rotaţie a manivelei, care totuşi nu trebue să scadă sub o anumită limită sub care influenţa frecărilor s'ar face simţită.

Aceste aparate posedă în general şi un regulator de viteză, care decuplează manivela la viteze prea mari, iar magnetoul este construit astfel încât curba de tensiune să fie foarte puţin ondulată.

Scara aparatului, neuniformă, poate fi realizată cu gradaţii diferite, după necesităţi.

În fig. 185 şi 185 bis sunt reprezentate două megohmmetre industriale cu scările de măsurare 1—100 MΩ, respectiv 0,1—10 MΩ şi tensiunea 500 V (tip sovietic MMG şi ML-500).

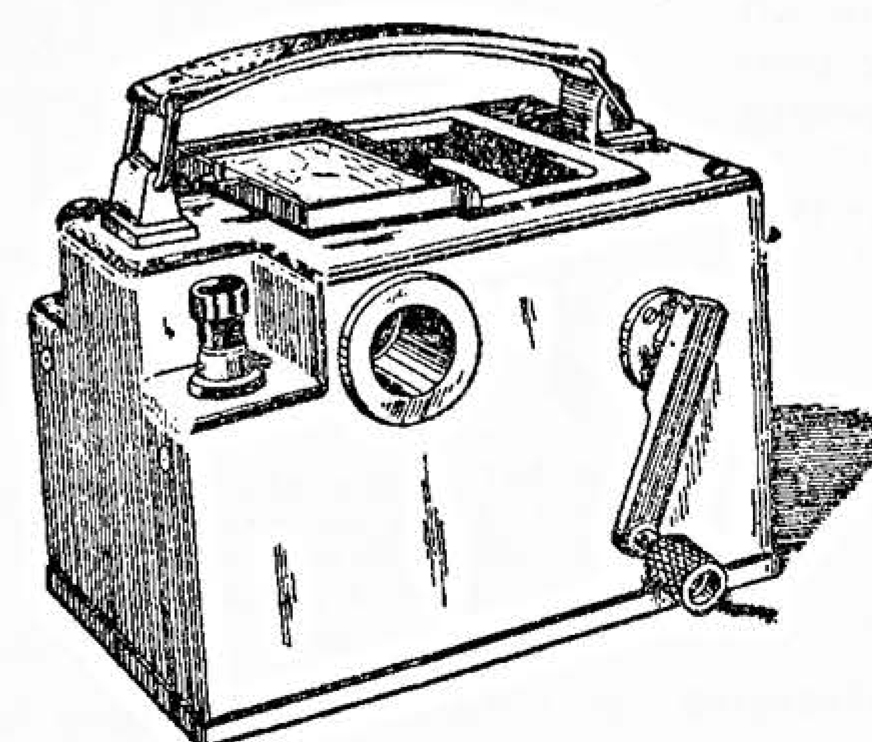


Fig. 185. — Megohmmetru industrial tip MMG (1-100 mΩ, 500 V)

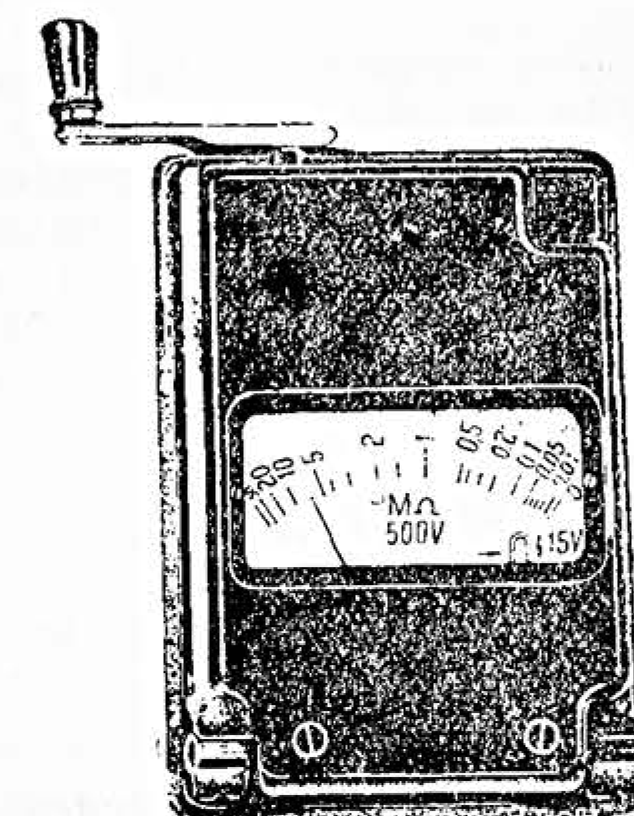


Fig. 185. bis — Megohmmetru industrial tip ML-500 (0,1—10 MΩ, 500 V)

Astfel de aparate se construesc cu scări până la zeci de mii de MΩ şi tensiuni de 100, 200, 500, 1000 şi chiar 2500 V.

194. **Megohmmetrul cu tub electronic.** Pentru măsurări de rezistenţe de izolaţie mai mari decât 10 000 MΩ se utilizează în general megohmmetre cu tub electronic. În fig. 186 este reprezentată schema principială a unui asemenea aparat, în care T este tubul electronic, MΩ galvanometrul gradat în megohmi, E bateria de alimentare, R_0 o rezistenţă etalon, R_x rezistenţa de măsurat; *1—2* sunt bornele pentru conectarea unei baterii anodice U_a, *3—4* acelea pentru conectarea bateriei de încălzire a tubului U_i şi *5—6* bornele pentru conectarea bateriei de grilă U_g.

La acest aparat indicaţiile galvanometrului depind numai de potenţialul grilei, care la rândul său depinde de căderea de tensiune în rezistenţa R_0. Aceasta este ea însăşi funcţie de curentul care trece prin R_0 şi deci de rezistenţa R_x de măsurat, tensiunea E fiind constantă. In consecinţă indicaţia galvanometrului este în funcţie de rezistenţa de măsurat, ceeace permite ca scara lui să fie gradată direct în megohmi.

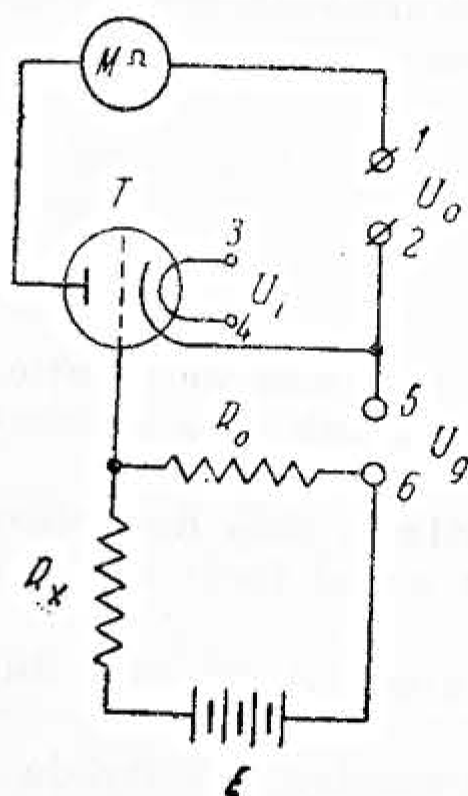


Fig. 186. — Megohmmetrul cu tub electonic

195. Măsurarea rezistenţei de punere la pământ. Măsurarea rezistenţei unui punct pus la pământ faţă de pământ înseamnă de fapt măsurarea rezistenţei între două puncte puse la pământ. Nici această noţiune nu este bine determinată, întrucât această rezistenţă depinde de distanţa dintre cele două puncte.

O tensiune U aplicată între punctele A şi B puse la pământ (conform montajului reprezentat în fig. 187), dă naştere unui curent I care circulă prin pământ. Pentru a se vedea repartiţia tensiunilor în pământ, se montează un voltmetru V, de mare rezistenţă interioară, între punctele A şi diferite puncte de pe distanţa AB. Curba reprezentând variaţia de potenţial are alura indicată în fig. 188, unde se vede că în apropierea punctelor A şi B tensiunea acuză variaţii repezi, pe o distanţă S în jurul acestor puncte. Mărimea suprafeţelor de rază S, în jurul punctelor A şi B, depinde de dimensiunile prizei de pământ şi de conductibilitatea pământului în regiunea respectivă. In afara acestor suprafeţe, diferenţa de potenţial dintre priza de pământ respectivă (A sau B) şi un alt punct oarecare pus la pământ este aproape constantă. Fie U_a (pentru punctul A) şi U_b (pentru punctul B) aceste diferenţe de potenţial. Ele se numesc tensiunile prizei de pământ respective faţă de pământ. Rezistenţa la pământ a prizelor se defineşte prin:

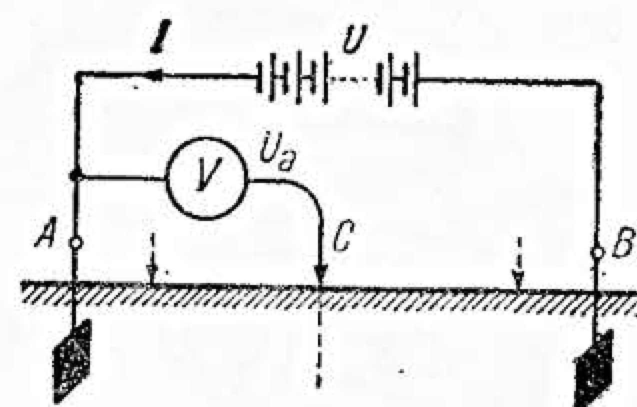


Fig. 187. — Montaj pentru ridicarea curbei de variaţie a potenţialului între două puncte puse la pământ

$$R_a = \frac{U_a}{I}, \quad R_b = \frac{U_b}{I}, \quad \text{în } \Omega.$$

196. Condiţii de îndeplinit pentru măsurarea de rezistenţe de punere la pământ:

1. Orice priză de pământ care este străbătută de un curent are o tensiune faţă de pământ. Se va cerceta dacă această tensiune nu este periculoasă.

2. Diferenţa de potenţial a unei prize de pământ faţă de pământ, priza fiind străbătută de curent, este constantă, în afara unei anumite suprafeţe în jurul prizei. Se va face deci măsurătoarea numai pentru puncte aflate în afara acestei suprafeţe.

3. Rezistenţa măsurată între două prize este egală cu suma rezistenţelor celor două prize, numai dacă suprafeţele menţionate mai sus nu se suprapun.

La prize normale, raza suprafeţelor este de 4—5 m. Distanţa dintre priza de pământ şi o altă priză auxiliară trebue să fie deci cel puţin 10 m (ca suprafeţele să nu se suprapună); pentru siguranţă se recomandă o distanţă de 15—20 m.

Pentru a se evita efectele de polarizare, se întrebuinţează un curent alternativ de o frecvenţă nu prea ridicată, astfel încât să se poată lua ca rezistenţă valoarea rezistenţei aparente.

197. Executarea măsurătorii se poate face cu ajutorul a două prize auxiliare cam de acelaşi ordin de mărime cu priza de măsurat.

Rezistenţele celor trei prize de pământ R_a, R_b şi R_c se măsoară cu o punte cu fir, alimentată în curent alternativ cu un vibrator.

$$R_a + R_b = \alpha_1,$$
$$R_a + R_c = \alpha_2,$$
$$R_b + R_c = \alpha_3,$$

de unde

$$R_a = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2}.$$

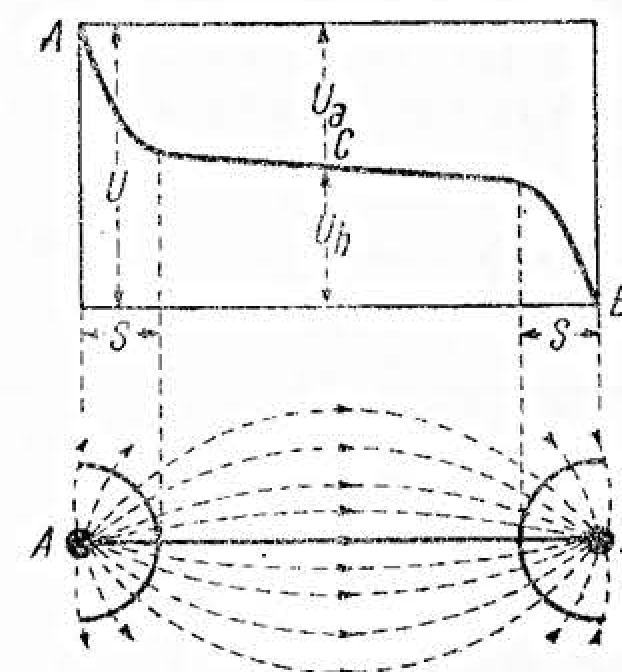


Fig. 188. — Curba variaţiei de potenţial între două prize de pământ străbătute de curent

Măsurătorile rezistenţelor prizelor de pământ se execută în practică cu instrumente bazate pe metoda compensaţiei. Se trimite un curent alternativ în rezistenţa prizei de pământ de măsurat şi se compară căderea de tensiune în această rezistenţă cu căderea de tensiune la bornele unei rezistenţe cunoscute, parcursă de un curent egal cu cel de mai sus. In fig. 189 se indică montajul.

Priza de pământ A de cercetat şi priza auxiliară B sunt legate în circuitul unui generator de curent alternativ. In circuit există şi un transformator cu raportul de transformare 1 : 1. Pe circuitul secundar al transformatorului se montează o rezistenţă cunoscută, variabilă, cu manetă, R. Circuitul primar este legat în punctul P cu circuitul secundar. Telefonul este montat între maneta rezistenţei şi o sondă C (sonda fiind formată dintr'o priză de pământ prin care nu trece curent în momentul măsurătorii). Se variază poziţia manetei rezistenţei R până când sunetul în telefon atinge un minim. In acest caz:

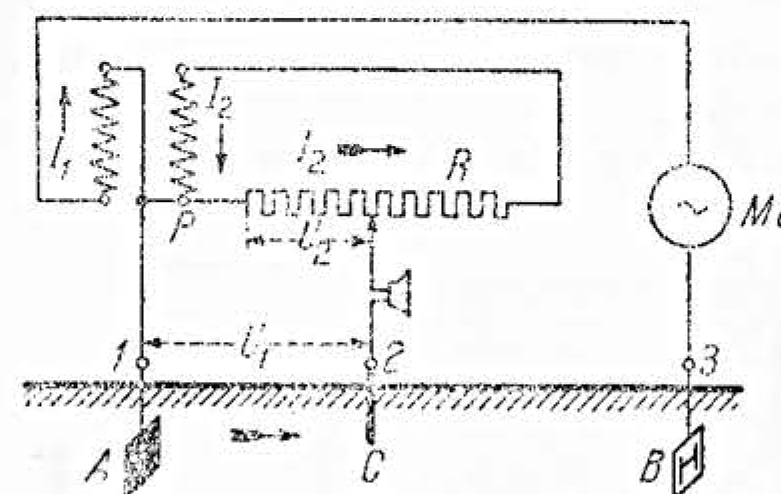


Fig. 189. — Montajul de principiu pentru măsurarea rezistenţelor prizelor de pământ

$$U_1 = U_2,$$

sau, dacă se notează cu x rezistenţa prizei de pământ şi cu r porţiunea din rezistenţa R cuprinsă între punctul P şi telefon:

$$x = r.$$

Rezistenţa prizei auxiliare B nu intră în calcul, ci limitează numai curentul din circuit; deasemenea nici rezistenţa sondei nu intră în consideraţie, sonda ne mai fiind parcursă de curent în momentul echilibrului.

In fig. 190 este reprezentată schema electrică a unui asemenea aparat, utilizat în special pentru măsurarea rezistenţei prizei de pământ a instalaţiilor de paratrăsnete.

Generatorul de curent alternativ este un vibrator V, alimentat de o baterie de buzunar B. Curentul pulsator alimentează transformatorul T_1; T_2 este un transformator cu raportul de transformare 1 : 1. Pentru a se obţine mai multe sensibilităţi de măsurare, bobinajul primar al transformatorului are mai multe prize. Domeniile de măsurare ale aparatului sunt dela câţiva ohmi până la sute de ohmi. Rezistenţa prizei auxiliare şi a sondei trebue să fie sub 2000 Ω, ceeace este cazul în general, în practică.

Măsurătorile de prize de pământ pentru instalaţiile de curenţi tari, în special pentru instalaţiile de înaltă tensiune, se execută cu un aparat analog cu cel descris mai sus. Pentru a se obţine un curent destul de mare pentru măsurare, se utilizează în loc de vibrator un magnetou puternic, cu manivelă. Frecvenţa obişnuită este de 35 Hz, evitându-se astfel influenţa eventuală a curenţilor de frecvenţă industrială (50 Hz). In loc de telefon, se întrebuinţează un aparat cu magnet permanent şi bobină mobilă, alimentat prin intermediul unui redresor. Aparatul are în general trei scări de măsurare în raportul 1: 10: 100, putând măsura respectiv 10, 100 sau 1000 Ω.

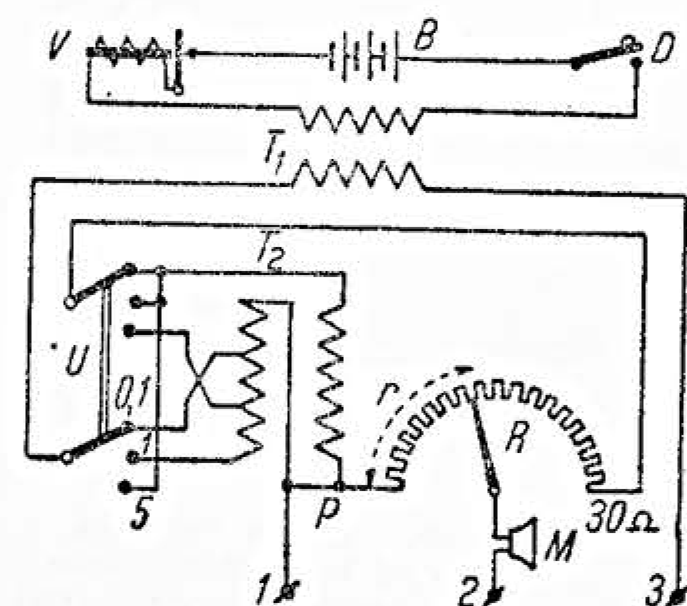


Fig. 190. — Schema interioară a măsurătorului de rezistenţă a prizelor de pământ

Măsurarea rezistenţei prizei de pământ a unui stâlp A dintr'o linie de înaltă tensiune se realizează ca în fig. 190 bis.

Ca sondă şi priză auxiliară, se întrebuinţează fie un burghiu de pământ, fie o ţeavă de gaz lungă de un metru, care se introduce în pământ circa o jumătate de metru. Inainte de a se executa măsurarea, se va întrerupe legătura stâlpului la firul de pământ.

198. **Localizarea defectelor pe linii.** Se ştie că buna funcţionare a liniilor de distribuţie şi de transmisie de energie electrică şi a liniilor telefonice şi telegrafice, aeriene sau subterane, depinde de buna stare a izolaţiei lor.

In timpul funcţionării liniilor se pot produce diverse avarii, ca: puneri la pământ, scurtcircuite între fire şi ruperi de fire.

A localiza un defect pe linie înseamnă a găsi cu cât mai mare rapiditate şi precizie locul defectului în scopul înlăturării acestuia, pentru repunerea în funcţiune a liniei.

Prin măsurări preliminare se determină în primul rând porţiunea de linie pe care se găseşte defectul, şi numai după separarea acesteia, se trece la localizarea propriu zisă a defectului, întrebuinţându-se în acest scop, metoda punţii sau a căderilor de tensiune, pentru cazurile de punere la pământ a liniilor şi metoda măsurării capacităţilor pentru cazul ruperii de conductori.

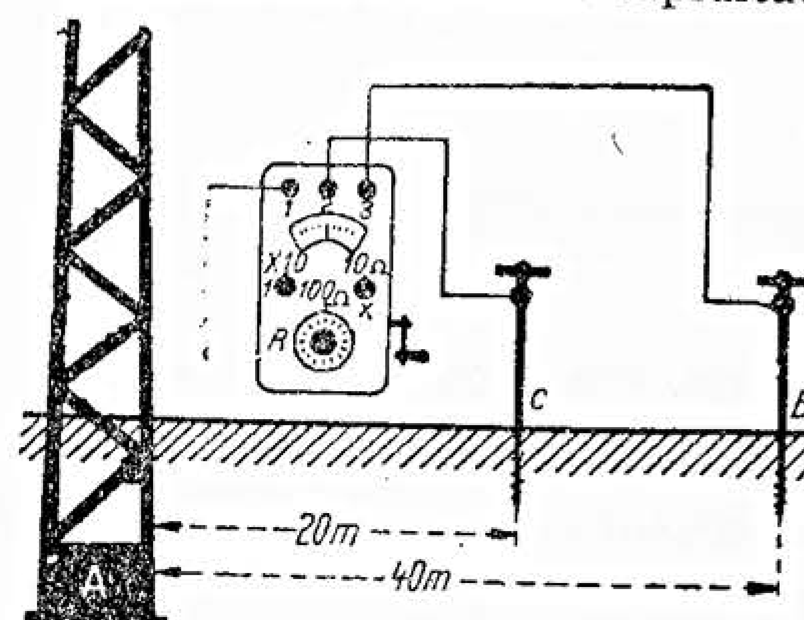


Fig. 190 bis — Măsurarea rezistenţei de pământ a unui stâlp metalic

Pentru măsurările prin metoda punţii sau a căderilor de tensiune, se întrebuinţează totdeauna un conductor auxiliar care poate să fie un fir sănătos din cablu (când acesta are mai mulţi conductori) sau un alt fir (de exemplu o linie aeriană, firul de tramvai, etc.). Se va întrebuinţa totdeauna un fir cu o rezistenţă cât mai mică, pentru ca măsurătorile să prezinte o exactitate suficientă. Este bine ca firul auxiliar să aibă aceeaşi secţiune ca şi cablul cercetat. Dacă nu, se reduce lungimea firului auxiliar în raportul secţiunilor cablurilor respective:

$$L_c = l_f \cdot \frac{S_c}{S_f},$$

în care L_c este lungimea cablului avariat;

l_f — lungimea firului auxiliar;
S_c — secţiunea cablului avariat;
S_f — secţiunea firului auxiliar.

Pentru a se elimina rezistenţele din punctele de contact, este recomandabil să se facă lipituri.

Pentru cabluri cu rezistenţă mică (pentru cablurile de curenţi tari), se aplică aceleaşi procedee ca şi pentru măsurarea rezistenţelor mici. Pentru conducerea curentului şi pentru luarea tensiunii se recomandă întrebuinţarea de conductori auxiliari separaţi.

Spre a se micşora rezistenţa de contact dintre pământ şi conductorul avariat, sensul curentului este astfel ales, încât acesta să circule dinspre pământ spre conductor. Pentru aceasta, polul pozitiv al bateriei se leagă la pământ. In serie cu bateria se montează o rezistenţă de protecţie, pentru limitarea curentului.

Dacă rezistenţa de punere la pământ este mai mare decât 1000 Ω, un galvanometru cu ac indicator nu este suficient de sensibil şi în acest caz se întrebuinţează un galvanometru cu oglindă. Pentru a se controla dacă măsurătoarea nu este influenţată de eventuale f. e. m. electrolitice, se repetă măsurătorile cu polii bateriei inversaţi.

Tot pentru verificare se inversează legăturile la cablul de cercetat, cu cele ale cablului auxiliar, făcându-se în aceste condiţii o nouă determinare a locului defectului.

199. **Localizarea defectelor prin metoda punţii (metoda buclei).** Fiind dat un cablu subteran de lungime L, prezentând o punere la pământ în punctul d, se constitue împreună cu un fir auxiliar H de lungime L_H şi cu un fir calibrat cu cursor AB, o punte, conform montajului din fig. 191. Legăturile V_1 şi V_2 vor fi din sârmă de secţiune mare şi egale între ele ca lungime. Polul negativ

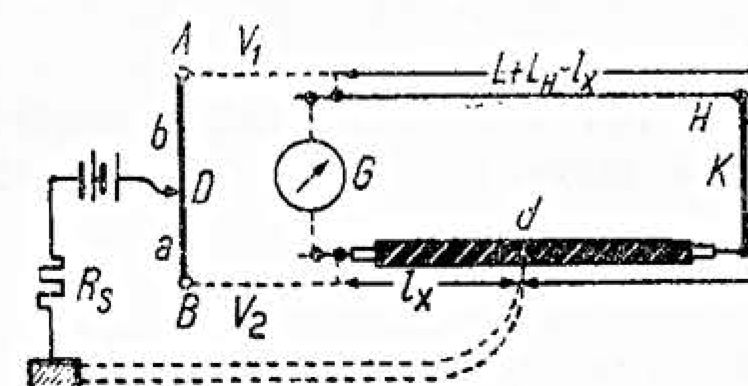


Fig. 191. — Localizarea defectelor prin metoda punţii cu fir

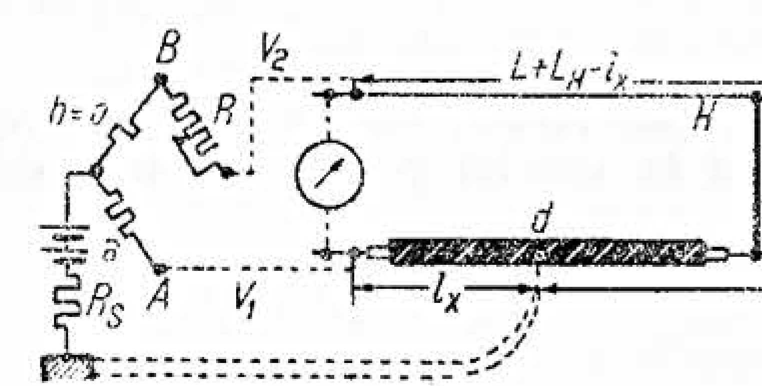


Fig. 192. — Localizarea defectelor prin metoda punţii cu rezistenţe cu fişe

se leagă la contactul D, polul pozitiv la pământ, prin rezistenţa de protecţie R_s. Toate legăturile se fac cu mare atenţie pentru a nu falsifica măsurătoarea (se recomandă lipiturile). Rezistenţa legăturii K trebue să fie cât mai mică. La echilibrarea punţii, prin variaţia raportului a/b, se obţine valoarea rezistenţei porţiunii de cablu până la locul defectului, din care se deduce l_x, distanţa până la locul defectului:

$$l_x = \frac{a}{a+b}(L + L_H),$$

în care a, b sunt distanţe pe firul punţii;
L — lungimea cablului avariat;
L_H — lungimea firului auxiliar, de aceeaşi secţiune şi material cu cablul avariat.

In loc de punte cu fir, se poate întrebuinţa o punte cu cutii de rezistenţe ca în fig. 192. Dacă se scurtcircuitează braţul de punte b, înlocuindu-se cu R, rezistenţa de comparaţie,

$$l_x = \frac{a}{R+a}(L + L_H) \cdot$$

Metoda buclei, varianta I (Murray). In fig. 193, *a*, este reprezentată schema pentru localizarea defectelor pentru un cablu de rezistenţă mare (cablu pentru curenţi slabi),

$$l_x = (L + L_H)\frac{R}{R + a},$$

legăturile AA' şi CC' fiind de rezistenţă neglijabilă faţă de a respectiv R.

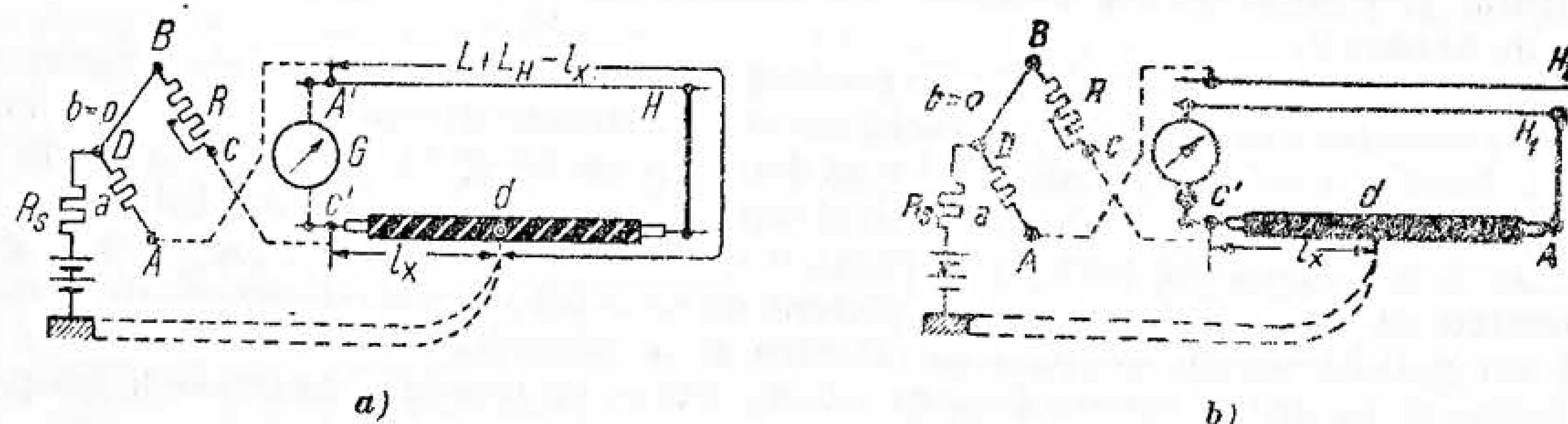


Fig. 193 *a* şi *b*. — Metoda buclei, varianta I

Dela schema de mai sus se poate trece imediat la aceea din fig. 193 *b* pentru cabluri de rezistenţă mică (cabluri pentru curenţi tari). Se întrebuinţează doi conductori auxiliari (de exemplu două fire sănătoase din cablul avariat). Rezistenţa conductorului H_2 neglijându-se faţă de a,

$$l_x = L\frac{R}{R + a}.$$

Metoda buclei, varianta II (Varley). In fig. 194 este reprezentată metoda utilizată în special pentru cabluri de rezistenţă mare, care prezintă avantajul

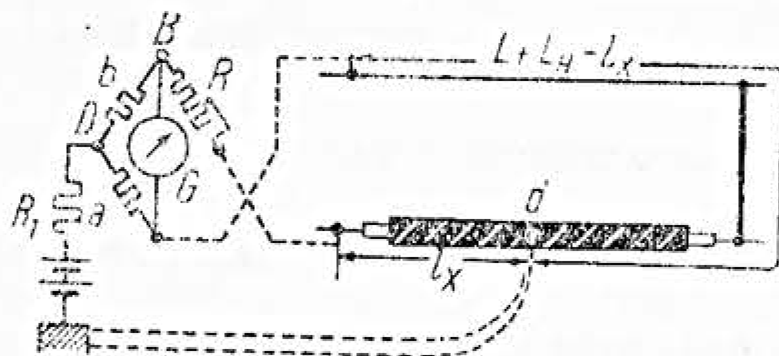


Fig. 194. — Metoda buclei, varianta II

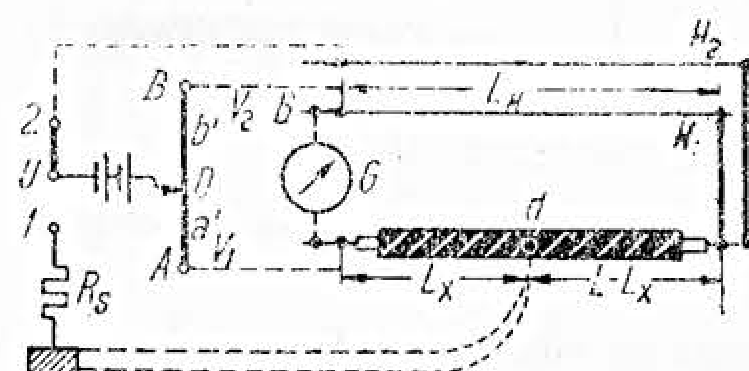


Fig. 195. — Metoda conductorilor auxiliari

că se poate trece uşor dela măsurători de rezistenţă la localizarea defectelor. In acest montaj

$$l_x = \frac{b\,(L + L_H) - aL_R}{a + b},$$

în care $L_R = 57\frac{R}{S}$ adică este lungimea unui cablu de cupru de aceeaşi secţiune cu cablul cercetat (S) şi de rezistenţă egală cu R.

Dacă se realizează $a/b = 1$ şi $L_H = L$,

$$l_x = \tfrac{1}{2}\,(2L - L_R).$$

Localizarea defectului când conductorul de întoarcere are o lungime necunoscută se execută utilizând montajul din fig. 195.

In acest caz se întrebuinţează doi conductori auxiliari H_1 şi H_2. Se echilibrează puntea pentru poziţia *1* a întrerupătorului *U* şi rezultă valorile *a* şi *b* la firul punţii. Se schimbă întrerupătorul în poziţia *2* şi se echilibrează din nou puntea, rezultând valorile *a'* şi *b'* la firul punţii. *L* fiind lungimea totală a cablului avariat, distanţa căutată este:

$$l_x = L\frac{a}{a'}.$$

200. **Localizarea defectelor prin metoda căderii de tensiune.** Metoda se bazează pe căderea de tensiune pe care o produce un curent anumit, în cele două porţiuni ale cablului, despărţite prin locul defectului. Sunt necesare deci două măsurători succesive, curentul rămânând neschimbat. Aceasta se obţine menţinând pe de o parte tensiunea de măsurare constantă şi la o valoare suficient de mare încât să străpungă sigur rezistenţa dela punctul defectului, iar pe de altă parte introducând în circuit o rezistenţă fixă R_s, destul de mare, faţă de care rezistenţa conductorilor precum şi eventualele variaţii de rezistenţă ale defectului să poată fi neglijate.

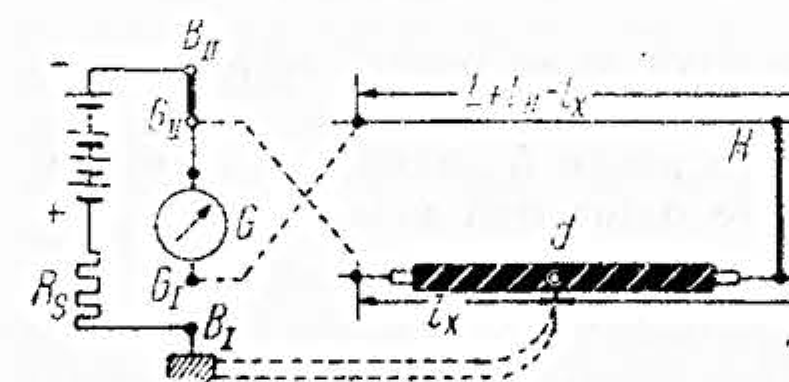


Fig. 196. — Metoda căderii de tensiune.

La cabluri cu rezistenţă mare, măsurătoarea se execută conform schemei din fig. 196.

Legăturile fiind făcute ca în figură, se citeşte la galvanometru o deviaţie α_1. Inversând legăturile la bornele G_I şi G_{II}, se citeşte la galvanometru deviaţia α_2:

$$l_x = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\cdot(L + L_H),$$

L reprezentând, ca în toate măsurătorile de mai sus, lungimea totală a conductorului avariat, iar L_H reprezentând lungimea conductorului auxiliar, din acelaşi material şi de aceeaşi secţiune cu conductorul avariat.

Se va observa ca legăturile să fie cât mai bine făcute, iar punctele de legătură să fie lipite; tensiunea întrebuinţată va fi circa 100 V, iar rezistenţa $R_s = 50\,000\ \Omega$.

Metoda este neexactă când secţiunea conductorului auxiliar este relativ mică faţă de secţiunea cablului cercetat.

Măsurătorile pentru cabluri cu rezistenţa mică se fac în general cu doi conductori auxiliari, dintre care unul pentru conducerea curentului şi altul pentru luarea tensiunii. Montajul este reprezentat în fig. 197, *a* şi *b*. In prima măsurătoare (fig. 197, *a*) se obţine deviaţia α_1, iar în a doua măsurătoare (fig. 197, *b*) deviaţia α_2. Rezultă:

$$l_x = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}L.$$

201. **Punţi de înaltă tensiune pentru localizarea defectelor în cabluri.** Se întâmplă ca masa izolantă, topită din cauza curentului care a circulat prin locul defectului pentru «arderea» lui, adică pentru stabilirea unei puneri la pământ netă a cablului, să se întărească prin răcire şi să alcătuiască astfel o rezistenţă care să împiedice trecerea curentului în montajele de punte menţionate mai sus.

Pentru înlăturarea acestui neajuns, se utilizează punţi de înaltă tensiune. Măsurătoarea executându-se în acest caz chiar sub tensiune înaltă, defectul este

neapărat pus în evidenţă. Fig. 198 reprezintă schema de montaj a unei astfel de punţi, care este aceeaşi cu a unei punţi cu fir obişnuită, dar alimentată cu o tensiune înaltă redresată cu ajutorul unui tub electronic.

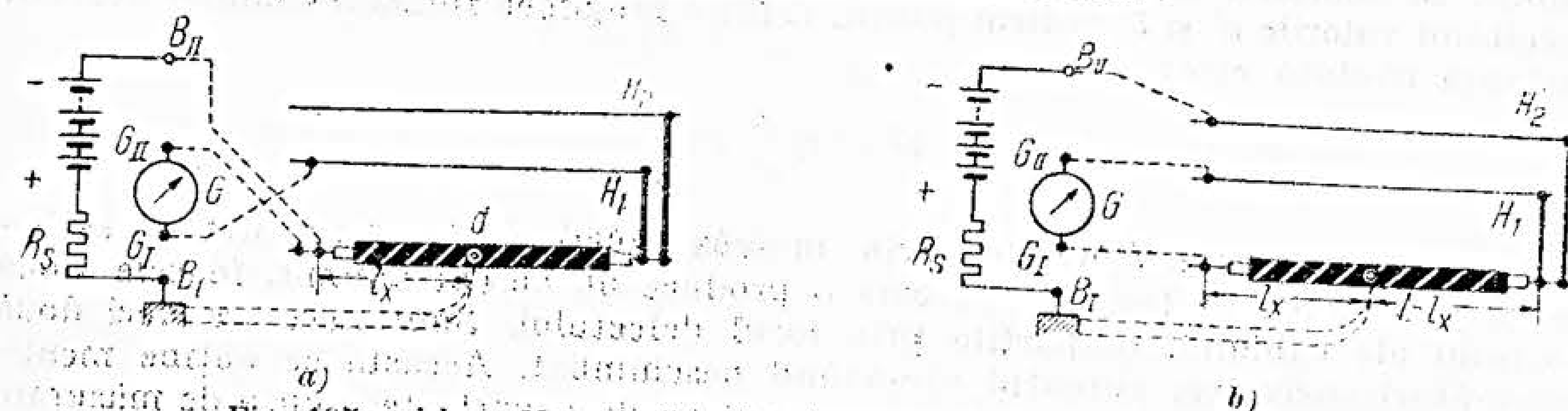


Fig. 197 a şi b. — Metoda căderii de tensiune cu două cabluri auxiliare.

Puntea este izolată pentru tensiunea respectivă şi se poate acţiona dela distanţă.

Firul AB are o scară cu 1000 diviziuni, care poate fi mărită cu ajutorul rezistenţelor auxiliare Z_1 şi Z_2. Locul defectului se determină prin:

$$l_x = \frac{a}{a+b}(L + L_H) = \frac{a}{1000}(L + L_H).$$

202. Defecte prin ruperea unui cablu. Localizarea ruperii unui cablu se face prin măsurări de capacităţi, executate la ambele extremităţi ale cablului.

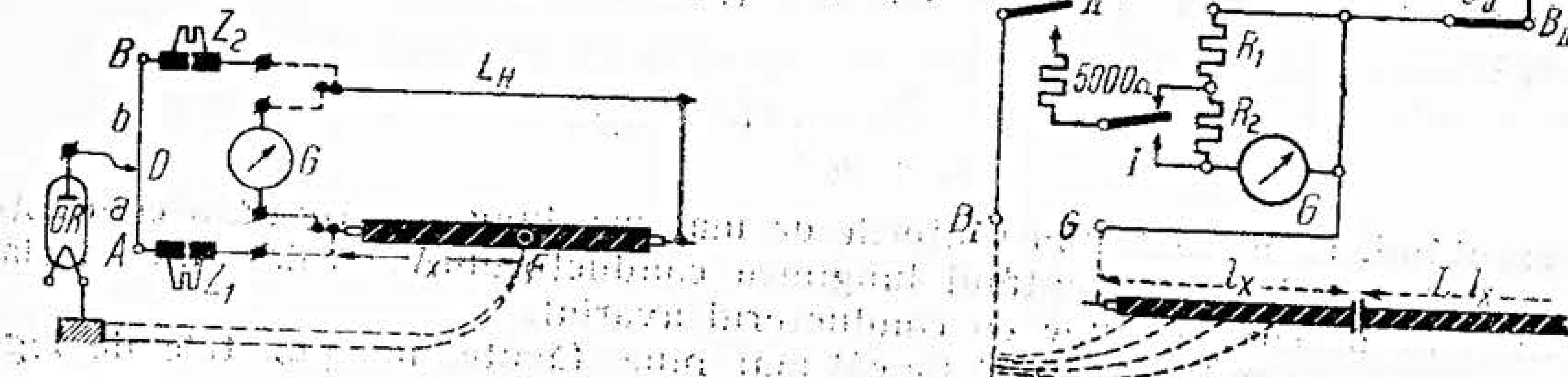


Fig. 198. — Schema de montaj a punţii de înaltă tensiune pentru localizarea defectelor în cabluri.

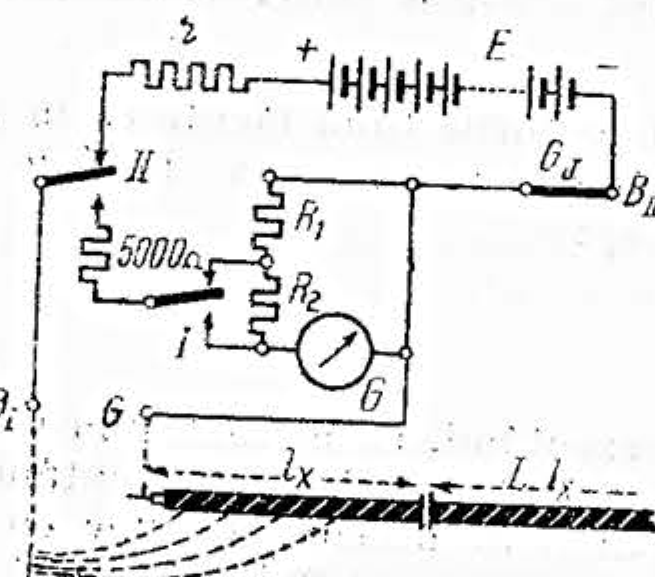


Fig. 199. — Localizarea rupturii unui cablu.

Cablul este încărcat cu o tensiune de circa 100 V şi apoi descărcat pe un galvanometru balistic. Se presupune că nu există şi o punere la pământ în locul rupturii conductorului. In fig. 199 se arată schema montajului respectiv. In poziţia desenată, cablul este încărcat de bateria E în serie cu rezistenţa r pentru limitarea curentului.

La apăsarea butonului II, cablul este descărcat în galvanometru. Pentru limitarea curentului de descărcare, s'a montat în circuit o rezistenţă de protecţie de 5000 Ω. Rezistenţele R_1 şi R_2 servesc la schimbarea sensibilităţii galvanometrului. Se măsoară mai întâi capacitatea porţiunii de cablu l_x, obţinându-se la balistic o elongaţie α_1. Se repetă operaţia pentru porţiunea $L - l_x$ a cablului, obţinându-se deviaţia α_2. Din cele două relaţii rezultă:

$$l_x = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} L.$$

In general, ruperea se produce din cauza deplasărilor pământului, în special în terenurile cu umplutură.

203. Punţile universale sunt realizările industriale ale montajelor de mai sus, montate în cutii speciale, şi care permit măsurări de rezistenţe, de izolaţie, de capacităţi şi localizarea defectelor în cabluri. Aceste instalaţii gata montate, transportabile, sunt utilizate pe o scară largă, în special la localizarea defectelor.

204. Controlul izolaţiei reţelelor trifazate faţă de pământ. Cea mai simplă metodă pentru controlarea izolaţiei faţă de pământ a reţelelor de curent alternativ trifazat constă în măsurarea cu voltmetrul, a tensiunilor celor trei faze faţă de pământ. In serviciu normal, fiecare din cele trei voltmetre arată tensiunea în stea. La un defect de izolaţie, voltmetrul de pe conductorul respectiv arată o valoare mai mică, pe când indicaţiile celorlalte voltmetre cresc. La punerea la pământ a unei faze, voltmetrul respectiv arată zero, pe când celelalte voltmetre indică tensiunea în triunghi, din care cauză ele trebue să aibă totdeauna sensibilitatea corespunzătoare.

205. Semnalizarea defectului se realizează prin montajul alăturat (fig. 200), în care, în cazul unui defect, intră în funcţiune un semnalizator acustic. Semnalizarea acustică se poate combina şi cu o semnalizare optică: în general, pentru reţelele de înaltă tensiune, se instalează transformatori de tensiune.

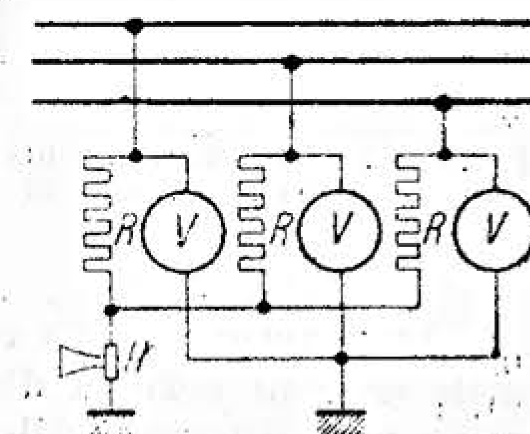


Fig. 200. — Semnalizarea unei puneri la pământ într'o reţea trifazată.

206. Rezistenţa în curent alternativ, sau rezistenţa efectivă, se compune din rezistenţa în curent continuu a conductorului respectiv, la care se adaugă rezistenţa datorită efectului pelicular al curenţilor turbionari în masa metalică, datorită pierderilor în fier, datorită pierderilor dielectrice în materialele izolante, datorită disociaţiei electrolitice, termoionice, etc.; rezistenţa efectivă este evident mai mare decât rezistenţa în curent continuu.

Rezistenţa efectivă se poate determina din măsurarea puterii

$$R = \frac{P}{I^2} \quad \text{sau} \quad R = \frac{U^2}{P},$$

în care I şi U sunt valorile eficace ale curentului în amperi, — respectiv ale tensiunii în volţi — ale circuitului, iar P este puterea în waţi absorbită în circuit.

Metoda căderii de tensiune poate fi întrebuinţată când circuitul este neinductiv, măsurându-se curentul cu un ampermetru şi diferenţa de potenţial la bornele circuitului cu un voltmetru electrostatic sau un voltmetru cu termocuplu, etc., făcându-se corecţia necesară.

Dacă diferenţa de potenţial se măsoară cu un potenţiometru de curent alternativ, rezistenţa efectivă se poate măsura chiar dacă circuitul este inductiv.

Rezistenţa efectivă a unei inductanţe sau a unei capacităţi poate fi măsurată şi prin metode de punte.

207. Reactanţa X şi impedanţa Z a unui circuit de curent alternativ se determina din expresiile:

$$Z = \frac{U}{I} \;; \; Z = \frac{P}{I^2 \cos\varphi} \;; \; X = \frac{P}{I^2}\operatorname{tg}\varphi \;; \; R = \frac{P}{I^2},$$

în care U este tensiunea de alimentare a circuitului, I curentul din circuit, φ decalajul dintre U şi I, iar P puterea consumată în circuit.

h) Măsurarea capacităţilor

208. Metoda industrială a ampermetrului şi voltmetrului. Schema este redată în fig. 201 (pentru montajul aval),

$$C_x = \frac{I}{\omega U},$$

în care U este tensiunea măsurată la bornele condensatorului, iar I curentul care trece prin condensator şi care se obţine scăzând vectorial curentul absorbit de voltmetru, din curentul măsurat la ampermetru. Frecvenţa se măsoară cu frecvenţmetrul F.

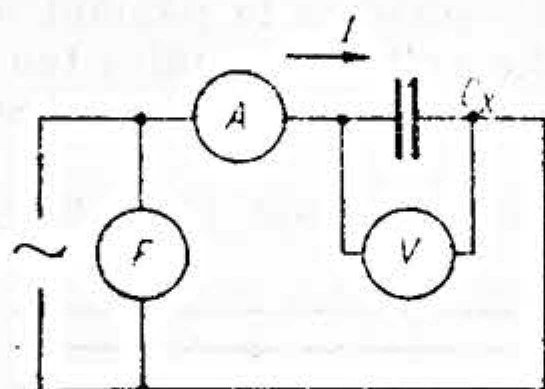


Fig. 201. — Măsurarea unei capacităţi cu ampermetrul şi voltmetrul.

209. Metoda galvanometrului balistic (metoda comparaţiei) constă în compararea capacităţii necunoscute C_x cu o capacitate etalon cunoscută C_e, prin descărcarea lor într'un galvanometru balistic. Schema este redată în fig. 202. Dacă α_e este elongaţia balisticului obţinută la descărcarea lui C_e şi α_x elongaţia obţinută la descărcarea lui C_x,

$$C_x = C_e \frac{\alpha_x}{\alpha_e}.$$

In practică, se va căuta ca deviaţiile α_x şi α_e să fie apropiate (pentru a evita erorile care ar rezulta din neproporţionalitatea balisticului). Acest lucru se poate realiza prin diverse mijloace, dintre care unul este încărcarea condensatorilor C_x şi C_e cu tensiuni diferite U_x şi U_e.

In acest caz:

$$C_x = C_e \frac{\alpha_x}{\alpha_e} \cdot \frac{U_e}{U_x}.$$

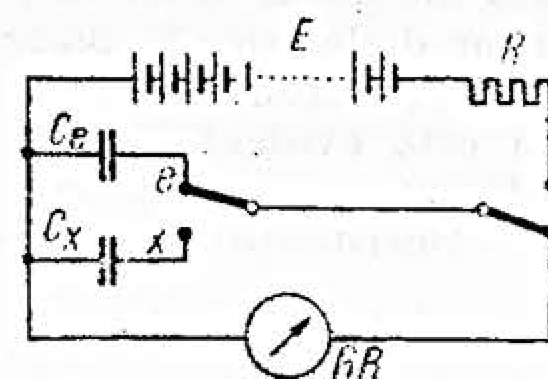


Fig. 202. — Măsurarea unei capacităţi cu galvanometrul balistic.

Mijlocul cel mai utilizat şi recomandabil este acela al şuntării balisticului pe o rezistenţă constantă R, descărcându-se capacitatea cea mai mare C_x de exemplu, pe o mică porţiune r a şuntului, obţinându-se elongaţia α_x şi capacitatea cea mai mică C_e pe întreaga rezistenţă R a şuntului, obţinându-se elongaţia α_e. In acest caz

$$C_x = C_e \frac{R}{r} \frac{\alpha_x}{\alpha_e}$$

Variind pe r se poate obţine $\alpha_x = \alpha_e$.

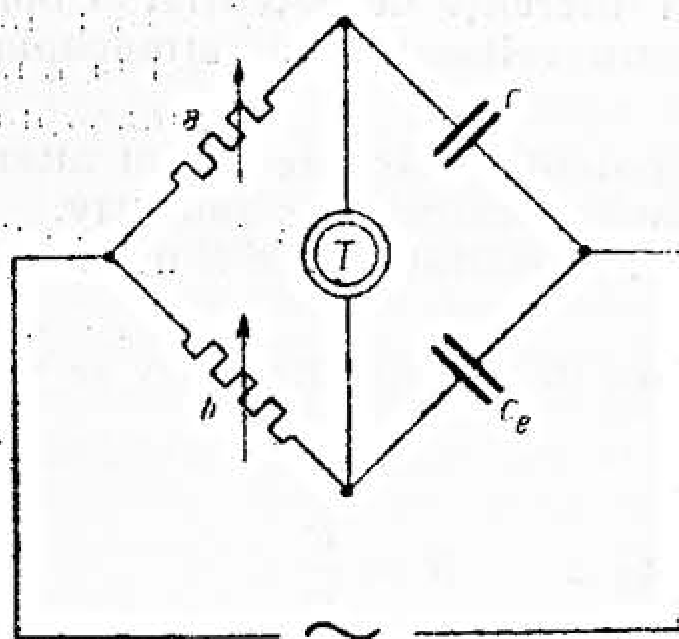


Fig. 203. — Punte pentru măsurări de capacităţi.

210. Metode de punte. Aceste metode au numeroase variante. In fig. 203 este reprezentată o asemenea punte alimentată în curent alternativ cu ajutorul unui vibrator (circa 800 Hz), aparatul de zero fiind un telefon. C_e este o capacitate etalon cunoscută, iar a şi b rezistenţe de precizie variabile.

Dându-se o anumită valoare rezistenţei a, se variază rezistenţa b până la obţinerea unui sunet minim în telefon. Aparatul de zero poate fi şi un galvanometru de vibraţii, potrivit frecvenţei tensiunii de alimentare a punţii.

Puntea se poate alimenta şi în curent continuu, aparatul de zero fiind în acest caz un galvanometru balistic.

La echilibru:

$$C = C_e \frac{b}{a}.$$

Când condensatorul de măsurat C este un condensator cu pierderi, el se poate asimila cu un condensator C_x fără pierderi, în serie sau în paralel cu o rezistenţă r_x.

In primul caz, δ fiind unghiul de pierderi al condensatorului (subcap. C; § 34),

$$\operatorname{tg} \delta = r_x C_x \omega.$$

In cazul al doilea,

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{r_x C_x \omega}.$$

Cu montajele de punte de mai jos, se poate determina C_x şi r_x, deci $\operatorname{tg} \delta$.

α) *Condensatorul de măsurat se asimilează cu o capacitate în serie cu o rezistenţă.* C_e este un condensator etalon (fig. 204) fără pierderi şi r_e este o rezistenţă de precizie, ambele variabile.

Puntea se echilibrează prin variaţia acestora, pentru anumite valori date lui a şi b.

La echilibru:

$$C_x = C_e \frac{b}{a} \quad \text{şi} \quad r_x = r_e \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{tg} \delta = \omega C_x r_x = \omega C_e r_e.$$

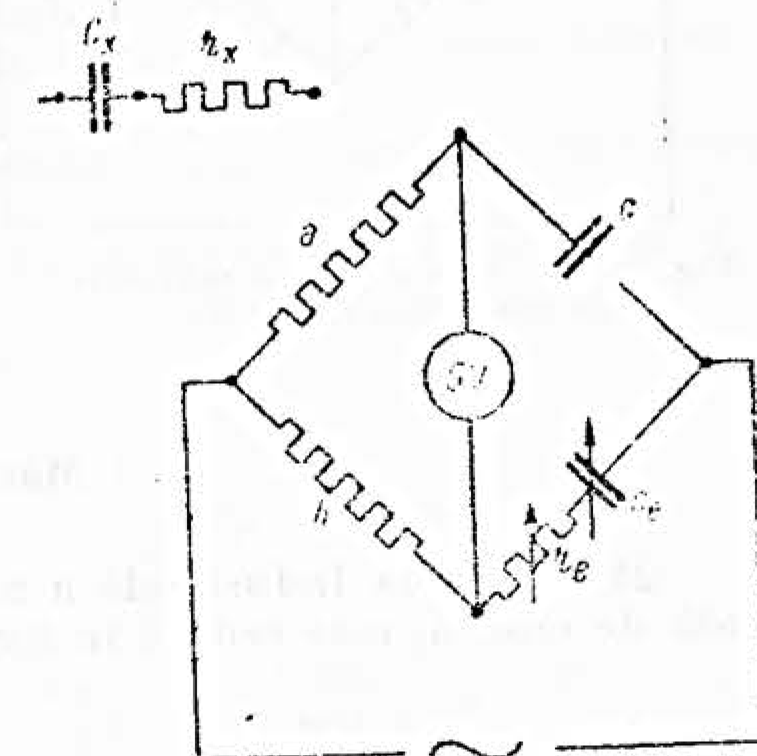


Fig. 204. — Punte pentru măsurări de capacităţi (cazul α).

β) *Condensatorul de măsurat se asimilează cu o capacitate în paralel cu o rezistenţă.* In acest caz, la echilibru:

$$C_x = C_e \frac{b}{a} \quad \text{şi} \quad r_x = r_e \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega C_x r_x} = \frac{1}{\omega C_e r_e}.$$

Asemenea punţi se utilizează cu folos la determinarea pierderilor dielectrice în cabluri.

Puntea Schering serveşte la determinarea, printr'o singură măsurătoare, a capacităţii unui condensator, a rezistenţei presupusă în serie cu acesta şi a $\operatorname{tg}\delta$, deducându-se apoi prin calcul pierderile dielectrice. Schema de principiu este redată în fig. 206, în care C_1 este capacitatea condensatorului de măsurat, R_1 rezistenţa presupusă în serie, C_2 un condensator etalon fix cu aer (fără pierderi), R_3 o rezistenţă de precizie variabilă, R_4 o rezistenţă fixă, C_4 un condensator etalon reglabil cu aer, G un galvanometru de vibraţie, iar Tr un transformator de înaltă tensiune.

Se variază succesiv R_3 şi C_4 până se obţine echilibrul la galvanometrul de vibraţii.

La echilibru:

$$C_1 = \frac{R_4 C_2}{R_3}; \quad R_1 = \frac{R_3 C_1}{C_2}; \quad \operatorname{tg}\delta = C_1 R \omega.$$

Pierderile dielectrice sunt

$$P = \frac{U^2 C\omega \,\mathrm{tg}\,\delta}{1 + \mathrm{tg}^2\delta} \approx U^2 C\omega^2 R_4 C_4$$

In practică, există numeroase realizări de punţi pentru măsurarea capacităţii.

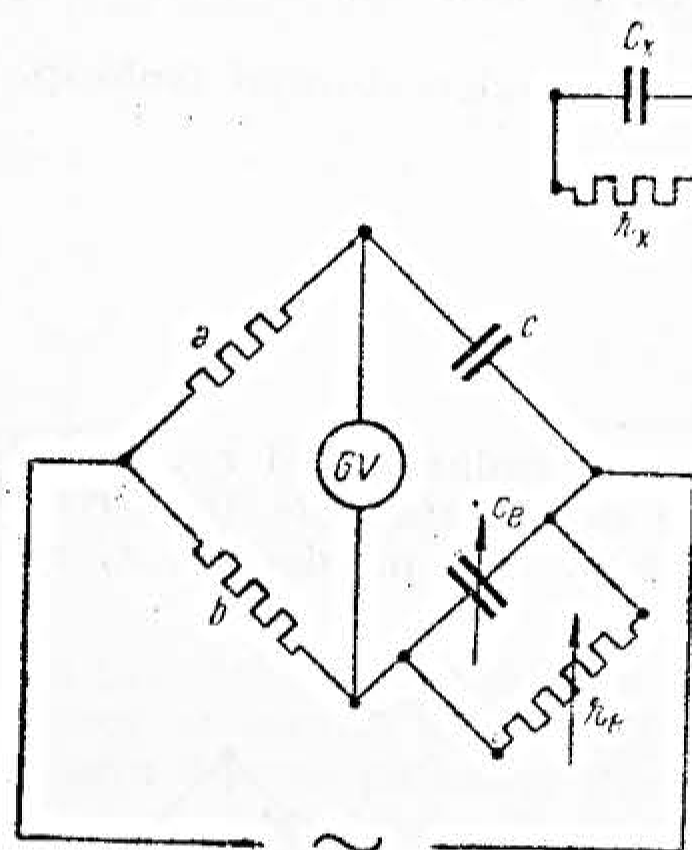


Fig. 205. — Punte pentru măsurări de capacităţi (cazul β).

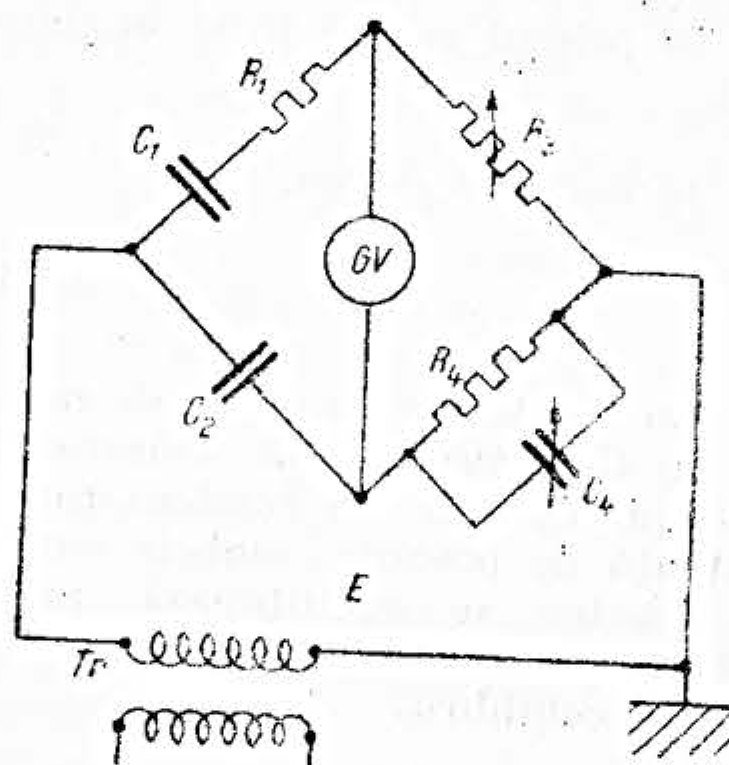


Fig. 206. — Puntea Schering pentru măsurarea pierderilor dielectrice.

i) Măsurarea inductanţelor

211. Metoda industrială a ampermetrului şi voltmetrului. Schema principială de montaj este redată în fig. 207 pentru montajul aval.

Fig. 207. — Metoda ampermetrului şi voltmetrului pentru măsurarea inductanţelor.

Valoarea inductanţei L este dată de relaţia

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z^2 - R^2},$$

în care Z este impedanţa bobinei, R este rezistenţa bobinei măsurată în curent continuu, iar $\omega = 2f$, f fiind frecvenţa tensiunii sinusoidale de alimentare.

Dacă U şi I sunt valorile tensiunii şi curentului măsurate de voltmetru şi ampermetru, iar I_v este curentul absorbit de voltmetru (considerat fără inductanţă, de ex. voltmetru termic), impedanţa Z a bobinei se va calcula din expresia

$$Z^2 = \frac{U\,(U+2RI_v)}{I^2 - I_v^2}.$$

In circuitele conţinând fier, inductanţa variază cu curentul şi cu frecvenţa şi determinarea inductanţei se face deci pentru un anumit curent şi o anumită frecvenţă.

212. Metode de punte. *Puntea Anderson* pentru măsurarea inductanţelor este redată schematic în fig. 208, în care L este inductanţa de măsurat (de rezistenţă R), P, Q, S şi r rezistenţe neinductive variabile de precizie, C un condensator de capacitate cunoscută, G un galvanometru de curent continuu, T un telefon, E o f.e.m continuă de circa 1—4 V, iar V un vibrator.

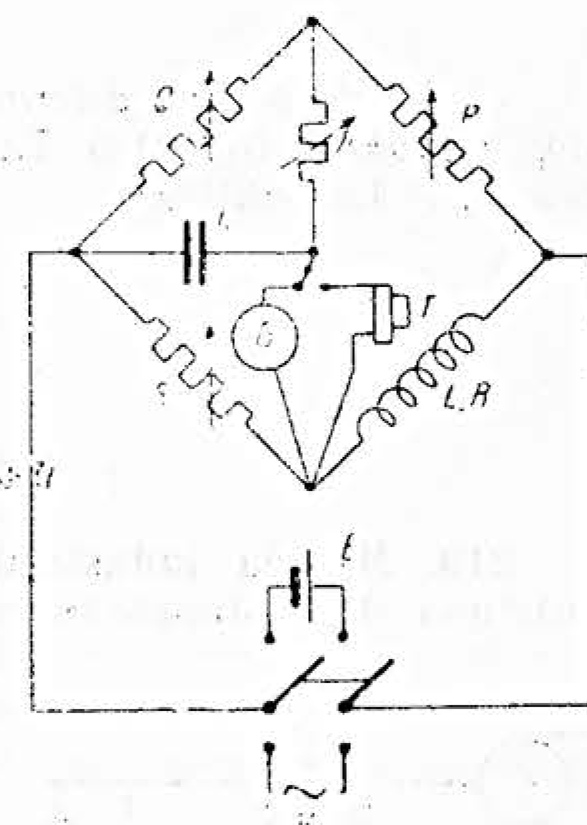


Fig. 208. — Puntea Anderson.

Se face echilibrul în curent continuu, ca la puntea Wheatstone, rezistenţa r fiind zero. Apoi se alimentează puntea în curent alternativ cu vibratorul V şi lăsând pe P, Q, şi S neschimbate, se variază rezistenţa r până la echilibru (sunet minim în telefonul T). La echilibru:

$$R = \frac{P}{Q}S \quad \text{şi} \quad L = CS\left(r + P + \frac{rP}{Q}\right).$$

Măsurătoarea este posibilă dacă $L > CSP$.

— *Punte pentru determinarea unei inductanţe prin comparaţie cu o inductanţă etalon variabilă* (fig. 209). R, R_1 şi R_2 fiind rezistenţe pure (fără inductanţă şi capacitate), L_x inductanţa de măsurat de rezistenţă R_x şi L_e o inductanţă etalon variabilă de rezistenţă R_e, se stabileşte echilibrul în curent continuu, (galvanometrul G) variind una din rezistenţele R, R_1 sau R_2 şi apoi în curent alternativ, (galvanometrul de vibraţii GV) variind inductanţa L_e.

Rezistenţa R se poate introduce în serie fie cu inductanţa de măsurat L_x,

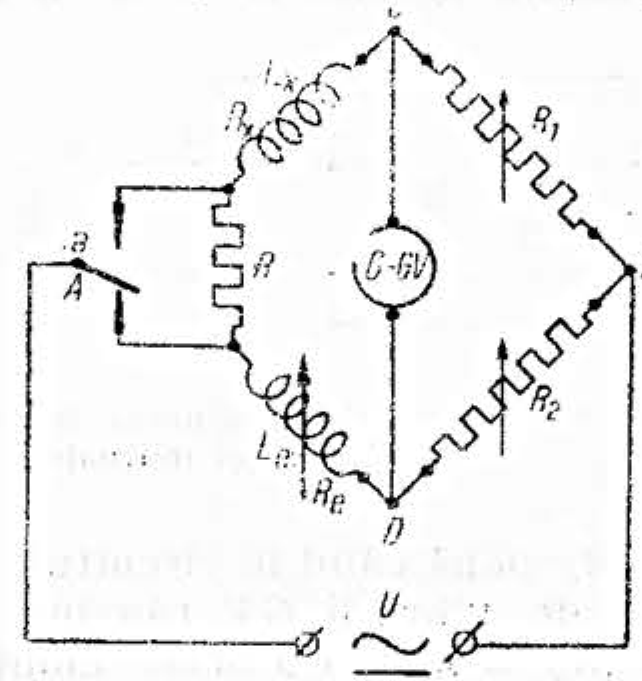


Fig. 209. — Punte pentru compararea inductanţelor.

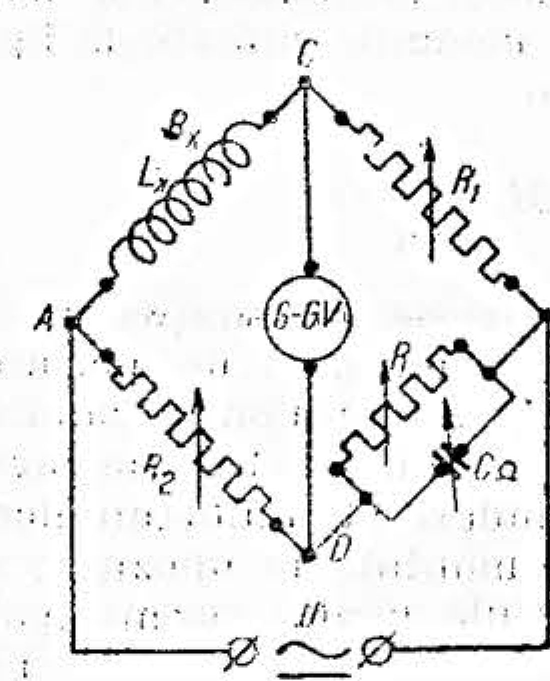


Fig. 210. — Punte pentru compararea unei inductanţe cu o capacitate.

fie cu inductanţa etalon L_e $\left(\text{după mărimea raportului } \frac{R_x}{R_e} = \frac{L_x}{L_e}\right)$, obţinând la echilibru:

α) pentru R în serie cu inductanţa L_x de rezistenţă R_x:

$$R_x = R_e\frac{R_1}{R_2} - R \quad \text{şi} \quad L_x = L_e\frac{R_1}{R_2};$$

β) pentru R în serie cu inductanța etalon L_e de rezistență R_e:

$$R_x = (R_e + R)\frac{R_1}{R_2} \quad \text{și} \quad L_x = L_e\frac{R_1}{R_2}.$$

— *Punte pentru determinarea unei inductanțe prin comparație cu o capacitate etalon variabilă* (fig. 210). Echilibrul în curent alternativ se obține variind capacitatea C_e. La echilibru:

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R} \quad \text{și} \quad L_x \quad C_e R_1 R_2.$$

j) Măsurarea inductanțelor mutuale

213. **Metoda industrială a ampermetrului și voltmetrului** (fig. 211). Dacă printr'una din bobinele inductanței mutuale trece curentul alternativ I_1, iar U_2 este tensiunea măsurată la bornele celei de a doua bobine cu un voltmetru de consumație neglijabilă, inductanța mutuală este

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1} \text{ Henry,}$$

dacă U_2 este în volți și I_1 în amperi, ω fiind pulsația lui I_1.

Fig. 211. — Măsurarea industrială a unei inductanțe mutuale.

214. **Metoda indirectă.** L_1 și L_2 fiind inductanțele proprii ale celor două bobine ale inductanței mutuale M, se măsoară inductanța proprie L' și L'' a bobinelor montate în modurile arătate în fig. 212 și se deduce

$$M = \frac{1}{4}(L' - L'').$$

Fig. 212. — Determinarea indirectă a inductanței mutuale.

215. **Metoda comparației.** M_x fiind o inductanță mutuală de măsurat și M_e o inductanță etalon variabilă, se face montajul din fig. 213, în care bobinele secundare ale inductanțelor M_x și M_e sunt montate în opoziție; se variază M_e până când în circuitul secundar nu mai circulă niciun curent (galvanometrul de vibrații GV rămâne la zero). In acest caz $M_x = M_e$. Cu acest montaj nu se pot măsura inductanțe mutuale mai mari decât M_e.

Fig. 213. — Metoda comparației inductanțelor mutuale.

216. **Metoda de punte.** Se realizează o punte alimentată în curent alternativ (fig. 213 bis) în care R_2, R_3, R_4 sunt rezistențe de precizie variabile, M_x este inductanța de măsurat, L și R_x sunt inductanța proprie și rezistența uneia din cele două bobine ale inductanței mutuale M_x. Se realizează în primul rând echilibrul în curent continuu, obținându-se realația

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Apoi se realizează echilibrul în curent alternativ, variind simultan $\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$.

La echilibru se obține

$$M_x = \frac{L}{1 + \frac{R_2}{R_4}}.$$

Fig. 213 bis. — Punte pentru măsurarea inductanței mutuale.

k) Măsurători magnetice

217. **Generalități.** Incercările fundamentale care se execută asupra materialelor magnetice, tole sau oțel magnetic, întrebuințate în construcția mașinilor, transformatorilor și aparatelor electrice sunt de trei categorii:

— Determinarea *curbei de magnetizare* a materialului, adică a curbei de variație a inducției B în funcție de câmpul magnetic H, $B = f(H)$ (curba OAB_{max} în fig. 214), din care se determină și curba permeabilității materialului în funcție de câmpul H.

— *Trasarea ciclului de histerezis* pentru o anumită valoare a inductanței maxime B_{max} (sau a câmpului H_{max}), adică a curbei care arată variația inducției B în funcție de câmpul H, pentru o variație a acestuia între limitele $+H_{max}$, 0, $-H_{max}$, 0, $+H_{max}$. (curba $+B_{max}\ K_1\ -B_{max}\ K_2\ +B_{max}$)

Fig. 214. — Curba de magnetizare și ciclul de histerezis.

— *Măsurarea pierderilor magnetice* corespunzătoare unei anumite inducții B_{max} și unei anumite frecvențe, evaluate în W/kg și înglobând pierderile prin histerezis și curenții turbionari (Foucault).

Aceste date magnetice sunt indispensabile constructorilor de mașini electrice și transformatori, care își bazează pe ele întreg calculul de dimensionare a circuitului magnetic, de încălzire și de randament, calcul care determină funcționarea acestor mașini și transformatori.

218. **Determinarea experimentală a curbei de magnetizare și a ciclului de histerezis.** Cea mai întrebuințată metodă este aceea denumită *metoda galvano-*

metrului balistic, care comportă două variante: *metoda inelului* sau a torului magnetic şi *metoda barelor drepte*, de secţiune dreptunghiulară sau circulară (*metoda permeametrelor*).

Ambele metode constau în esenţă din magnetizarea materialului, adică din supunerea lui unui câmp magnetic H, cu ajutorul unei înfăşurări zisă *de magnetizare* (prin care se va trece un curent continuu şi care va permite calculul câmpului H) şi din măsurarea inducţiei B din material, cu ajutorul unei *înfăşurări de măsurare* în legătură cu un galvanometru balistic.

Metoda inelului are marele avantaj că permite măsurători precise, dar are inconvenientul că atât inelul cât şi înfăşurările sunt greu de executat, ceeace măreşte şi timpul de executare a încercării şi costul ei.

Metoda barelor drepte are avantajul atât al uşurinţei de confecţionare a probei de încercat, cât şi al rapidităţii de lucru, iar exactitatea măsurătorii este în general comparabilă cu a metodei inelului.

219. **Metoda inelului pentru ridicarea curbei de magnetizare şi a ciclului de histerezis.** Schema de montaj este reprezentată principial în fig. 215, în care T este un inel magnetic executat din materialul de cercetat, care poartă pe el înfăşurarea de magnetizare de w_1 spire, bobinată uniform pe toată lungimea inelului şi o înfăşurare secundară, de măsurare, b, cu w_2 spire, legată printr'o rezistenţă r la bornele unui galvanometru balistic B. Prin înfăşurarea primară trece un curent I, care poate fi reglat cu reostatul R_h şi inversat cu ajutorul comutatorului K_1.

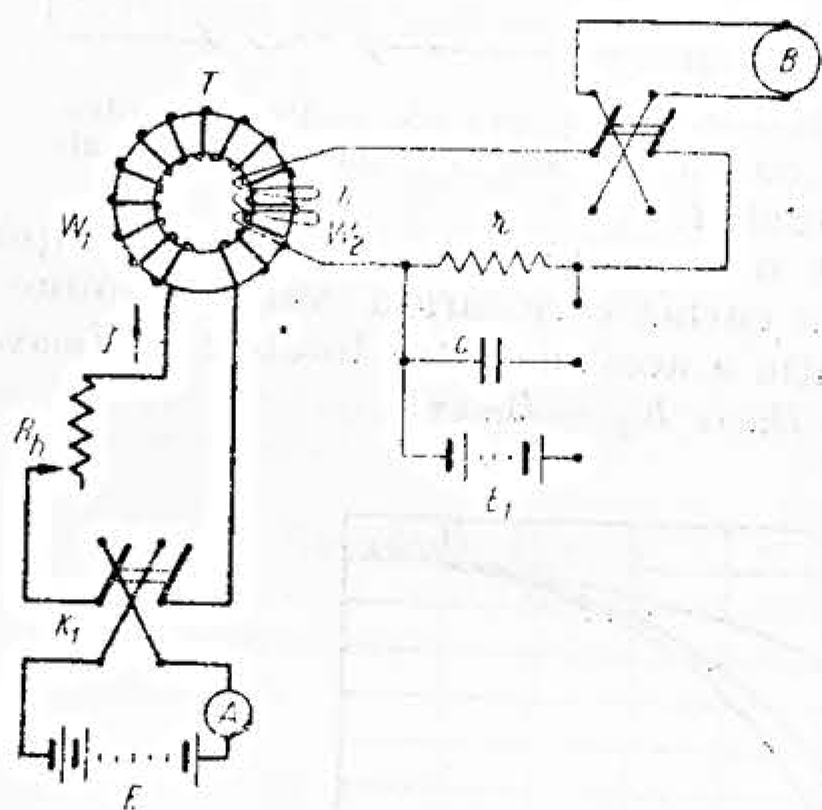


Fig. 215. — Metoda inelului.

O variaţie a curentului primar I produce în inel o variaţie de inducţie ΔB, deci o variaţie de flux $\Delta\Phi = S\Delta B$, prin balistic trecând o cantitate de electricitate

$$Q = \frac{w_2 \Delta\Phi}{R}\ [1],$$

care dă în balistic o elongaţie:

$$\alpha = \frac{Q}{K} = \frac{w_2 \Delta\Phi}{KR} = \frac{w_2 S \Delta B}{KR}$$

şi deci:

$$\Delta B = \frac{KR\alpha}{W_2 S}\ \text{Wb/m}^2$$

în care R este rezistenţa totală a circuitului de măsurare al balisticului, în ohmi;
K — constanta balisticului în condiţiile experienţei exprimată în Coulombi/mm;
S — secţiunea inelului în m²;
w_2 — numărul de spire al înfăşurării de măsurare b.

Pentru ridicarea curbei de magnetizare, se aduce mai întâi materialul la o stare magnetică neutră, adică se demagnetizează, scăzând curentul dela o valoare maximă (mai mare decât aceea corespunzătoare câmpului până la care se va ridica

[1] În sistemul practic MKSA.

curba de magnetizare) la o valoare zero şi inversându-l în acelaşi timp. Apoi se dau curentului valori crescătoare. Inversând curentul dela o valoare $+I_n$ la $-I_n$, balisticul acuză o deviaţie

$$\alpha_n = \frac{2w_2 S B_n}{KR}$$

de unde se deduce inducţia

$$B_n = \frac{KR\alpha_n}{2w_2 S}\ \text{Wb/m}^2$$

valoarea câmpului H fiind dată de expresia:

$$H_n = \frac{w_1 I_n}{l}\ \text{Asp/m}.$$

S'a ridicat astfel un punct al curbei de magnetizare. Se procedează analog pentru alte valori (crescătoare) ale curentului I, până la valoarea care dă maximul câmpului H, pentru care se ridică curba de magnetizare.

Constanta K se determină prin *tararea balisticului.*

α) *Tararea cu ajutorul unui condensator etalon* C de valoare cunoscută, montat ca în fig. 215, şi o f.e.m. auxiliară E', pentru încărcarea condensatorului. Descărcând condensatorul C pe o rezistenţă r, rezultă în balistic o elongaţie α_0, dată de relaţia

$$\alpha_0 = \frac{CE'\,r}{KR},$$

în care K este constanta balisticului exprimată în Coulombi/mm; C în farazi şi E' în volţi; din relaţia aceasta se determină valoarea constantei K a balisticului, sau mai bine zis chiar valoarea produsului $KR = \dfrac{CE'\,r'}{\alpha_0}$ care se introduce în expresiile de mai sus ale variaţiei inducţiei ΔB sau ale inducţiei B_n.

β) *Tararea cu ajutorul unui solenoid etalon* de lungime mare faţă de diametru (raport circa 10/1). Montajul solenoidului este reprezentat în fig. 216, bobina de

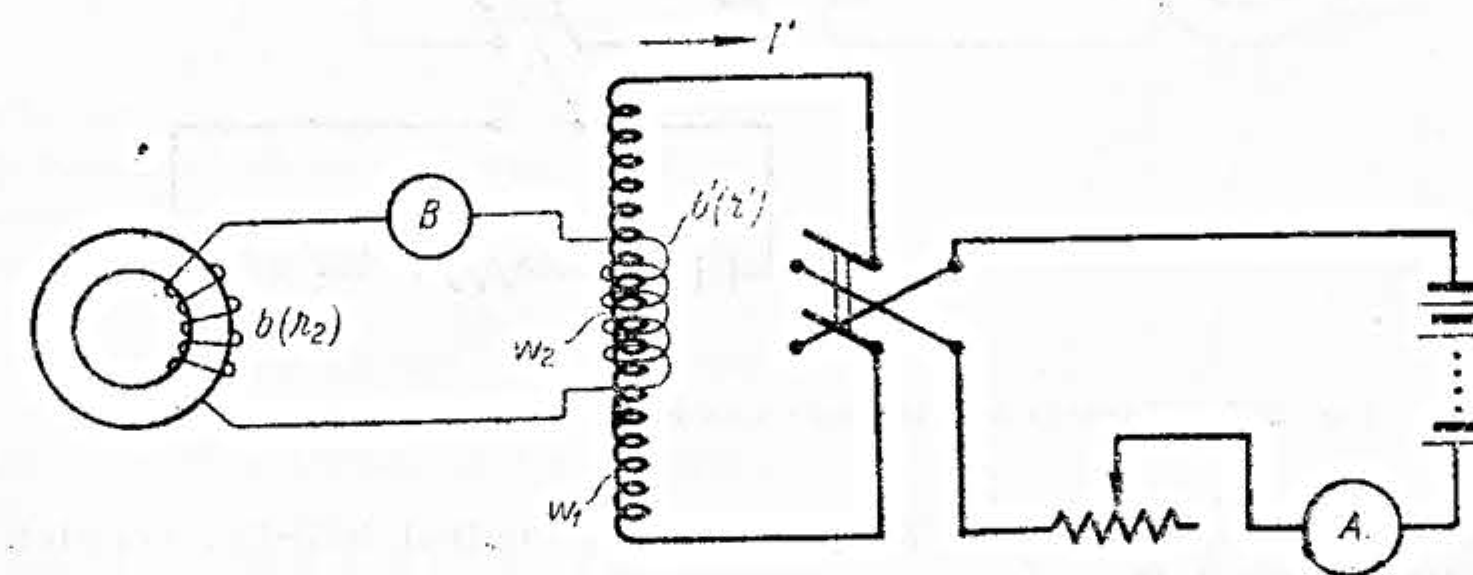


Fig. 216. — Tararea balisticului cu un soleinoid etalon.

măsurare b a inelului magnetic fiind montată în serie cu bobina de măsurare b' a solenoidului în tot timpul măsurătorilor magnetice.

In acest caz în formula variaţiei inducţiei ΔB de mai sus, R va reprezenta rezistenţa

$$R = r_2 + r' + g,$$

în care r_2 este rezistenţa bobinei b de măsurare a inelului magnetic, r' rezistenţa bobinei b' a solenoidului şi g rezistenţa balisticului.

Dacă w_1 este numărul de spire ale solenoidului, l_1 lungimea sa în m, S' secţiunea în m², w_2 numărul de spire ale bobinei de măsurare aşezată la mijlocul solenoidului şi I' curentul în amperi care circulă în solenoid, câmpul în mijlocul solenoidului este

$$H' = \frac{Iw_1}{l_1} \text{ Asp/m}$$

iar fluxul

$$\Phi' = S'H' = \frac{I'w_1S'}{l_1} \text{ Wb.}$$

Dacă se variază brusc curentul dela valoarea $+I'$ la $-I'$, fluxul variază cu $2\Phi'$, circuitul bobinei de măsurat şi al balisticului fiind străbătut de o cantitate de electricitate

$$Q' = \frac{2\Phi' w_2}{R} \text{ Coulombi, } R = r_2 + r' + g.$$

Galvanometrul va acuza o elongaţie α_0 şi din relaţia $\alpha_0 = \frac{Q'}{K}$ va rezulta pentru constanta K a balisticului valoarea

$$K = \frac{2\, w_1\, w_2\, S'\, I'}{R\, l_1\, \alpha_0} \text{ Coulombi/mm.}$$

γ) *Tararea cu ajutorul unui etalon de inductanţă mutuală.* Se execută montajul din fig. 217; bobina de măsurare b a inelului magnetic se montează în serie cu secundarul b' al inductanţei mutuale M şi cu galvanometrul balistic, rezistenţa totală a acestui circuit fiind R.

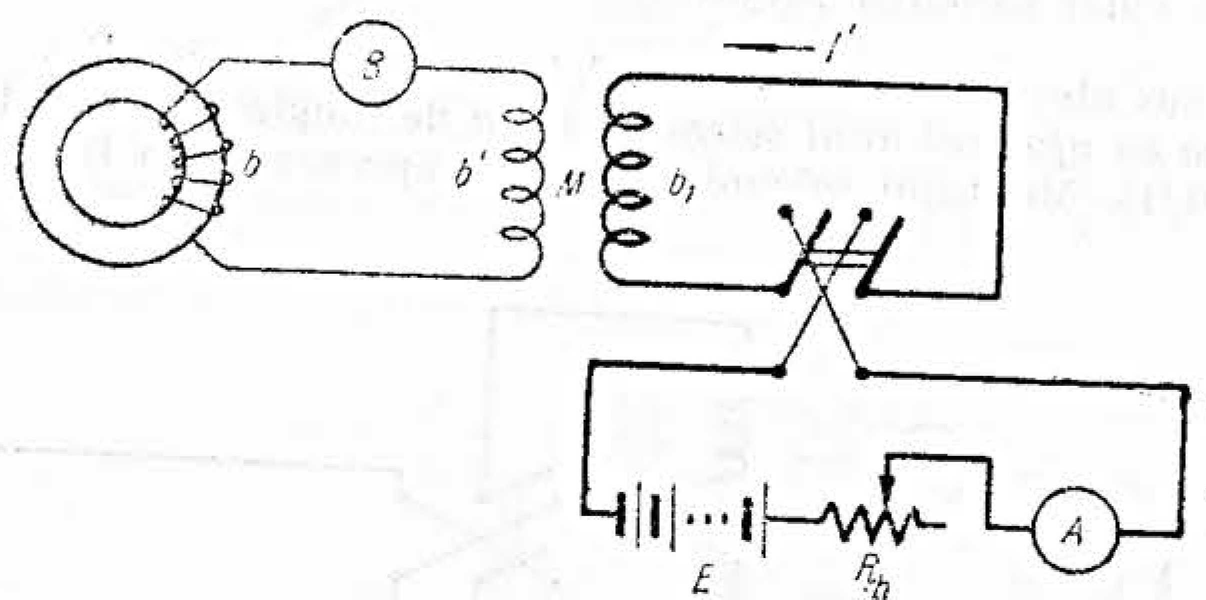


Fig. 217. — Tararea balisticului cu un etalon de inductanţă mutuală.

Dacă se variază curentul I' în circuitul primar b_1 al inductanţei mutuale M, dela o valoare $+I'$ la $-I'$, fluxul Φ' în secundarul b' va varia cu $2\Phi'$ şi prin balistic va trece o cantitate de electricitate:

$$Q' = \frac{2MI'}{R} \text{ Coulombi,}$$

M fiind exprimat în henry, I' în amperi şi R în ohmi.

Galvanometrul va acuza elongaţia α_0 şi din relaţia $\alpha_0 = \frac{Q'}{K}$ va rezulta pentru constanta K a balisticului valoarea

$$K = \frac{2MI'}{R\alpha_0} \text{ Coulombi/mm.}$$

— *Pentru trasarea unui ciclu de histerezis*, reprezentat în fig. 217 bis, se procedează în două moduri:

În primul mod de lucru, se ridică curentul până la valoarea I_{max} care dă câmpul maximum H_{max} şi deci inducţia B_{max} pentru care se doreşte să se traseze ciclul. Apoi se variază brusc reostatul R_h, astfel încât curentul să treacă dela valoarea $+I_{max}$ la o valoare I_n mai mică şi câmpul dela H_{max} la H_n; dela punctul M la M_n se produce o variaţie de inducţie $\Delta B_n = B_{max} - B_n$ care se măsoară prin deviaţia α_n' a galvanometrului balistic:

$$\alpha_n' = \frac{w_2 S \Delta B_n}{KR},$$

$$B_n = \frac{KR\alpha_n'}{w_2 S},$$

de unde se deduce — cunoscând inducţia B_{max}, — valoarea inducţiei $B_n = B_{max} - \Delta B_n$ şi deci punctul M_n.

Apoi se variază curentul dela valoarea I_n la o valoare mai mică I_m, deci câmpul dela H_n la H_m, măsurându-se ca mai sus variaţia de inducţie $\Delta B_m = B_n - B_m$ prin deviaţia α_m' a galvanometrului

$$B_m = \frac{KR\alpha_m'}{w_2 S},$$

din care se află inducţia $B_m = B_n - \Delta B_m$ şi deci punctul M_m.

Se continuă tot astfel până la valoarea zero a curentului, deducându-se porţiunea de curbă MM_r. Apoi se inversează sensul curentului de magnetizare şi se ridică cealaltă porţiune de curbă $M_r N$, dintre inducţia remanentă B_r şi valoarea $-B_{max}$. Se inversează aici legăturile la balistic cu comutatorul K_2 şi se începe scăderea curentului de magnetizare, ridicându-se, la fel ca mai sus, porţiunea ascendentă $NM_r M$ dela $-B_{max}$ la $+B_{max}$ a ciclului, care ca verificare trebue să fie identică cu ramura $MM_r N$.

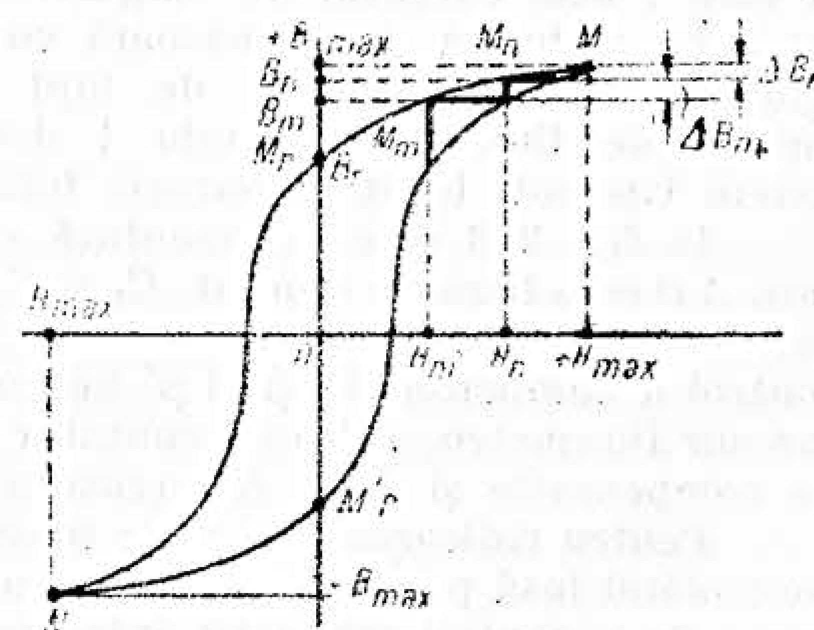


Fig. 217. bis. — Trasarea ciclului de histerezis.

Al doilea mod de lucru pentru trasarea ciclului de histerezis constă în următoarele: se determină un punct oarecare M_n, trecând dela H_{max} la H_n, adică dela B_{max} la B_n, adică dela punctul M la M_n şi se determină inducţia B_n prin măsurarea variaţiei ΔB_n ca mai sus. Se trece apoi dela valoarea H_n a câmpului la $-H_{max}$ şi de aci la $+H_{max}$, parcurgând întregul ciclu şi revenind la punctul M. Se continuă această operaţie prin trecerea de fiecare dată — după parcurgerea ciclului de histerezis — dela H_{max}, deci dela B_{max} la

valoarea câmpului H_m adică la inducţia B_m, corespunzătoare altui punct M_m şi se determină astfel toate punctele curbei.

Pentru executarea în condiţii optime a măsurătorii prin ambele procedee de lucru, se aduc montajului principial din fig. 215 anumite modificări.

Dimensiunile inelului din material magnetic necesar executării încercărilor de mai sus se iau astfel încât circumferinţa sa exterioară şi cea interioară să nu fie prea diferite de lungimea medie a liniilor de forţă care îl străbat. De exemplu, se va lua, pentru un inel alcătuit din tole suprapuse, $\Phi_{ext.} = 215$ mm, $\Phi_{int.} = 180$ mm şi grosimea pachetului de tole circa 15 mm.

Pentru material masiv, $\Phi_{ext.} = 90$ mm, $\Phi_{int.} = 80$ mm, şi grosimea circa 15 mm.

Atât înfăşurarea primară (de magnetizare), cât şi cea secundară (de măsurare) se repartizează uniform pe lungimea inelului.

Cu dimensiunile de mai sus se obţin în practică rezultate satisfăcătoare.

220. **Permeametrele** sunt aparate care permit ridicarea curbelor de magnetizare şi eventual a ciclurilor de histerezis a materialelor magnetice sub formă de bare, mult mai uşor de confecţionat decât inelele necesare în metoda balistică descrisă la § 219 de mai sus. Pentru ca valoarea câmpului în bară să poată fi calculată tot cu formula simplă

$$\frac{WI}{l}\ Asp/m^{1)} \quad \text{sau} \quad H = \frac{0{,}4\,\pi W I}{l}\ \text{Oe}, \ ^{2)}$$

aplicabilă într'un circuit magnetic fără scăpări şi în care câmpul magnetic este uniform, circuitul magnetic al barei se închide cu ajutorul unor chiulase (sau juguri), de secţiune mult mai mare decât bara de studiat. Scăpările de flux dela extremităţile barei (la rosturi) sunt compensate cu ajutorul unor *înfăşurări de compensaţie*. Există permeametre care utilizează o singură bară din materialul de studiat, sau două bare din acelaşi material.

Prin construcţie se realizează câmpul

$$H = AI \text{ Oe}$$

în care I este curentul de magnetizare şi A o constantă (de exemplu 100, 250, etc.), iar inducţia B se măsoară cu ajutorul unui galvanometru balistic sau al unui *fluxmetru*, care este de fapt un galvanometru balistic special gradat în unităţi de flux (de exemplu 1 div. = 10 000 maxwelli, [2]) ca la fluxmetrul sistem Grassot) legat la bornele înfăşurării secundare (de măsurare).

In fig. 218 este reprezentată schema electrică a *permeametrului Iliovici*, în care AB este bara de studiat, C_1 şi C_2 chiulasele pentru închiderea circuitului magnetic, b înfăşurarea de magnetizare, b_1 înfăşurarea de compensaţie, b_2 bobina de control a compensaţiei, β şi β' bobinele de măsurare, F un galvanometru balistic sau un fluxmetru, IR un comutator rotativ special, R_{c1}, R_{c2} reostatele circuitului de compensaţie şi $R_{h'}$, R_h reostatele circuitului de magnetizare.

Pentru ridicarea curbei de magnetizare, se procedează ca la metoda inelului, controlând însă pentru o anumită valoare I_n a curentului de magnetizare, ca diferenţa de potenţial magnetic între punctele A şi B să fie nulă (flux constant în bară), ceeace se obţine variind curentul I_1 în înfăşurarea de compensaţie b_1, până când balisticul (sau fluxmetrul) închis pe înfăşurarea de control rămâne la zero, când se variază curentul de magnetizare dela $+I_n$ la $-I_n$.

In acel moment se poate măsura inducţia B_n, legând bobinele de măsurare β, β' la balisticul F, etalonat în prealabil.

[1]) In sistemul practic MKSA.
[2]) In sistemul C. G. S. electromagnetic, întrebuinţat încă curent în aceste măsurători.

Cu acest permeametru şi utilizând comutatorul special IR care inversează curentul în circuitul de magnetizare şi simultan şi în circuitul de compensaţie făcând posibil şi reglajul curenţilor cu reostatele R_{h1} R_{h2} şi R_{c1} R_{c2}, se poate ridica şi ciclul de histerezis al materialului de studiat.

221. **Câmpurile magnetice** — dintr'un întrefier de exemplu — se pot măsura cu ajutorul unei *bobine exploratoare*, constituită din mai multe spire de dimensiuni cunoscute. Bobina fiind aşezată perpendicular pe direcţia câmpului, se îndepărtează brusc şi se citeşte la un galvanometru balistic tarat sau la un fluxmetru o deviaţie α, cu care se poate determina valoarea câmpului

$$H = \frac{10^8 \alpha K R}{S w}\ \text{Oe}, \ ^{1)}$$

în care α este deviaţia balisticului, K constanta balisticului în Coulombi pe milimetru, R rezistenţa totală a circuitului în ohmi, w numărul de spire ale bobinei şi S suprafaţa medie a bobinei în centimetri pătraţi.

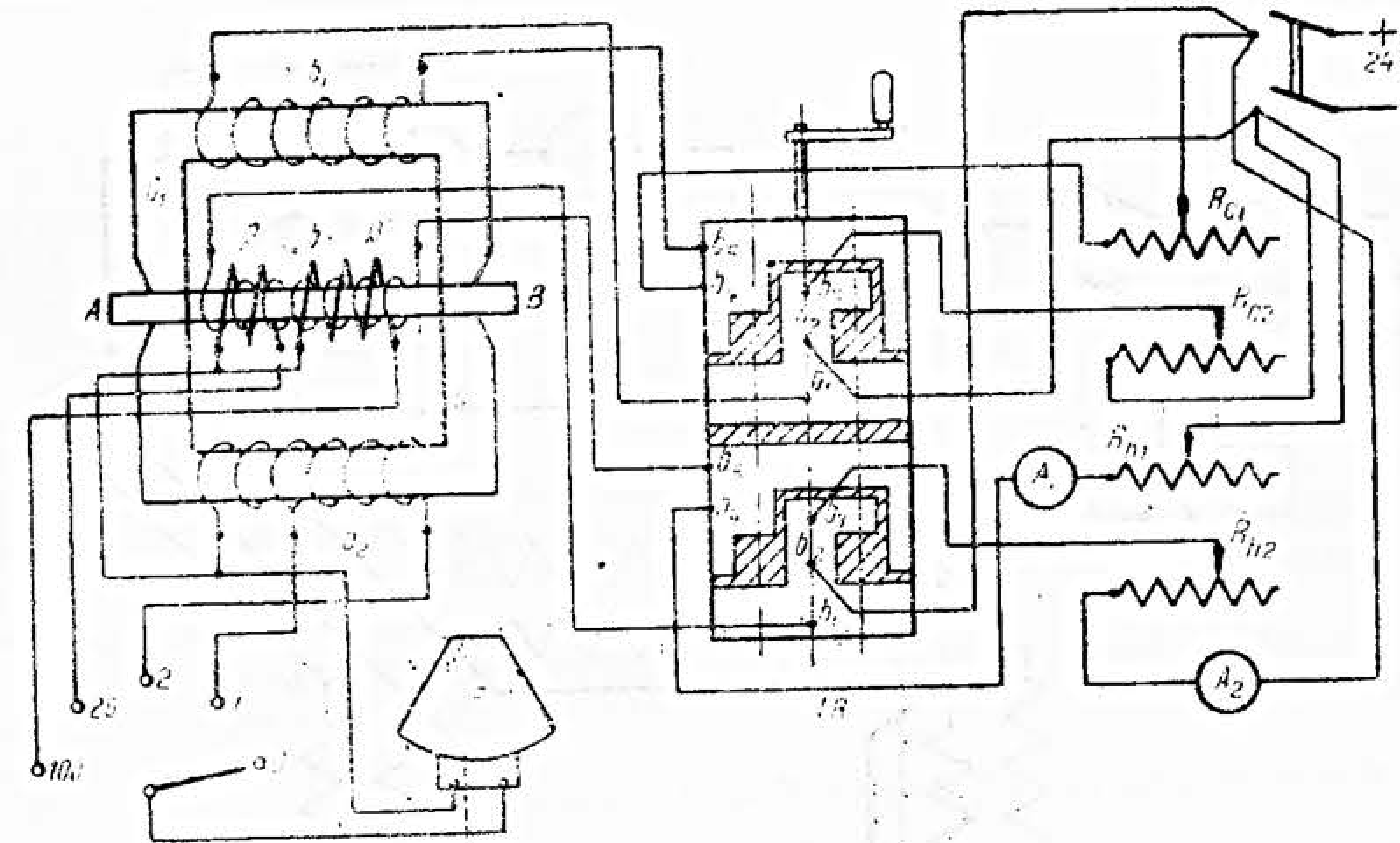


Fig. 218. — Permeametrul Iliovici.

Valoarea unui câmp magnetic se poate măsura şi cu ajutorul *spiralei de bismut*, rezistenţa bismutului crescând când acesta este aşezat într'un câmp magnetic. Aparatul este etalonat cu câmpuri de intensităţi cunoscute.

Bismutul având un coeficient de temperatură al rezistivităţii important, acesta trebue luat în considerare. Spirala de bismut se poate utiliza pentru întrefieruri mici, ca acelea ale maşinilor electrice.

Măsurători de câmpuri se pot executa şi utilizând un *magnetron* (tub cu vid cu anod cilindric şi catod axial drept).

222. **Pierderile în fier.** Pierderile prin histerezis se pot determina din suprafaţa ciclului de histerezis şi anume

$$p_H/\text{cm}^3 \text{ şi ciclu} = \frac{1}{4\pi}\int H\,dB$$

$$p_H/\text{cm}^3 \text{ şi ciclu} = \frac{1}{4\pi} S\,(\text{cm}^2)\,\alpha\beta \text{ ergi}$$

[1]) In sistemul C. G. S. electromagnetic, întrebuinţat încă curent în aceste măsurători.

în care α şi β sunt scările respective ale curentului şi inducţiei pe diagrama ciclului respectiv, adică 1 cm = α Oersted şi 1 cm = β gauss.

Există deasemenea aparate denumite *his'erezimetre* care permit determinarea pierderilor prin histerezis.

Pierderile totale în fier, adică pierderile prin histerezis şi curenţi turbionari (Foucault), la o anumită frecvenţă şi pentru o anumită inducţie, se determină prin metoda wattmetrului cu aparatul Epstein, construit pe principiul indicat de M. O. Dolivo-Dobrovolski.

223. **Aparatul Epstein** se compune în principiu din 4 bobine de magnetizare B_1 B_2 B_3 B_4, aşezate după laturile unui pătrat, în care se introduc pachetele de tole de cercetat. Tolele trebue să aibă o greutate totală de circa 10 kg. Ele sunt tăiate la mărimea de 30—500 mm şi anume jumătate din numărul lor în lungime şi jumătate în lăţime faţă de direcţia de laminare; apoi se împart în patru pachete de greutate egală, care se introduc în cele patru bobine astfel ca să formeze un circuit magnetic închis. In fig. 219 se indică schema de montaj în care R_i este

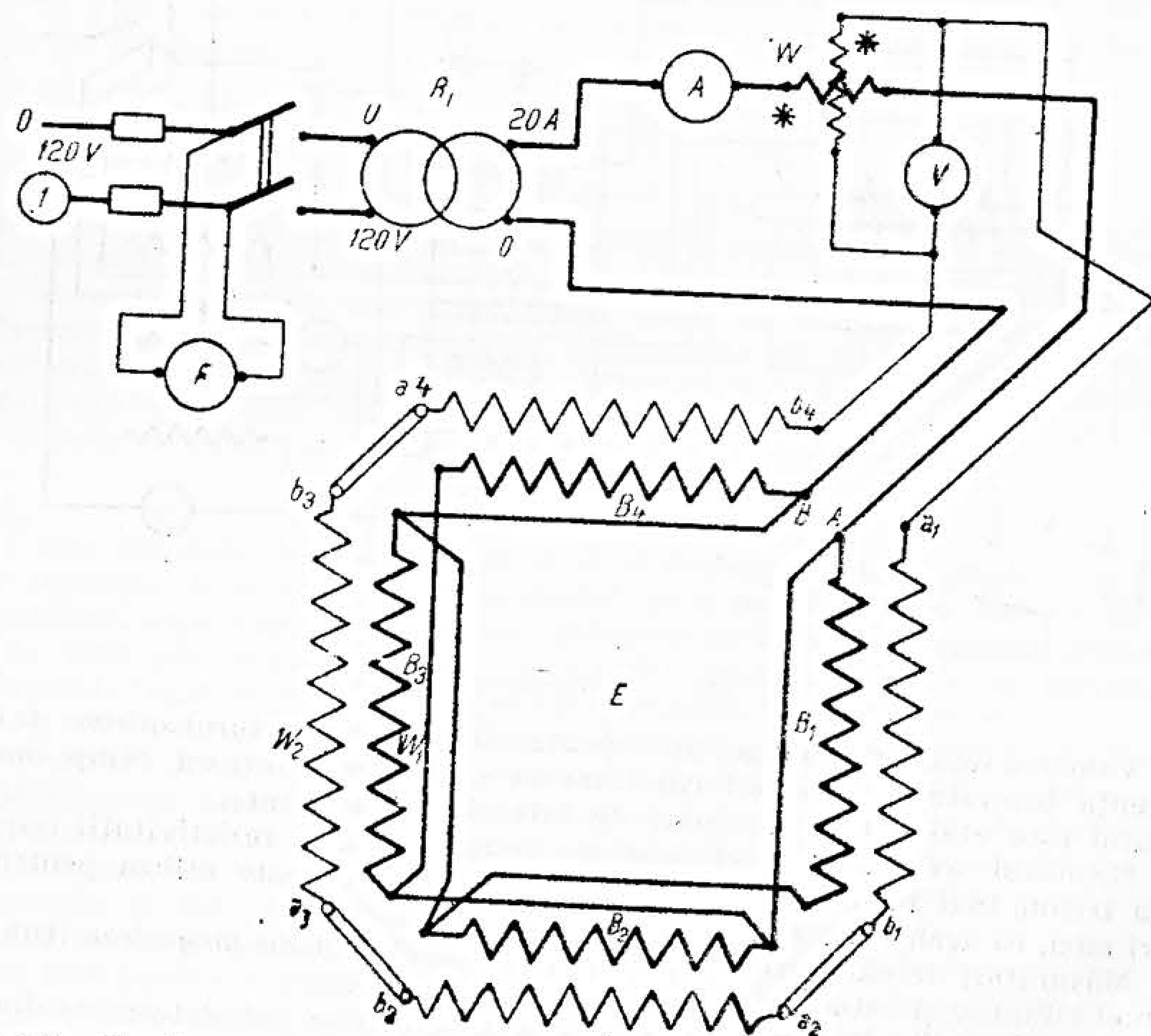


Fig. 219. – Metoda wattmetrului pentru determinarea pierderilor în fier (aparatul Epstein).

un regulator inductiv de tensiune, F — frecvenţmetru, A — ampermetru, W — wattmetru şi V — voltmetru. Pentru a se elimina din pierderile măsurate pierderile în cupru în înfăşurarea de magnetizare W_1, aparatul este înzestrat cu o înfăşurare secundară W_2, prin care se alimentează circuitul de tensiune al unui wattmetru şi al unui voltmetru. Aceasta este formată tot din patru bobine, a_1, b_1, a_2, b_2,

a_3 b_3, a_4 b_4 dispuse sub cele 4 bobine primare şi deobicei de acelaşi număr de spire (adeseori 150).

Dacă se însemnă cu:

K — factorul de formă pentru curba de curent alternativ;
f — frecvenţa curentului alternativ, în Hz;
w_2 — numărul de spire al înfăşurării secundare;
B_{max} — inducţia la care se determină pierderile, în gauşi;
S — secţiunea netă a pachetului de tole, în cm²,

pentru crearea inducţiei B_{max} este nevoie de o tensiune la bornele înfăşurării de magnetizare de

$$U = 4Kfw_2\, B_{max}\, S\, 10^{-8}\ \text{V}.$$

Pierderile se determină deobicei pentru inducţiile de 10 000 şi 15 000 gauşi. Factorul de formă este 1,11 pentru curbe sinusoidale şi secţiunea

$$S = \frac{10\,000}{4 \cdot 50 \cdot \gamma},$$

γ fiind greutatea specifică a materialului cercetat, care se ia 7,8 pentru tole obişnuite şi 7,55 pentru tole cu siliciu supraaliate.

Pentru determinarea pierderilor, se aplică circuitului de magnetizare tensiunea calculată ca mai sus pentru inducţia corespunzătoare.

Dacă P_m este puterea măsurată la wattmetru, pierderile în fier pe kg sunt

$$p_{fier} = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{w_1}{w_2} P_m - \frac{U^2}{r_v} - \frac{U^2}{r_w} \right) \text{W/kg},$$

în care w_1, respectiv w_2, este numărul de spire primare respectiv secundare, r_v rezistenţa interioară a voltmetrului şi r_w rezistenţa interioară a bobinei de tensiune a wattmetrului întrebuinţat. Ca wattmetru se va utiliza un aparat supraîncărcabil, pentru un factor de putere redus.

Separarea pierderilor histerezis de pierderile prin curenţi turbionari pentru o anumită inducţie se poate face executând două măsurători cu aparatul Epstein, la două frecvenţe diferite.

Dacă p_1 sunt pierderile măsurate la frecvenţa f şi p_2 cele măsurate la frecvenţa $\frac{f}{2}$, pierderile histerezis la frecvenţa f sunt

$$p_H = K_1\, f = 4\, p_2 - p_1,$$

iar pierderile prin curenţi turbionari la aceeaşi frecvenţă sunt

$$p_F = K_2\, f^2 = 2\, p_1 - 4\, p_2.$$

223 bis. **Metoda diferenţială** pentru determinarea pierderilor în fier utilizează două aparate ca cel de mai sus, identice, într'unul din ele introducându-se tolele de studiat, iar în celălalt tole etalon, a căror cifră de pierderi/kg este cunoscută. Instalaţia implică întrebuinţarea unui wattmetru diferenţial şi a unor rezistenţe de precizie. Avantajul ei constă în faptul că pierderile în fier se află printr'o relaţie simplă, în funcţie de pierderile cunoscute ale mostrei etalon.

224. **Aparate pentru măsurarea diferenţei de potenţial magnetic.** Forţa magnetomotoare într'un circuit magnetic închis de secţiune constantă este

$$F_m = wI\ \ \text{Asp}$$

în care w este numărul de spire al bobinei magnetizante şi I — curentul care circulă în bobină (în Amperi).

Câmpul

$$H = \frac{WI}{l} \text{ Asp/m}$$

l fiind lungimea mijlocie a drumului liniilor de forţă în m.

Dacă secţiunea circuitului magnetic nu este constantă, sau dacă există întrefieruri, formulele simple de mai sus nu mai sunt aplicabile. Forţele magnetomotoare sau diferenţa de potenţial magnetic între două puncte A şi B ale circuitului se pot măsura direct cu *măsurătorul de tensiune magnetică*. Acesta este format dintr'o bobină înfăşurată pe o fâşie de carton, curea sau alt dielectric flexibil, într'un strat omogen de spire uniform repartizat pe toată lungimea (fig. 220, *a*).

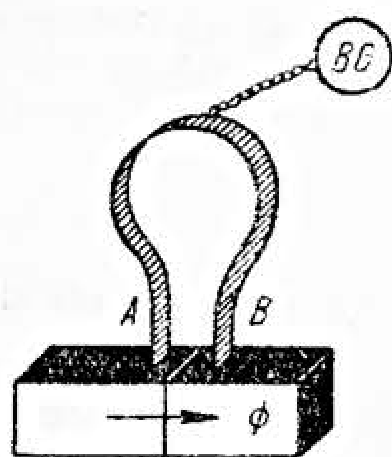


Fig. 220 *a*. — Măsurător de tensiune magnetică.

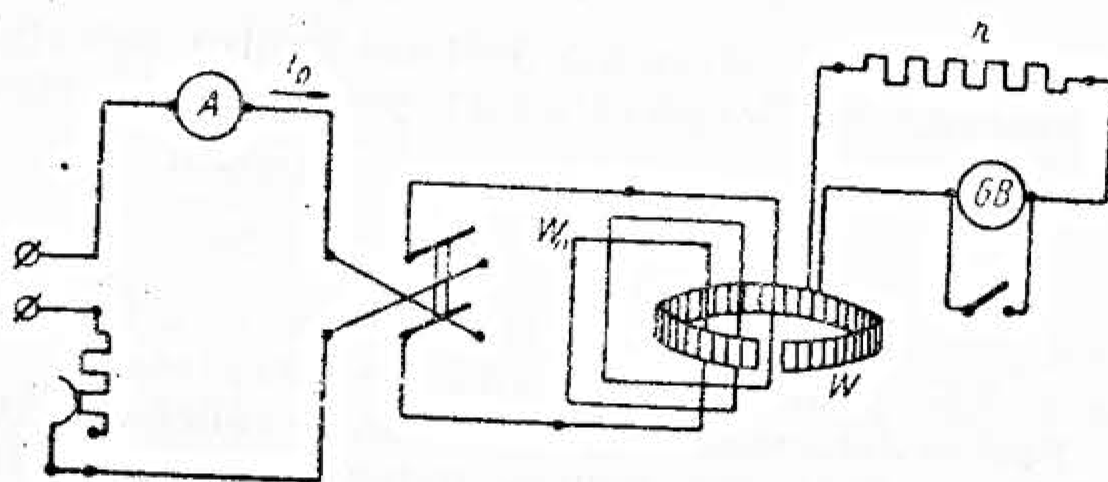


Fig. 220 *b*. — Etalonarea unui măsurător de tensiune magnetică.

Extremităţile acestei înfăşurări sunt scoase la mijlocul ei şi apoi sunt puse în legătură cu un galvanometru balistic.

Pentru a măsura diferenţa de potenţial magnetic între două puncte ale unui câmp magnetic A şi B, bobina se aşează cu extremităţile ei în aceste puncte şi se suprimă brusc câmpul magnetic dacă este posibil, sau se scoate brusc bobina din câmpul magnetic. Se produce în bobină o variaţie de flux a cărei expresie se găseşte a fi

$$\Delta \Phi = w_u S \int_A^B H \, dl \cos \alpha,$$

în care w_u este numărul de spire pe m de lungime a bobinei, S secţiunea acesteia în m², H câmpul magnetic într'un punct al axului bobinei în Asp/m, dl o lungime elementară de bobină măsurată dealungul axului, iar α unghiul dintre câmpul H şi direcţia dl.

Această variaţie de flux dă naştere unei cantităţi de electricitate

$$Q = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{S w_u}{R} \int_A^B H \, dl \cos \alpha,$$

care dă o elongaţie la galvanometrul balistic proporţională cu Q, $\alpha = \frac{Q}{K}$; aceasta permite să se determine valoarea diferenţei de potenţial magnetic şi deci a forţei magnetomotoare F între punctele A şi B

$$F = \int_A^B H \, dl \cos \alpha = \frac{RQ}{S w_u} = \frac{K R \alpha}{S w_u} \text{ Asp}$$

în care R este rezistenţa totală a circuitului bobină-galvanometru.

Pentru etalonarea balisticului în condiţiile experienţei se face montajul din fig. 220, *b*. Se trece bobina măsurătorului de tensiune magnetică printr'o bobină etalon de un număr de spire w_0 cunoscut şi traversată de un curent I_0 deasemenea cunoscut, extremităţile măsurătorului magnetic fiind reunite cap la cap. Se face o inversare a curentului I_0 în bobina etalon dela $+I_0$ la $-I_0$ şi se măsoară deviaţia balisticului.

Se determină astfel valoarea:

$$\frac{KR}{S w_u} = \frac{2 w_0 I_0}{\alpha_0} = \frac{K_1}{\alpha_0},$$

şi deci formula de lucru a măsurătorului de tensiune magnetică de mai sus devine

$$F = K_1 \frac{\alpha}{\alpha_0} \text{ Asp.}$$

G. Măsurarea energiei electrice. Contori electrici

225. **Generalităţi.** Contorii electrici sunt aparatele care permit măsurarea energiei electrice consumate de un receptor într'un interval de timp $= t_1 - t_2$ după expresia:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt,$$

P fiind puterea receptorului.

În consecinţă, aceste aparate vor avea un dispozitiv wattmetric de măsurare a puterii şi un dispozitiv pentru integrarea energiilor elementare corespunzătoare acestei puteri.

225 bis. **Categoriile de contori.** *După natura curentului* se deosebesc:

— contorii de curent continuu;

— contorii de curent continuu şi alternativ;

— contorii de curent alternativ, monofazaţi şi trifazaţi pentru distribuţii cu şi fără fir neutru.

După mărimea măsurată se deosebesc:

— wattorămetrele, sau contorii de energie activă;

— varorămetrele, sau contorii de energie reactivă;

— amperorămetrele, sau contorii de cantitate de electricitate.

După principiul lor de funcţionare, se deosebesc:

— Contorii de tipul «motor», care cuprind: contorii dinamometrici utilizaţi aproape exclusiv în curent continuu, deşi se pot întrebuinţa şi în curent alternativ; contorii magnetoelectrici, utilizaţi numai în curent continuu; contorii de inducţie, utilizaţi exclusiv în curent alternativ.

— Contorii electrolitici, care cuprind contorii cu mercur şi contorii cu hidrogen.

— Contorii pendulari.

În cele de mai jos sunt descrise cele mai importante tipuri de contori de curent continuu şi alternativ.

a) Wattorămetre

226. **Contorii dinamometrici de tip « motor » pentru curent continuu.** Construcţia lor este asemănătoare cu a wattmetrelor electrodinamice. Ei se compun dintr'o bobină fixă, *bobina de curent*, formată din două jumătăţi identice *1*,

între care se găsește bobina mobilă *2*, *bobina de tensiune*, construită ca un indus de motor, care însă nu conține fier, forma spirelor menținându-se prin propria rigiditate a conductorilor de cupru respectivi.

Prin bobina de curent, trece curentul de utilizare *I*; bobina de tensiune, montată în serie cu o rezistență adițională *8* și o altă bobină de compensație *7*, este alimentată cu tensiunea rețelei *U* prin intermediul unui colector *3* pe care calcă două perii de argint *6* cu frecări foarte reduse. Ea este montată pe un ax vertical, care se rotește în două lagăre *4* și *5*, dintre care cel inferior este format din pietre prețioase pentru reducerea frecărilor, iar cel superior este numai de ghidare.

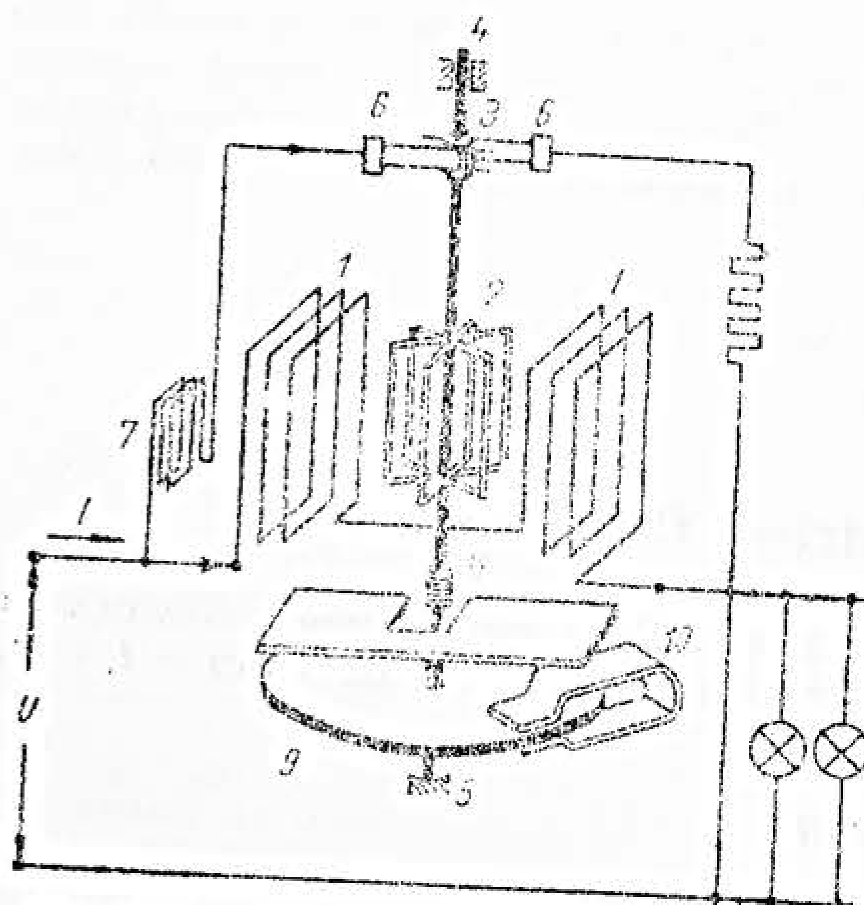


Fig. 221. — Schema principială a contorului dinamometric pentru curent continuu.

Pe același ax este fixat un disc ușor de aluminiu *9*, acesta se rotește în interiorul unui magnet permanent *10* care furnizează cuplul antagonist; axul aparatului se angrenează prin intermediul șurubului fără sfârșit *11* cu un mecanism integrator al numărului de rotații executat de discul aparatului.

Dacă Φ este fluxul dat de curentul *I* din bobina de curent, curent cu care este proporțional, $\Phi = KI$, iar *i* este curentul în indusul mobil, a cărui valoare este $i = \dfrac{U}{R}$, *R* fiind rezistența totală a circuitului indusului, acesta din urmă este supus unui cuplu activ

$M_a = K_0\, \Phi i = K_0 KI \dfrac{U}{R} = K'UI = K'P$, proporțional cu puterea $P = UI$ a receptorului, care pune indusul în mișcare, întocmai ca și indusul unui motor. Discul de aluminiu al aparatului rotindu-se în întrefierul magnetului permanent, se nasc în el curenți de inducție care, împreună cu fluxul Φ_M al magnetului permanent, dau naștere unui cuplu de frânare antagonist, $M_r = K_1 \omega = K_2 N$, proporțional cu viteza unghiulară de rotație ω sau cu numărul de rotații pe secundă *N* ale discului. Când cele două cupluri devin egale, mișcarea de rotație a indusului devine uniformă, obținându-se următoarea relație de funcționare a contorului:

$$M_a = M_r \quad ; \quad K'P = K_2 N,$$

sau

$$P = K_3 N,$$

adică *puterea receptorului P este proporțională cu numărul de rotații pe secundă N*. Integrând ambii membri ai acestei relații într'un interval de timp *t* de funcționare a contorului, se obține valoarea energiei electrice.

$$W = \int_0^t P\, dt = K_3 \int_0^t N\, dt = K'n,$$

n fiind numărul de rotații executat de discul aparatului în timpul *t*, adică în definitiv: *energia electrică consumată de receptor în timpul t este proporțională cu numărul de rotații n efectuat în acest timp.*

Ținându-se seama de constanta *K'* la executarea dispozitivului integrator al numărului de rotații menționat, aparatul este gradat direct în unități de energie, kilowattore, hectowattore etc., energia *W* putându-se deci măsura direct.

Constanta contorului. Pentru etalonarea contorului, pe plăcuța lui de fabricație se găsește marcată și constanta *K* dată sub forma:

1 kilowattoră = *K* rotații ale discului, valoare care este inversul constantei *K'* din relația $W = K'n$.

Compensarea pierderilor prin frecări. Pentru compensarea cuplului de frecări ale periilor pe colector, ale axului pe lagăre, etc., de care nu s'a ținut seama la stabilirea ecuației de funcționare $M_a = M_r$ de mai sus, se folosește *bobina de compensare 7* din circuitul indusului, al cărui flux φ furnizează, împreună cu curentul *i* al indusului, un cuplu suplimentar, care se reglează astfel încât contorul fiind numai sub tensiune, discul aparatului să stea pe loc, cu alte cuvinte cuplul suplimentar să egaleze cuplul de frecări.

Mersul contorului în gol. Dacă accidental cuplul suplimentar devine mai mare decât cuplul de frecări, contorul pornește în gol și înregistrează energie fără ca receptorul să consume. Pentru evitarea acestui lucru, se montează pe axul discului un fir de fier, care în momentul când se apropie de magnetul permanent este atras de acesta și discul se oprește.

Schema de legături ale contorului este aceea din fig. 222. Contorul are patru borne mari de curent, dintre care două, în scurtcircuit *C D*, se leagă la al doilea conductor al rețelei, iar celelalte două *A B*, aparținând bobinei de curent a contorului, se leagă la primul conductor. Borna din stânga a bobinei de curent contează ca bornă polarizată de intrare a curentului (fără să fie marcată ca atare, ca la wattmetre).

Fig. 222. — Legarea directă a contorului dinamometric la rețea.

Bobina de tensiune are o extremitate legată la o bornă mai mică *E*, care contează ca bornă polarizată și poate fi legată cu șuruburi de borna polarizată de curent cu ajutorul unei plăcuțe amovibile.

Desfăcând această plăcuță, cele două bobine ale contorului, de curent și de tensiune, se separă pentru scopuri de etalonare, racordare a contorului pe șunt, etc.

Dacă se produce o inversare a legăturilor, discul contorului se rotește în sensul invers celui normal, indicat de o săgeată pe capacul aparatului și energia consumată se scade în loc să se adune de către mecanismul integrator.

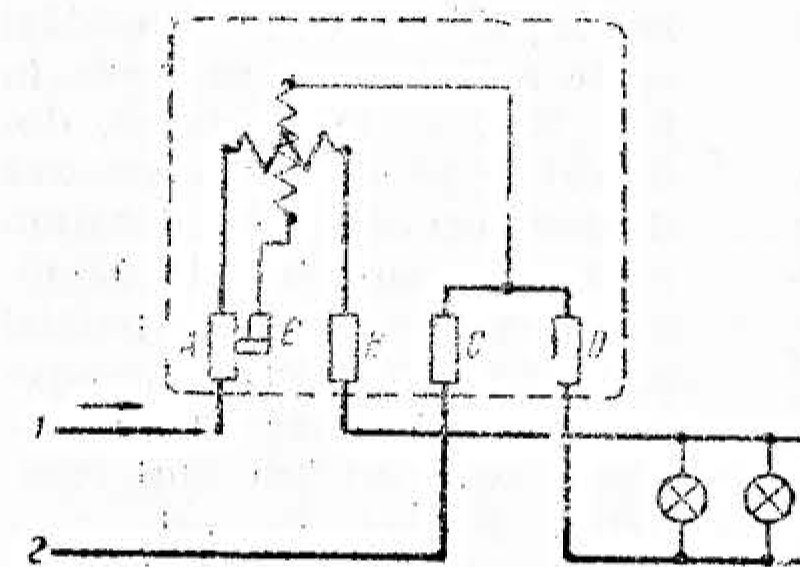


Fig. 223. — Legarea contorului prin intermediul unui șunt.

Date caracteristice ale contorului. Pe plăcuța de fabricație a contorului, sunt înscrise tensiunea *V* și curentul *I* precum și constanta *K* sub forma:

120 V—5 A—1 kWh = 1200 rot.

Acești contori se execută în general pentru tensiuni până la 650 V și curenți până la 100 A. Peste această valoare, bobina de curent se montează pe un șunt, iar bobina de tensiune (separată de bobina de curent) în derivație direct pe rețea, ca în fig. 223.

Pornirea la 1% din sarcina nominală; eroare pentru 5—125% din sarcina nominală 2—3%; consumul propriu al bobinei de tensiune (indusului) este de 0,5—2W.

227. Contori dinamometrici oscilanţi. Contorii dinamometrici se construesc şi sub formă de *contori oscilanţi.* Indusul se compune dintr'o singură bobină de tensiune, la care curentul este condus prin spirale de sârmă subţire, bobina de curent fiind formată tot din două jumătăţi egale. Mişcarea de rotaţie este limitată prin doi opritori, prin care se stabileşte un contact al unui releu; acesta schimbă sensul curentului în bobina de tensiune. Indusul capătă astfel o mişcare oscilantă, numărul oscilaţiilor fiind proporţional cu energia. Avantajul unui astfel de contor este că nu posedă nici colector nici perii, care sunt organe foarte delicate. Astfel de contori se construesc foarte rar.

228. Contorul monofazat de inducţie. Este constituit în esenţă din doi electromagneţi, *AC* şi *B* în întrefierul cărora se poate mişca un disc de aluminiu *D* fixat

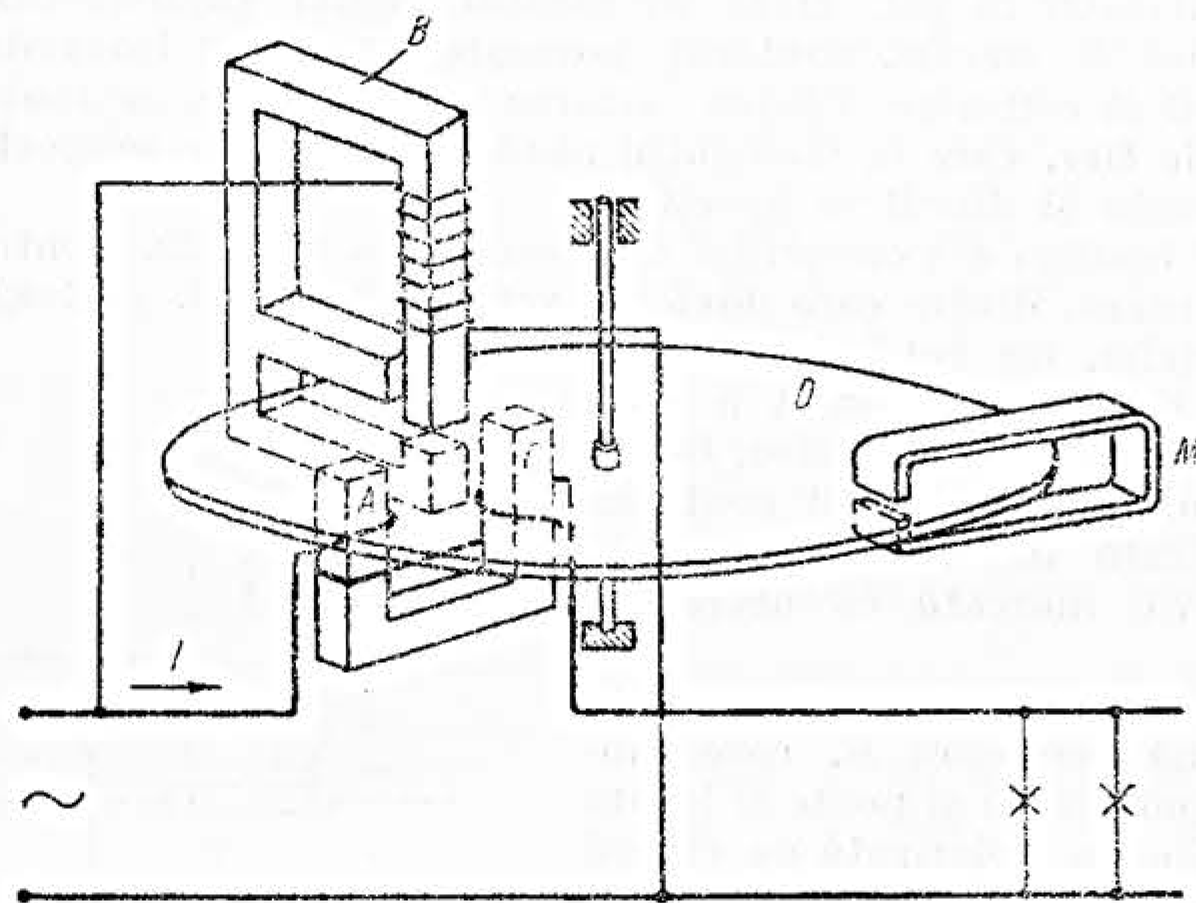


Fig. 224. — Schema principială a contorului de inducţie.

pe un ax vertical, care se roteşte în două lagăre (fig. 224), în interiorul magnetului permanent *M.*

Electromagnetul de curent (*AC* din fig. 224) al cărui circuit magnetic este în formă de *U* are o înfăşurare prin care trece curentul de utilizare *I* şi care este împărţită în două jumătăţi egale astfel cum se vede în fig. 225, *a.* O parte Φ_1 din fluxul Φ produs, traversează de două ori discul de aluminiu în două sensuri diferite, închizându-se prin aer şi parţial prin circuitul electromagnetului, cealaltă parte Φ'_1 închizându-se printr'un şunt magnetic. Fluxul Φ_1 este proporţional cu curentul *I* şi decalat în urmă faţă de acesta cu un mic unghi φ_I.

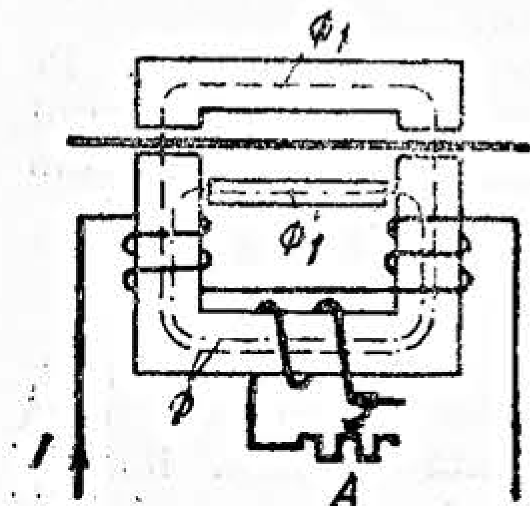


Fig. 225, *a* — Electromagnetul de curent.

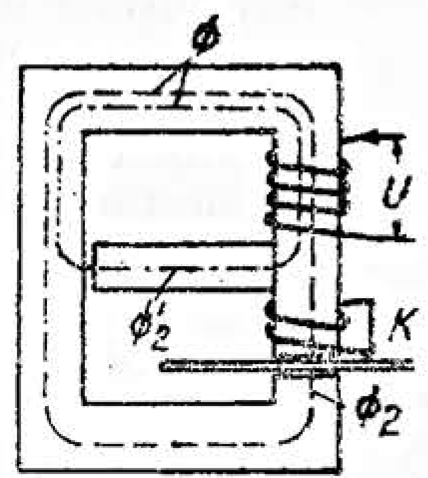


Fig. 225, *b* — Electromagnetul de tensiune.

Pe porţiunea orizontală a electromagnetului, se găseşte o înfăşurare de câteva spire, închisă pe o mică rezistenţă *A*, formată din două fire de nichel pe care lunecă un cursor şi al cărui rost este acela de a varia decalajul φ_I.

Electromagnetul de tensiune (*B* din fig. 224), al cărui circuit magnetic este de obicei de forma indicată în fig. 225, *b,* comportă un şunt magnetic şi un întrefier, bobina de excitaţie fiind alimentată în derivaţie de tensiunea *U* a receptorului.

Din fluxul Φ produs de această tensiune, o parte Φ'_2 trece prin şuntul magnetic iar restul, fluxul activ Φ_2, traversează discul de aluminiu la egală distanţă între cele două fluxuri ale bobinei de curent.

Pe partea circuitului magnetic de deasupra discului se găseşte o înfăşurare auxiliară *K* de câteva spire, închisă în scurtcircuit.

Principiul de funcţionare a contorului este următorul:

Fluxurile active Φ_1 şi Φ_2 ale celor doi electromagneţi, traversând discul, produc în acesta curenţi de inducţie Foucault I_1 şi I_2 proporţionali cu fluxurile Φ_1 respectiv Φ_2 al căror traseu este indicat în fig. 226. Din acţiunea reciprocă a fluxurilor Φ_1 respectiv Φ_2 asupra curenţilor I_2 respectiv I_1, se produce asupra

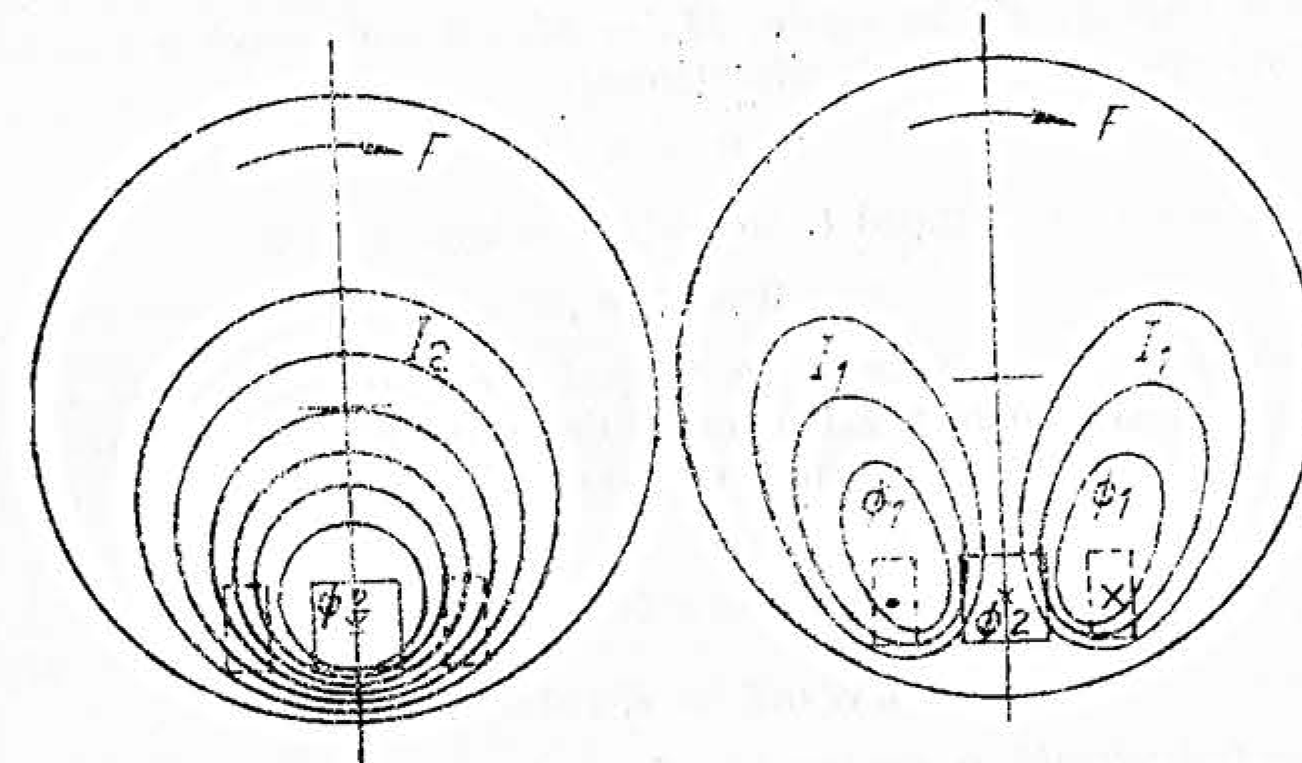


Fig. 226. — Principiul de funcţionare a contorului de inducţie.

discului o forţă *F*, de direcţia arătată în fig. 226 care dă naştere unui cuplu de rotaţie, a cărui valoare — întocmai ca şi la celelalte aparate de inducţie — are expresia:

$$M_a = kf\,\Phi_1\,\Phi_2 \sin(\Phi_1\,\Phi_2)$$

în care *f* este frecvenţa curentului de alimentare, sau pentru frecvenţă constantă,

$$M_a = K\Phi_1\,\Phi_2 \sin(\Phi_1\,\Phi_2),$$

acest cuplu punând discul în mişcare în sensul arătat de săgeata *m* în fig. 227.

Fluxul Φ_1 fiind proporţional cu curentul de utilizare *I*, ($\Phi_1 = K_1 I$) şi decalat în urmă faţă de acesta cu un mic unghi φ_I, (fig. 227) iar fluxul Φ_2 proporţional cu tensiunea de alimentare *U*, ($\Phi_2 = K_2 U$), şi decalat faţă de aceasta cu un unghi β, în general mai mic decât 90°, valoarea cuplului capătă expresia:

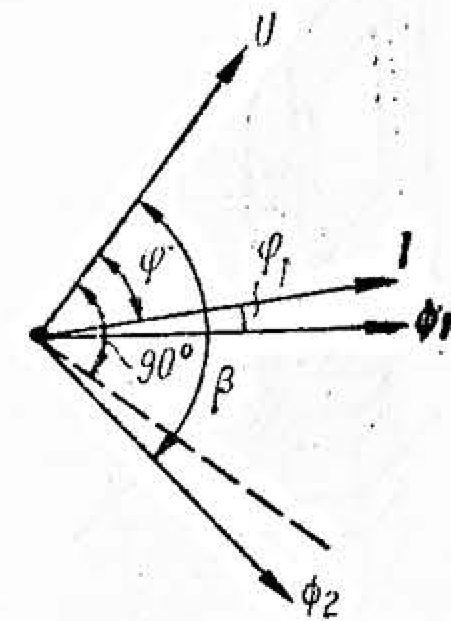


Fig. 227. — Diagrama vectorială a contorului de inducţie monofazat.

$$M_a = K\,K_1 I\cdot K_2 U \sin(\beta - \varphi - \varphi_I) = K'UI \sin(\beta - \varphi - \varphi_I).$$

Cu ajutorul şuntului magnetic al electromagnetului de tensiune, care măreşte inductivitatea circuitului de tensiune şi cu ajutorul spirelor în scurtcircuit, al căror

efect — grație curenților de inducție care se nasc în acestea și deci al fluxului auxliar pe care-l provoacă — este de a contribui la decalarea și mai mult în urmă față de tensiunea U a fluxului Φ_2 al bobinei de tensiune, se face ca unghiul de decalaj β între acestea să aibă valoarea de:

$$\beta = 90^\circ + \varphi_I .$$

Cu această condiție, cuplul activ va căpăta valoarea:

$$M_a = K'U\,I \sin(90^\circ + \varphi_I - \varphi - \varphi_I) = K'UI \sin(90^\circ - \varphi) = K'\,UI\cos\varphi = K'P.$$

Cuplul activ este deci proporțional cu puterea circuitului de utilizare, întocmai ca și la contorul de curent continuu cu a cărui funcționare se aseamănă de aici înainte întocmai.

Discul, rotindu-se în întrefierul unui magnet permanent, este supus unui cuplu antagonist M_r, proporțional cu numărul de rotații pe secundă $M_r = K''N$. Când cele două cupluri devin egale, $M_a = M_r$, discul acuză o mișcare de rotație uniformă, obținându-se relația de funcționare

$$K'P = K''N,$$

din care, prin integrare în timpul t, se obține relația finală:

$$W = K_0 n,$$

adică *energia electrică W consumată în timpul t este proporțională cu numărul de rotații n* efectuat de contor în acest interval de timp; ea este măsurată cu ajutorul unui mecanism de ceasornic angrenat cu axul discului, întocmai ca la contorul de curent continuu.

Pe placa de fabricație a contorului este indicată constanta $K = \frac{1}{K_0}$ sub forma:

$$1\ \text{kW oră} = K\ \text{rotații}.$$

Realizarea industrială a contorului de inducție monofazat. După poziția pe care o ocupă cei doi electromagneți unul față de celălalt și față de întregul ansamblu al acestora — sistemul de propulsie, disc — se deosebesc: tipul cu *sistemul radial* (fig. 228), în care electromagnetul de tensiune este dispus într'un plan care trece

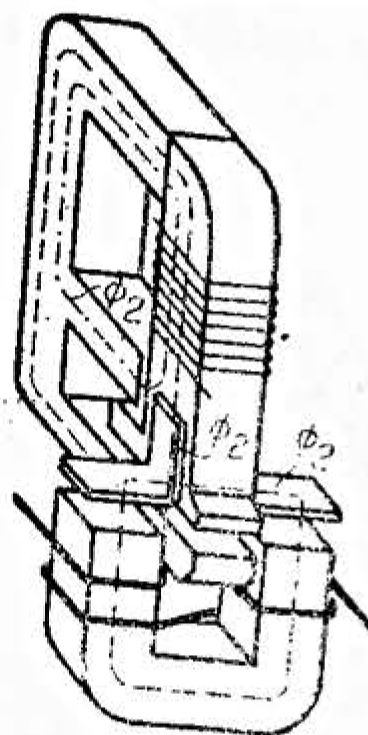


Fig. 228. — Sistemul radial.

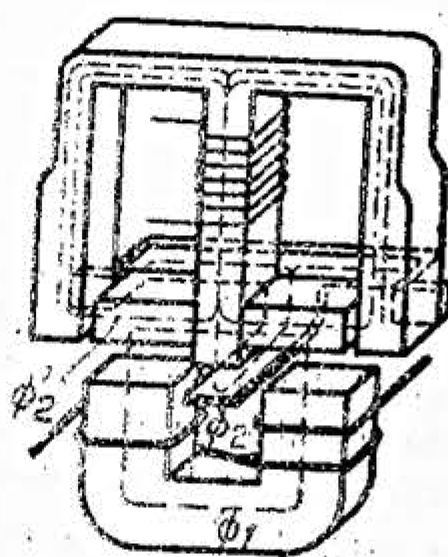


Fig. 229. — Sistem tangențial.

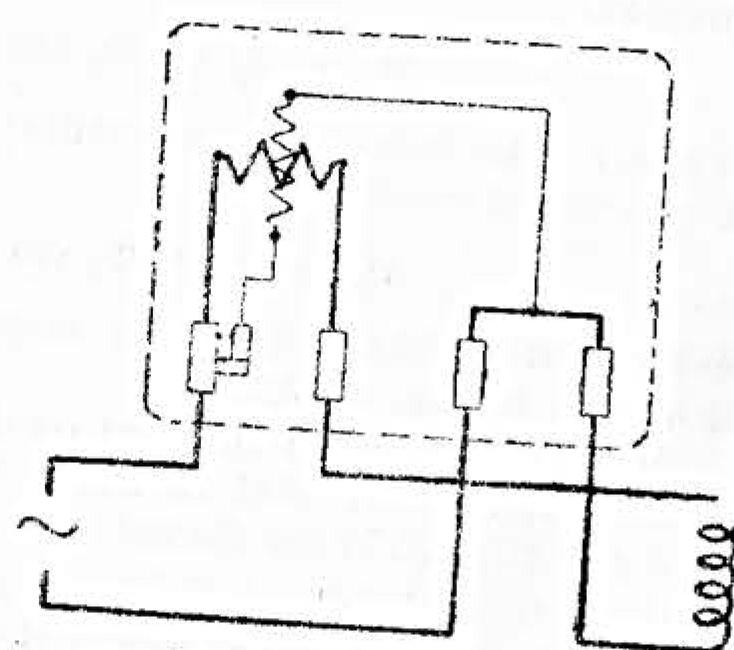


Fig. 230. — Legarea contorului de inducție monofazat la rețea.

prin axul discului iar electromagnetul de curent într'un plan normal pe acesta, și tipul cu *sistemul tangențial*, în care ambii electromagneți sunt așezați într'un același plan normal pe un plan care conține axul, ca în fig. 229.

Schema de legătură a contorului, reprezentată în fig. 230, este identică cu aceea a contorului de curent continuu din fig. 222, luându-se și aici aceeași precauție a respectării polarității indicate pe schemă, pentru obținerea sensului normal de rotație.

Date caracteristice ale contorului. Pe plăcuța de fabricație sunt indicate tensiunea U, curentul I, frecvența f și constanta K a contorului sub forma:

120 V — 10 A — 50 Hz — 1 kWh = 3600 rotații.

Contorii se construesc deobicei pentru tensiuni până la 650 V și curenți până la 100 A.

Consumul propriu în circuitul de intensitate circa 0,7 — 0,8 W; consumul propriu în circuitul de tensiune circa 0,6 W; cuplul motor circa 3—6 gcm; pornirea la o intensitate de 0,3% din I nominal; tensiunea de încercare 2000 V; capacitatea de supraîncărcare circa 100% în mod permanent; eroarea de temperatură pentru 1° C circa 0,05%.

229. Cauzele de erori în contorul de inducție monofazat și mijloacele de combatere.

α) *Nerealizarea reglajului de* 90° privind decalajul β dintre fluxul de tensiune Φ_2 și tensiunea U, $\beta = 90^\circ + \varphi_1$ constitue o primă cauză de eroare.

Deaceea această condiție este cu îngrijire asigurată din fabrică, prin potrivirea șuntului magnetic al circuitului de tensiune și al spirelor de scurtcircuit ale celor doi electromagneți.

Ajustarea precisă se face experimental, fie reglând rezistența spirelor în scurtcircuit ale electromagnetului de curent, fie, dacă acestea sunt fixe, prin variația întrefierului șuntului magnetic al bobinei de tensiune, prin introducerea în acest întrefier a unor plăcuțe metalice.

β) *Influența frecărilor.* Ca și la contorul de curent continuu, frecările datorite mișcării axului în lagăre, mecanismului de ceasornic, etc., trebue compensate astfel încât contorul să nu dea erori mari la sarcini reduse.

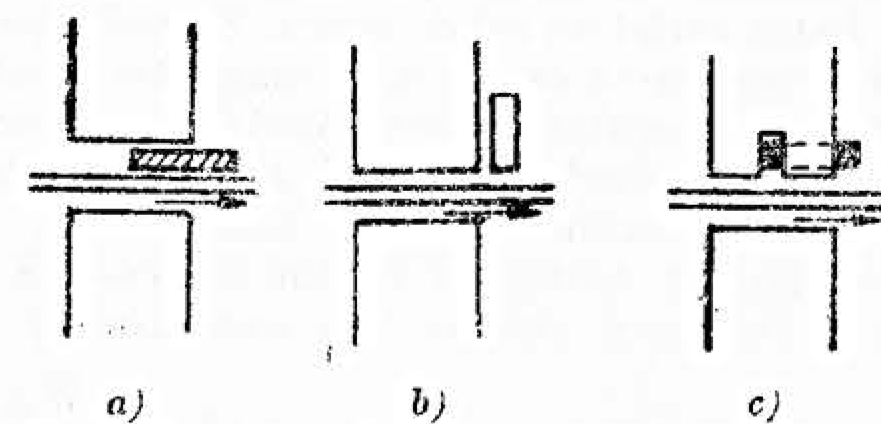


Fig. 231 *a,b,c.* — Dispozitive pentru compensarea frecărilor.

Dispozitivele de compensare se bazează pe principiul că discul contorului este totdeauna supus acțiunii unui cuplu de rotație, dacă este traversat de două fluxuri decalate în timp și în spațiu.

Astfel de fluxuri decalate se obțin la orice nesimetrie a fluxului bobinei de tensiune, nesimetrie care se poate crea fie prin acoperirea parțială a suprafeței polului printr'o plăcuță de material nemagnetic, cupru sau alamă (ca în fig. 231, *a*), fie prin așezarea asimetrică în jurul polului a unui inel tot de material nemagnetic (fig. 231, *b*), fie prin așezarea unei plăcuțe de fier lângă pol (fig. 231, *c*), etc.

Disimetria se reglează experimental, până când cuplul compensator devine egal cu acela datorit frecărilor.

γ) *Efectul de frânare a discului de către fluxurile de curent* Φ_1 *și de tensiune* Φ_2. Cele două fluxuri Φ_1 și Φ_2 ale bobinelor de curent și de tensiune mai produc fiecare în disc, înafară de curenții de inducție propulsori I_1 și I_2 și curenți de inducție de frânare, întocmai ca fluxul magnetului permanent; acești curenți de frânare provoacă două mici cupluri antagoniste, dintre care cel mai important este cel produs de fluxurile curentului Φ_1, care crește cu sarcina, din care cauză și erorile contorului cresc la sarcini mari.

Această cauză de erori se combate între altele cu ajutorul unui șunt magnetic, cu care se dotează circuitul electromagnetului de curent; șuntul face ca, pentru

sarcini mari, fluxul Φ_1 care traversează discul să crească mai mult decât proporţional cu curentul I_1, surplusul de cuplu activ compensând efectul menţionat.

δ) *Influenţa temperaturii exterioare.* Variaţiile de temperatură sunt aproape fără influenţă asupra indicaţiilor contorului, întrucât crescând temperatura, rezistivitatea discului de aluminiu creşte, curenţii de inducţie în disc scad şi deci cuplul activ scade şi el; în aceeaşi măsură însă scade şi cuplul antagonist, astfel încât cele două efecte se compensează.

O uşoară influenţă există însă din cauza slăbirii fluxului magnetului permanent.

ε) *Influenţa tensiunii.* Variaţia tensiunii unui contor faţă de valoarea sa nominală, produce o variaţie a cuplului de frânare dinamică al fluxului de tensiune Φ_2, a cuplului de compensare a frecărilor pentru sarcini foarte mici ale contorului şi a decalajului dintre fluxul de tensiune util Φ_2 şi fluxul de curent Φ_1.

Toate aceste influenţe sunt însă foarte reduse, astfel încât se poate considera că o variaţie a tensiunii de circa $\pm$ 20% faţă de valoarea sa nominală nu dă naştere unor erori mai mari decât 0,5% — 1%, astfel cum se vede din fig. 232, *c*.

φ) *Influenţa frecvenţei.* Indicaţiile contorului se pot considera practic independente de frecvenţă întrucât, considerând forma iniţială a cuplului activ

$$M_a = Kf\, \Phi_1\, \Phi_2 \sin(\Phi_1 \Phi_2),$$

se ştie că fluxul activ de tensiune Φ_2 variază în raport invers proporţional cu frecvenţa, ceeace face să dispară frecvenţa din expresia cuplului C_a.

Pentru o variaţie a frecvenţei de $\pm$ 5% se obţine o eroare de circa $\pm$ 1%, astfel cum se vede din fig. 232, *d*.

ψ) *Influenţa formei curbei de tensiune* asupra indicaţiilor contorului poate fi considerată aproape fără importanţă.

λ) *Influenţa câmpurilor magnetice exterioare.* Contorii de inducţie sunt puţin influenţaţi de câmpurile magnetice exterioare, în special când carcasa este de fier şi joacă astfel un rol de ecran. Totuşi capacul de tablă al contorului are desavantajul că se comportă ca un şunt magnetic pentru magnetul permanent. Deaceea, etalonarea contorului trebue făcută cu capacul pus.

229 bis. **Curbe de erori ale contorilor.** Toate cauzele de influenţare a indicaţiilor contorului mai sus menţionate au ca rezultat final erori de înregistrare care trebue reduse la minimum posibil.

Definind eroarea ε a unui contor prin relaţia

$$\varepsilon\% = \frac{W_m - W}{W} \cdot 100,$$

în care W_m este energia înregistrată de contor iar W energia reală trecută prin el, contorul se caracterizează în mod obişnuit prin *curbele de erori* reprezentând variaţia erorii exprimată în procente, în funcţie de diverşi parametri: curentul de încărcare, tensiunea, frecvenţa, etc., care intervin în funcţionarea contorilor.

Cea mai importantă este curba erorilor în funcţie de curentul de încărcare exprimat în procente din curetul nominal, denumită curba de sarcină.

In fig. 232, *a*, este reprezentată o astfel de curbă pentru un contor de inducţie monofazat, la care cauzele menţionate de erori nu au fost suprimate efectiv. Se presupune că la reglajul acestui contor în fabrică, poziţia magnetului permanent şi cuplul de compensare a frecărilor s'au potrivit astfel încât contorul să dea o eroare egală cu zero la 100% şi 10% din sarcina nominală; din forma curbei menţionate se vede că pornind dela 100% din sarcina nominală, eroarea este pozitivă şi creşte când sarcina scade, fiindcă efectul de frânare dinamică a fluxului de curent Φ_1 scade, pe câtă vreme când sarcina creşte peste 100%, efectul de frânare creşte şi eroarea este negativă şi creşte foarte mult pentru sarcini mari.

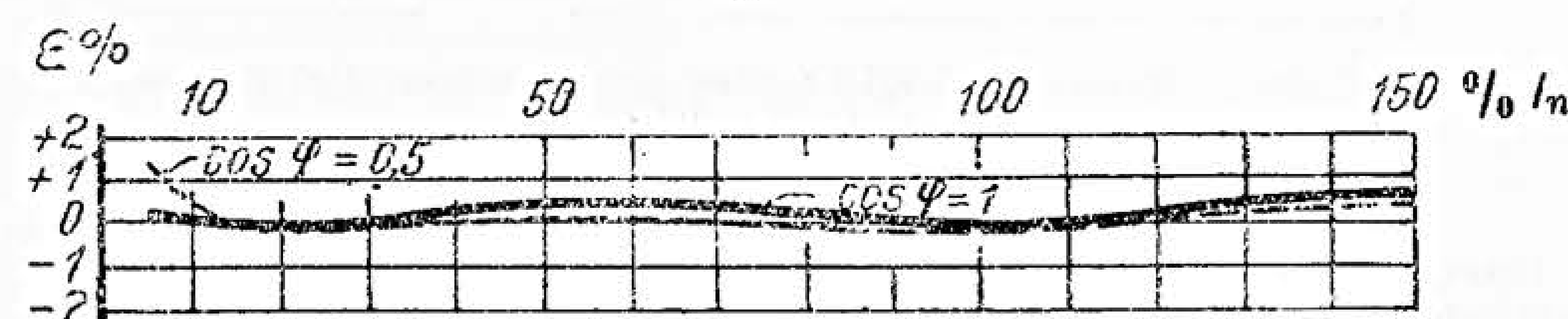
La sarcini mici, sub 10% din sarcina nominală, efectul cuplului de frecări se face simţit şi eroarea devine pozitivă şi creşte când sarcina tinde către zero.

In fig. 232, *b* este redată curba erorilor în funcţie de sarcină a unui contor de construcţie foarte îngrijită, la care combaterea cauzelor de erori a fost efectiv realizată şi care nu are, chiar la 150% din sarcina nominală, erori mai mari de 1%, atât pentru cos φ = 1 cât şi pentru cos φ = 0,5.

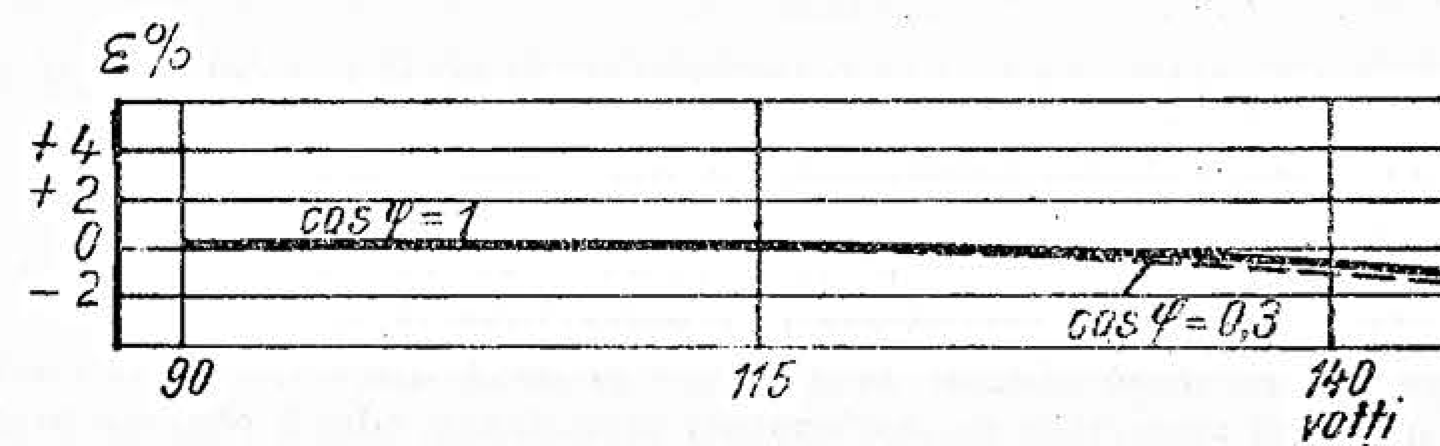
In fig. 232, *c* şi *d*, sunt redate curbele de erori pentru plina sarcină a contorului la cos φ = 1 şi la cos φ = 0,3 în funcţie de variaţiile de tensiune şi de frecvenţă.



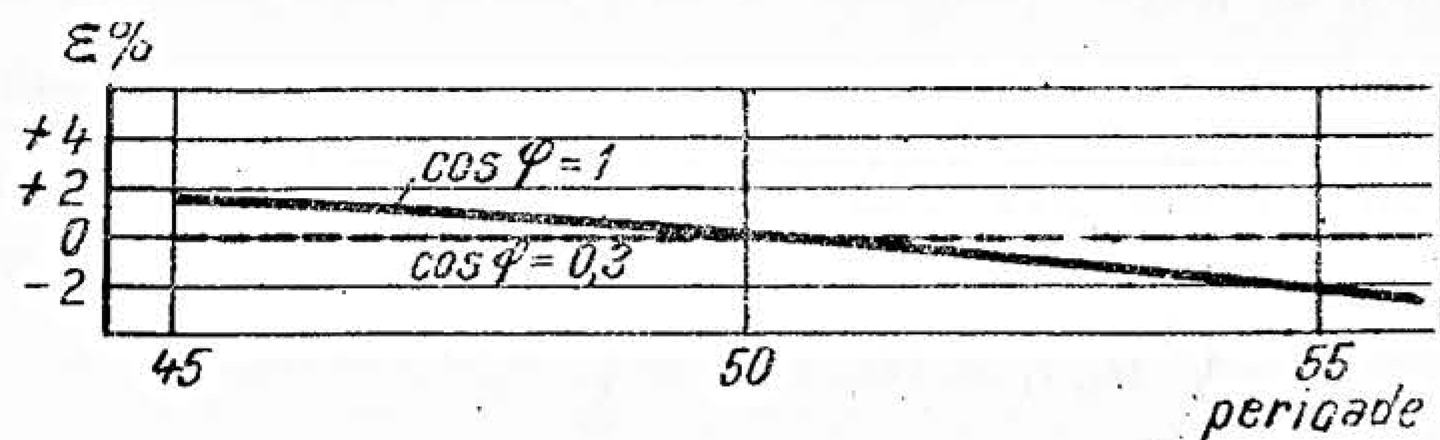
a)



b)



c)



d)

Fig. 232 *a, b, c, d.* — Curbele de erori ale unui contor monofazat.

230. **Măsurarea energiei active în circuitele trifazate.** Se poate efectua fie întrebuinţând un ansamblu de contori monofazaţi, montaţi conform aceloraşi

scheme utilizate la montajul wattmetrelor pentru măsurarea puterii trifazate, fie adoptând soluţia normală a întrebuinţării de contori trifazaţi.

In ce priveşte prima soluţie, pentru măsurarea energiei în circuitele trifazate fără fir neutru cu fazele inegal încărcate de pildă, se montează doi contori monofazaţi conform schemei celor două wattmetre, astfel cum se indică în fig. 233.

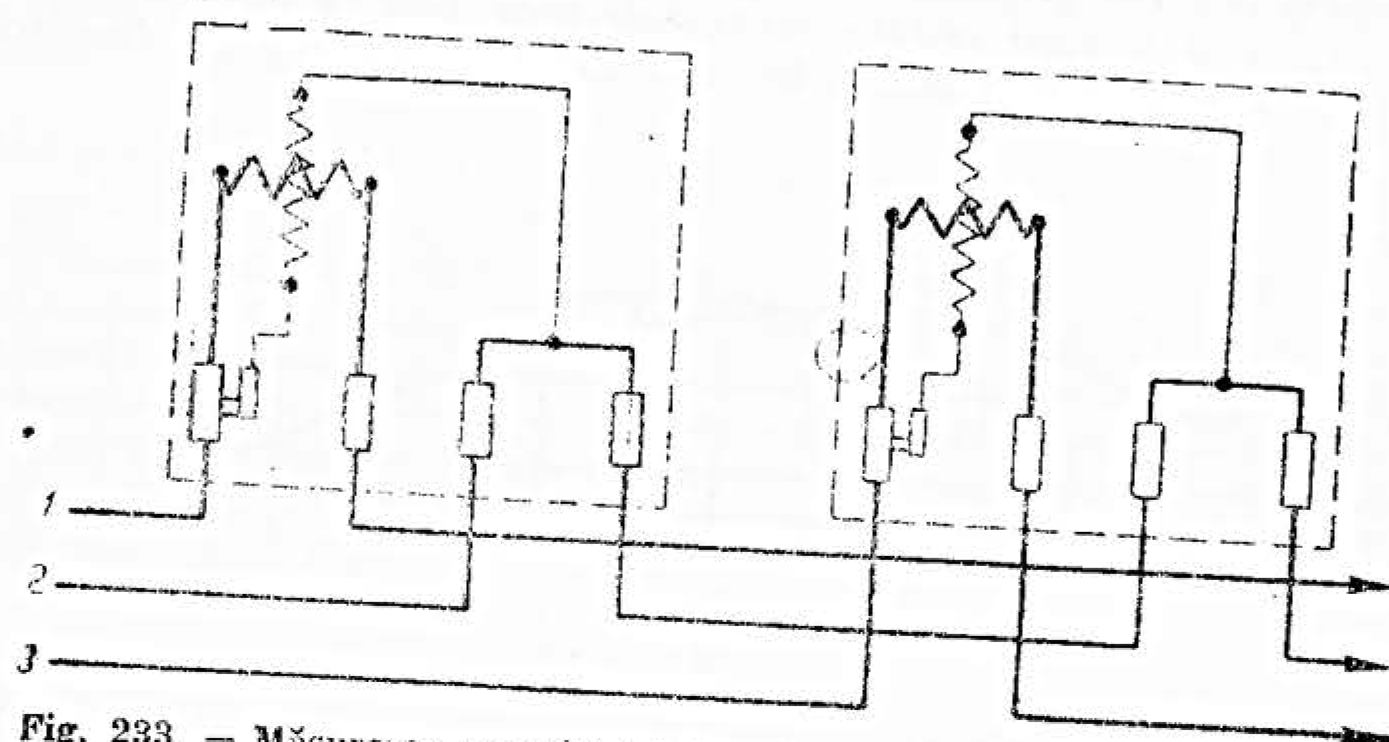


Fig. 233. — Măsurarea energiei într'un circuit trifazat fără fir neutru, cu ajutorul a doi contori.

Energia trifazată se obţine făcând suma energiilor înregistrate de cei doi contori, ale căror discuri se vor roti sau ambele în sensul normal, sau unul în sens normal şi celălalt în sens invers, totul depinzând de natura încărcării circuitului — inductiv sau capacitiv — şi de mărimea decalajelor dintre tensiunile şi curenţii lui.

Pentru acest motiv, nu trebue întrebuinţaţi în acest caz contori cu dispozitiv de oprire a mersului înapoi.

Această metodă nu se întrebuinţează decât în cazul când nu se dispune de contori trifazaţi.

231. Contori trifazaţi pentru măsurarea energiei active în circuitele trifazate fără fir neutru, cu sarcini echilibrate sau desechilibrate.

α) *Contorul cu două sisteme propulsoare şi două discuri.* Aceşti contori sunt constituiţi dintr'un ansamblu de doi contori monofazaţi (două sisteme propulsoare) comportând fiecare din ei un electromagnet de curent, unul de tensiune, un disc de aluminiu şi un magnet permanent, ambele discuri fiind fixate pe un acelaşi ax.

Cele două sisteme fiind montate din punct de vedere electric după metoda celor două wattmetre, efectul celor două cupluri se va transmite asupra axului comun adunându-se algebric, astfel încât mecanismul de ceasornic va indica energia totală trifazată:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U_{12}\, I_1 \cos\,(U_{12}\, I_1)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} U_{32}\, I_3 \cos\,(U_{32}\, I_3),$$

în cazul când s'a luat ca fază de referinţă faza 2.

Schema legăturilor contorului este redată în fig. 234.

Contorul are trei perechi de borne mari de curent, dintre care o pereche în scurtcircuit, se leagă la faza de referinţă, iar celelalte două perechi la conductorul 1 respectiv 3.

Borna din stânga a bobinelor de curent contează ca bornă polarizată de intrare a curentului, ca şi la wattmetre.

Extremităţile bobinelor de tensiune legate la bornele mai mici ale contorului contează ca borne polarizate şi se leagă la faza 1 respectiv 3 cu ajutorul unor plăcuţe amovibile cu şuruburi. Celelalte două extremităţi sunt legate în scurtcircuit şi apoi la bornele de curent de pe faza 2.

Legăturile la contor trebue făcute conform schemei de pe capacul bornelor aparatului, pentru ca aparatul să indice exact. In caz contrar se dă naştere unei serii de erori despre care se vorbeşte la § 241 bis.

β) *Contorul trifazat cu două sisteme propulsoare şi cu un singur disc.* Astfel de contori nu se deosebesc deloc din punct de vedere electric de contorii de mai sus; ei au tot două sisteme propulsoare dar acestea acţionează asupra unui disc unic, care în cazul acesta este de o execuţie mai mare, pentru ca cele două sisteme să nu fie prea apropiate unul de altul.

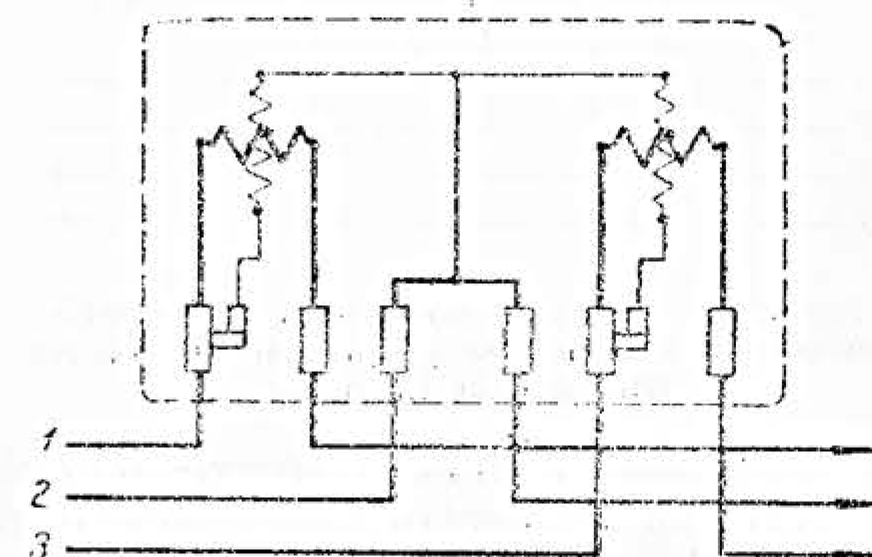


Fig. 234. — Legarea contorului de inducţie trifazat cu două sisteme propulsoare la o reţea trifazată fără fir neutru.

Un astfel de contor are avantajul că este mai ieftin, dar şi precizia lui este în general mai redusă, din cauza influenţării între ele a celor două sisteme.

In marea majoritate a cazurilor se preferă contorii cu două discuri.

γ) *Contorul trifazat cu un singur sistem şi un disc pentru faze egal încărcate.* Puterea într'un astfel de caz putându-se măsura cu un singur wattmetru (§ 147, fig. 119) şi energia electrică se poate măsura cu un singur contor monofazat.

Soluţia aceasta nu se întrebuinţează decât rareori, în cazuri speciale, cum ar fi de exemplu la măsurarea energiei electrice consumată de motoare de curent alternativ. Aceasta din cauza că precizia măsurătorii lasă de dorit, întrucât nicio reţea trifazată nu este perfect echilibrată.

Date caracteristice ale contorului trifazat. Pe placa de fabricaţie sunt înscrise tensiunea, curentul de utilizare, frecvenţa şi constanta, sub forma:

$$380/220\ \text{V} - 3 \times 30\ \text{A} - 50\ \text{Hz} - 1\ \text{kWh} = 4200\ \text{rot.}$$

Contorii se construesc în general pentru curenţi până la 100 A şi tensiuni până la 650 V. Consumaţia proprie a circuitului de intensitate pe sistem: dela 1,8 W la 3,9 W; circuitul de tensiune pe sistem: 0,45 W; pornirea contorului: la 0,4% din sarcina nominală; supratensiune admisă: 20%; tensiunea de încercare: 2000 V; capacitatea de supraîncărcare în mod continuu: 100% până la 75 A, 60% peste 75 A; eroare de temperatură: 0,05% pentru fiecare 1°C de temperatură.

232. Contori trifazaţi pentru circuite trifazate cu fir neutru.

α) *Contori cu trei sisteme propulsoare şi trei discuri.* Sunt constituiţi dintr'un ansamblu de trei contori monofazaţi, fiecare din ei lucrând asupra unui disc de aluminiu, cele trei discuri fiind fixate pe acelaşi ax comun.

Cuplul antagonist este dat de doi magneţi permanenţi, care acţionează în general asupra discului superior şi asupra celui inferior.

Cele trei sisteme sunt legate conform schemei de montaj ale celor 3 wattmetre, astfel cum se indică în fig. 235.

β) *Contori cu trei sisteme şi două discuri.* Unii constructori de aparate execută acest tip de contori tot cu trei sisteme propulsoare, cu aceeaşi schemă electrică de montaj ca şi contorul de mai sus, însă numai cu două discuri fixate pe acelaşi ax

Asupra unuia din discuri, în general cel superior, lucrează unul din cele trei sisteme precum şi doi magneţi permanenţi, aşezaţi simetric, care dau cuplul antagonist; asupra celuilalt disc lucrează celelalte două sisteme propulsoare.

Avantajul acestui contor asupra celui cu trei sisteme este că dimensiunile lui sunt mai reduse şi deci costul lui este mai mic, ceeace face să fie cel mai utilizat.

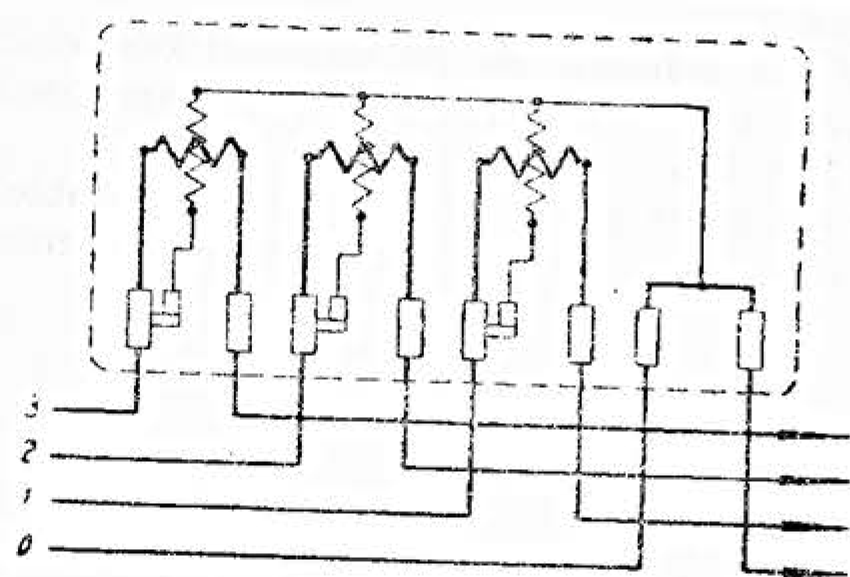


Fig. 235. — Legarea contorului de inducţie trifazat cu trei sisteme propulsoare, la o reţea trifasată cu fir neutru.

La acest contor discurile se fac ceva mai mari decât deobicei, pentru ca cele două sisteme să fie la o distanţă convenabilă unul de altul, astfel încât să nu se influenţeze reciproc şi deci precizia aparatului să nu se reducă.

Din acest punct de vedere, este principial favorabil să existe atâtea discuri câte sisteme de propulsie sunt.

Totuşi, din încercările făcute până în prezent cu contorii cu două şi cu trei discuri nu s'a putut stabili superioritatea netă a unuia asupra celuilalt, totul depinzând de particularităţile constructive ale fiecăruia, astfel încât ambele tipuri sunt întrebuinţate.

γ) *Contori cu două sisteme propulsoare şi două discuri.* Pentru distribuţiile trifazate cu fir neutru s'au executat şi contori numai cu două sisteme, fiecare acţionând asupra unui disc.

Bobinele de curent ale acestor contori au o construcţie specială: ele sunt formate din două jumătăţi egale, prin fiecare jumătate trecând curenţii a două din cele trei faze.

Avantajul unor astfel de contori ar consta în costul lor redus. Inconvenientele pe care le prezintă însă sunt atât de mari, încât întrebuinţarea lor a fost foarte puţin răspândită.

233. Montajul contorilor de energie activă cu transformatori de măsură. S'a arătat în paragrafele precedente că contorii de inducţie mono-şi trifazaţi se construesc în general pentru intensităţi de curent de maximum 100 A şi tensiuni până la 650 V. Când intensităţile de curent şi tensiunile de utilizare depăşesc aceste valori, contorii se montează pe transformatori de măsură; bobinele de curent, dimensionate pentru 5 A se montează pe transformatori de curent, iar bobinele de tensiune, dimensionate pentru 100 V, pe transformatori de tensiune.

Pentru efectuarea acestui montaj bobinele de curent trebue în prealabil separate de cele de tensiune ale contorului; aceasta se face desfăcând şuruburile plăcuţelor de legătură între bornele mici de tensiune şi bornele respective de curent, ambele categorii de borne contând ca borne polarizate.

Pentru ca indicaţiile contorilor să fie exacte, este indispensabil ca atât legarea bobinelor de curent şi de tensiune la secundarul transformatorilor de măsură cât şi legarea circuitelor primare ale transformatorilor de măsură în circuitul de utilizare, să se facă cu o riguroasă observare a polarităţii, întocmai ca şi la montajul indirect al wattmetrelor.

Astfel, pentru montajul indirect al unui contor monofazat, reprezentat în fig. 236 de mai jos, se intră cu primul conductor al circuitului în borna polarizată L_1 a primarului transformatorului de curent L_1 L_2 l_1 l_2, iar dela borna l_1 a secundarului se intră în borna polarizată a bobinei de curent a contorului, care este borna din stânga *A*, borna cealaltă a bobinei de curent legându-se la borna l_2 a secundarului.

Tot astfel, conductorul care se leagă la borna L_1 se leagă şi la borna polarizată *U* a primarului transformatorului de tensiune *U V u v*, iar borna corespun-

zătoare *u* a secundarului se leagă la borna polarizată a bobinei de tensiune *a*, cealaltă bornă legându-se la borna *v* a secundarului.

Pentru astfel de contori montaţi pe transformatori de măsură, pe placa de fabricaţie se indică raportul lor de transformare, de exemplu: (6 000/100 V şi 500/5 A), pentru a se şti precis că aparatul considerat este de fapt dimensionat pentru 100 V şi 5A.

In ce priveşte constanta contorului pe transformatori de măsură, pe placa dată sub forma 1 kWh = 0,5 rot, trebue să se ştie că aceasta se referă la energia totală a circuitului funcţionând sub tensiunea de 6 000 V şi curentul de 500 A, astfel încât constanta reală a contorului, funcţionând separat sub tensiunea de 100 V şi curentul de 5 A, se obţine din constanta de mai sus multiplicată cu produsul raporturilor de transformare ale celor doi transformatori

$$\frac{6\,000}{100} \cdot \frac{500}{5} = 6\,000,$$

$$1 \text{ kWh} = 0{,}5 \cdot 6\,000 = 1\,200 \text{ rot.}$$

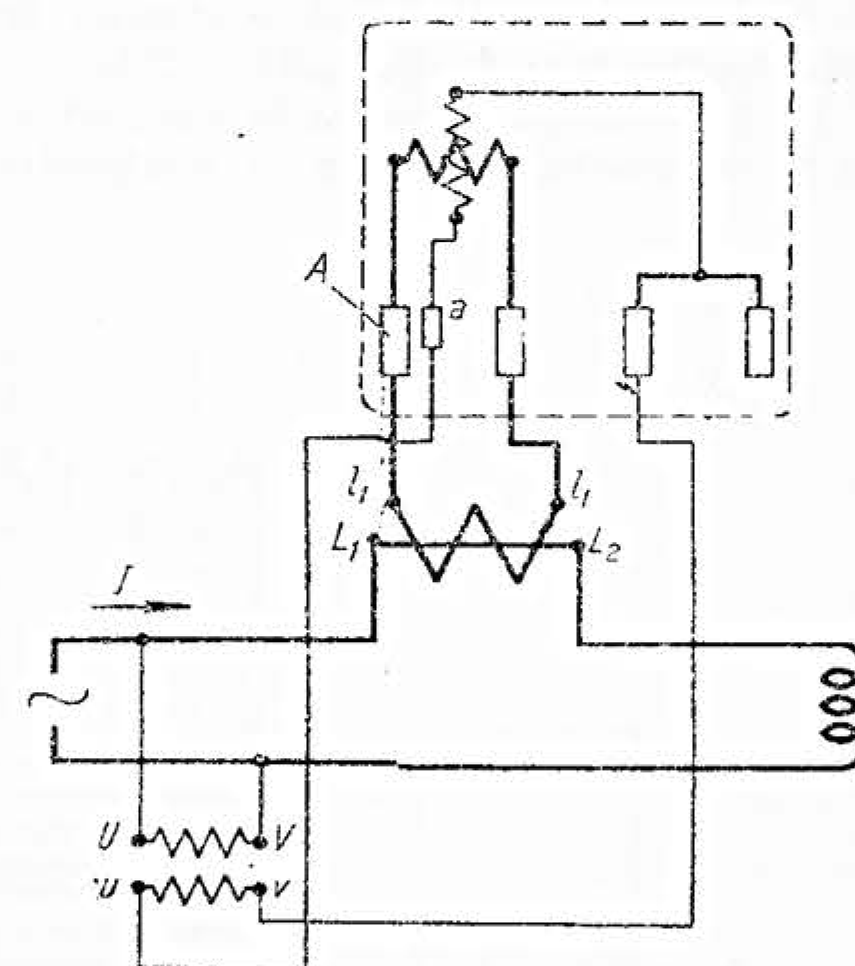


Fig. 236. — Montaj indirect al unui contor monofazat.

Cunoaşterea acestei relaţii este indispensabilă pentru etalonarea separată

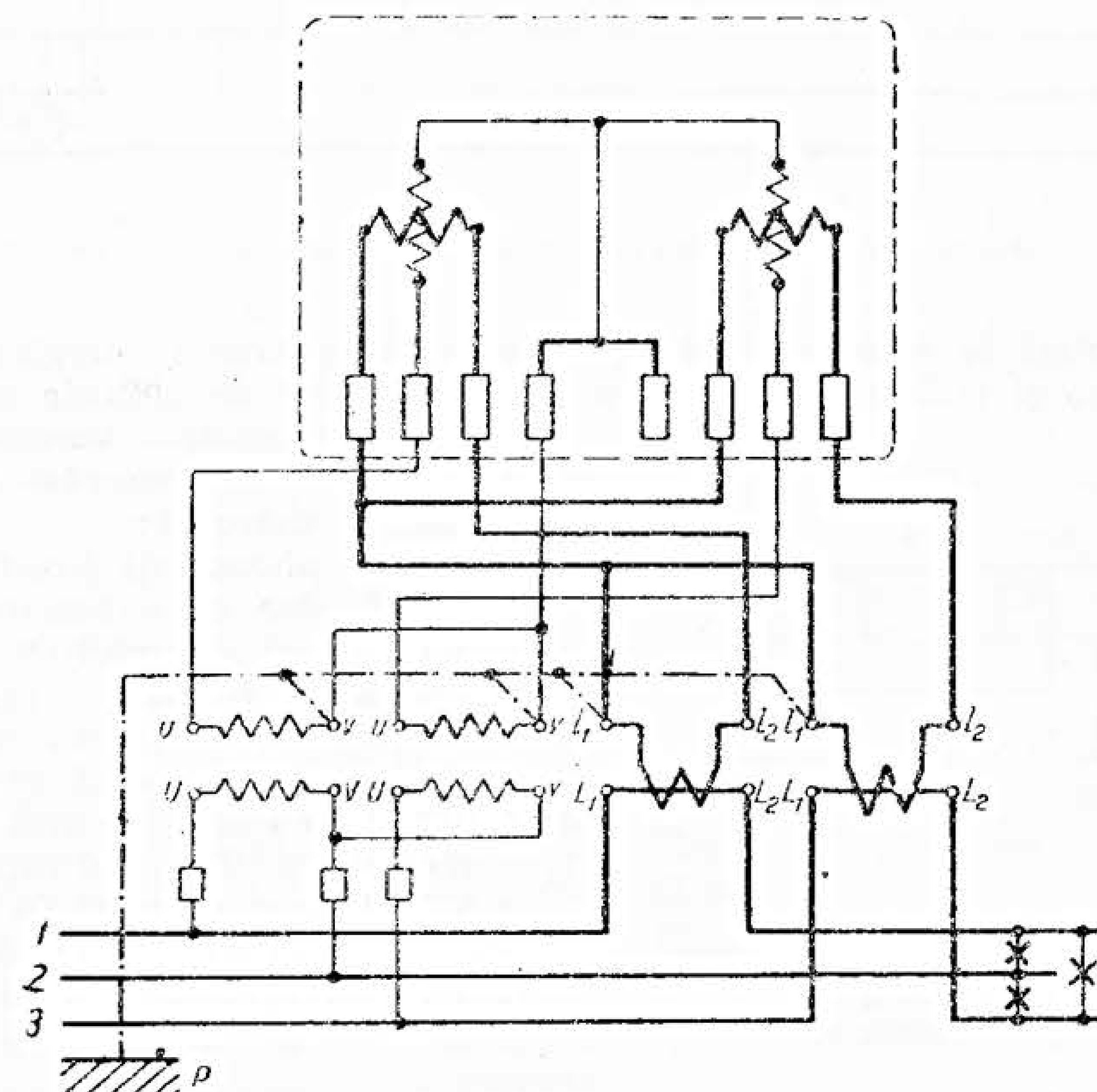


Fig. 237. — Montaj indirect al unui contor trifazat pentru distribuţii cu trei fire.

a contorului sub tensiunea de 100 V şi curentul de 5 A, astfel cum este indicat în § 251.

Montajul indirect al contorilor trifazaţi pentru reţele fără sau cu fir neutru este reprezentat în fig. 237 şi 238.

Se observă punerea la pământ a secundarelor transformatorilor de măsură ca şi la montajul analog al wattmetrelor.

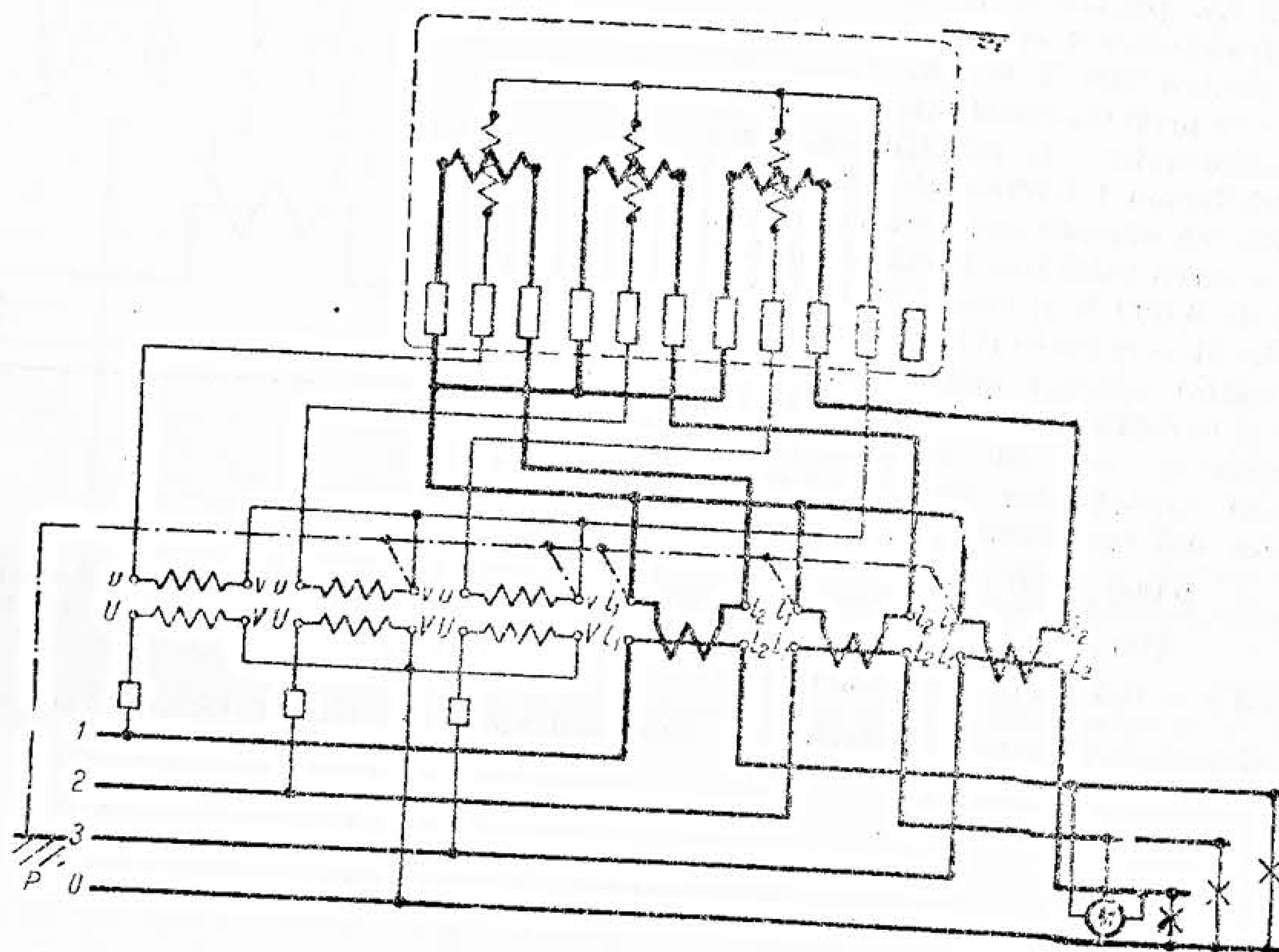


Fig. 238. — Montaj indirect al unui contor trifazat pentru distribuţii cu patru fire.

234. Contori de energie reactivă. Pentru înregistrarea energiei reactive în circuitele mono şi trifazate, se folosesc două categorii de aparate şi anume:

— contori speciali — varorămetre — alimentaţi direct cu curentul şi tensiunea circuitului de măsurat;

— contori alimentaţi direct cu curentul de măsurat, dar cu o tensiune auxiliară diferită de aceea a circuitului de măsurat.

235. Contori speciali — varorămetre — monofazaţi. Aceşti contori, care sunt tot de tipul de inducţie, sunt astfel construiţi încât cuplul lor activ, a cărui valoare este $C_a = K\Phi_1\Phi_2 \sin(\Phi_1\Phi_2)$ să capete valoarea $C_a = K''UI \sin\varphi$, adică să fie proporţional cu puterea reactivă şi deci să înregistreze energia reactivă, U şi I fiind tensiunea şi curentul circuitului, iar φ, decalajul dintre acestea.

Fig. 239. — Schema electrică a unui contor monofazat de energie reactivă, varorămetru.

In fig. 239 este reprezentată schema electrică a unui astfel de contor.

Bobina de tensiune E_t este alimentată ca la un contor obişnuit, cu tensiunea circuitului, iar bobina de curent E_c este montată în derivaţie cu o rezistenţă neinductivă s, fiind traversată deci numai de o parte a curentului total al circuitului.

Dacă din punct de vedere constructiv se face astfel ca argumentul β al impedanţei bobinei de tensiune (şi deci decalajul dintre tensiunea U aplicată bobinei de tensiune şi fluxul Φ_2 din această bobină) să fie egal cu decalajul β' dintre curentul total I şi curentul I' care circulă prin bobina de curent, se obţine un cuplu activ al contorului de valoarea:

$$M_a = K\,\Phi_1\,\Phi_2 \sin(\Phi_1\,\Phi_2) = K \cdot K'\,U \cdot K''\,I \sin\varphi = K'''\,UI \sin\varphi,$$

adică proporţional cu puterea reactivă, astfel cum rezultă din diagrama vectorială de mai jos (fig. 240) şi deci contorul înregistrează direct energia reactivă.

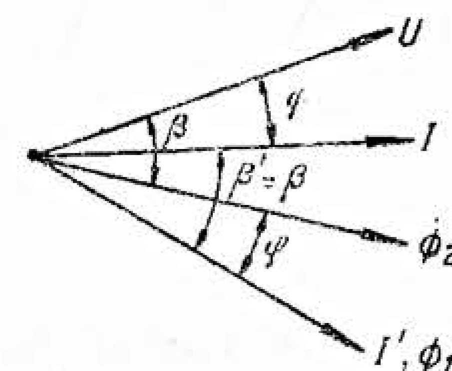


Fig. 240. — Diagrama vectorială a contorului monofazat de energie reactivă.

236. Contori speciali — varorămetre — trifazaţi. Cu două sau trei sisteme de măsurare ca acelea de mai sus, se realizează contori de energie reactivă — varorămetre — pentru circuite trifazate fără sau cu fir neutru, după exact aceleaşi scheme de legătură a wattmetrelor (§ 160—161, fig. 140—141).

Astfel, în fig. 241 este reprezentată schema de montaj a unui asemenea contor cu două sisteme pentru circuite fără fir neutru, iar în fig 242 schema de montaj a unui contor cu trei sisteme pentru distribuţie trifazată cu patru fire.

237. Contori monofazaţi de energie reactivă utilizând tensiuni auxiliare. Un contor de inducţie monofazat, a cărui bobină de tensiune este de argument β (fig. 243, a), are un cuplu de valoarea:

$$M_a = K\Phi_1\Phi_2 \sin(\Phi_1\Phi_2) = K \cdot K'I \cdot K''U \sin(\beta - \varphi) = K'''\,UI \sin(\beta - \varphi).$$

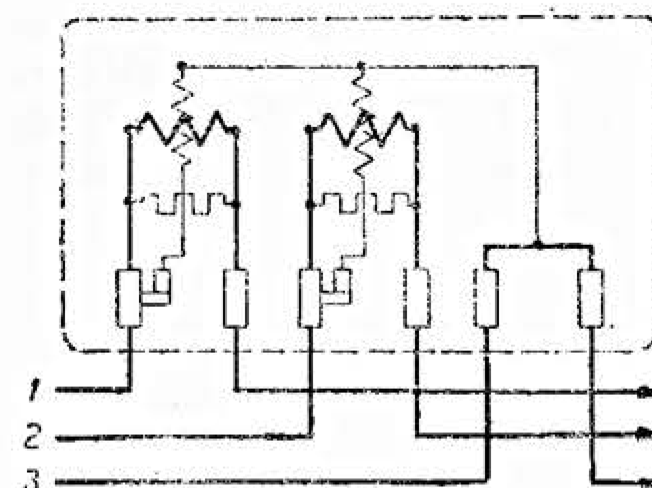


Fig. 241. — Schema de montaj a unui contor trifazat de energie reactivă varorămetru cu două sisteme propulsoare pentru circuite trifazate fără fir neutru.

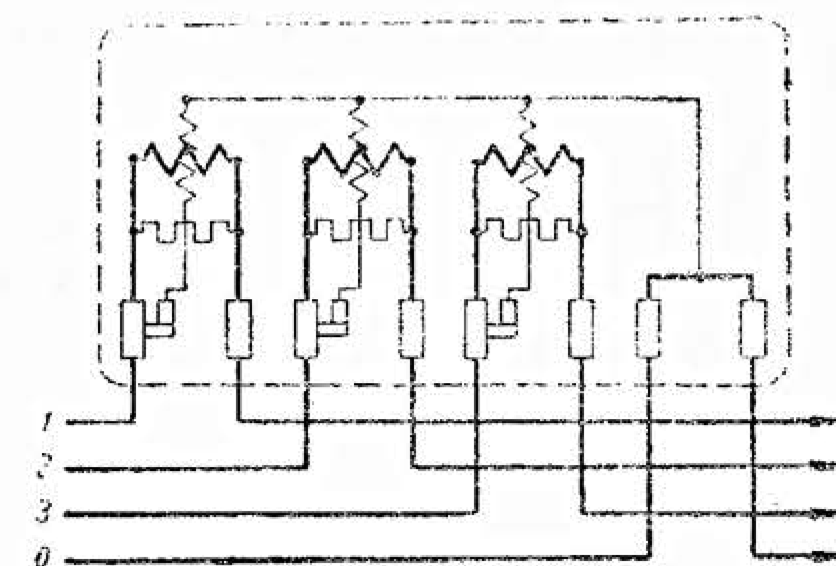


Fig. 242. — Schema de montaj a unui contor de energie reactivă varorămetru, cu trei sisteme propulsoare, pentru circuite trifazate cu fir neutru.

Dacă însă bobina de tensiune se alimentează cu o tensiune auxiliară $U' = U$, dar decalată în urmă faţă de tensiunea U cu un unghi egal cu $180-\beta$, ca în diagrama din fig. 243, b, cuplul conturului capătă valoarea:

$$M_a = K\Phi_1\,\Phi_2 \sin(\Phi_1\Phi_2) = K \cdot K'I \cdot K''U' \sin(180 - \varphi) = K'''\,U'\,I \sin\varphi,$$

adică este proporţional cu puterea reactivă şi deci contorul înregistrează energia reactivă dată de tensiunea U cu curentul I.

Observaţie. Metoda de faţă nu se întrebuinţează în circuitele monofazate, din cauza dificultăţii de a se procura tensiunea auxiliară U', însă se aplică pe o scară întinsă la contorii pentru circuitele trifazate la care tensiunile între faze pot furniza uşor tensiunile auxiliare necesare, dacă argumentul bobinei de tensiune are valori caracteristice de 60°, 90°, etc.

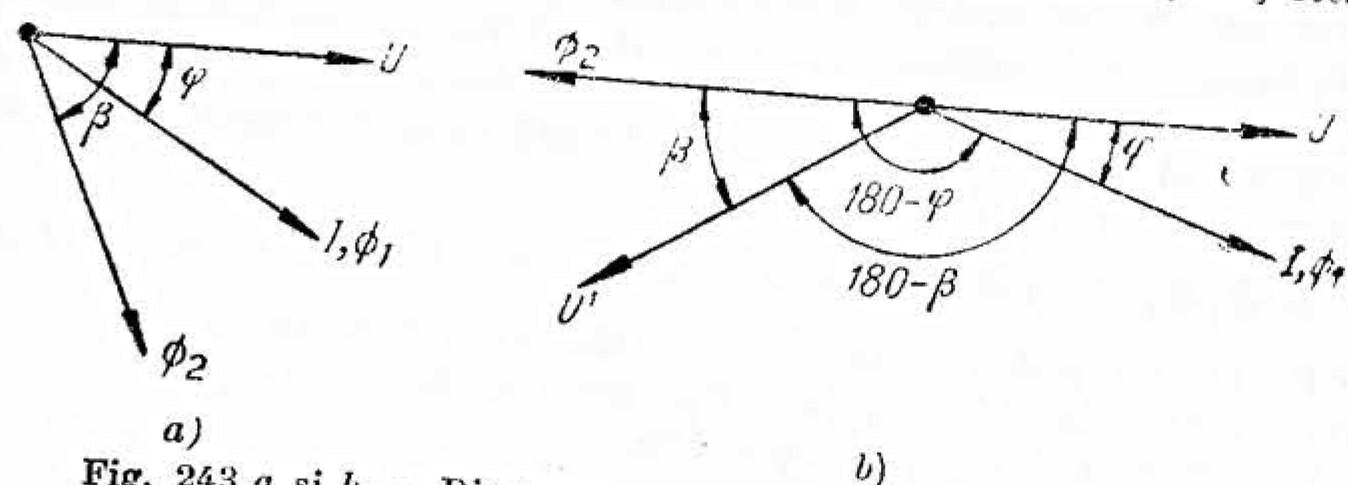


Fig. 243 *a* şi *b*. — Diagrama contorului monofazat alimentat cu o tensiune auxiliară

238. **Contori trifazaţi de energie reactivă pentru circuite trifazate fără fir neutru, cu tensiuni între faze simetrice şi curenţi desechilibraţi.** Pentru determinarea schemei unui astfel de contor, se porneşte dela formula cu doi termeni a puterii reactive trifazate (subcap. *F*, § 162) şi anume:

$$Q = U_{12} I_1 \sin (U_{12} I_1) + U_{32} I_3 \sin (U_{32} I_3), \quad Q = Q_1 + Q_2,$$

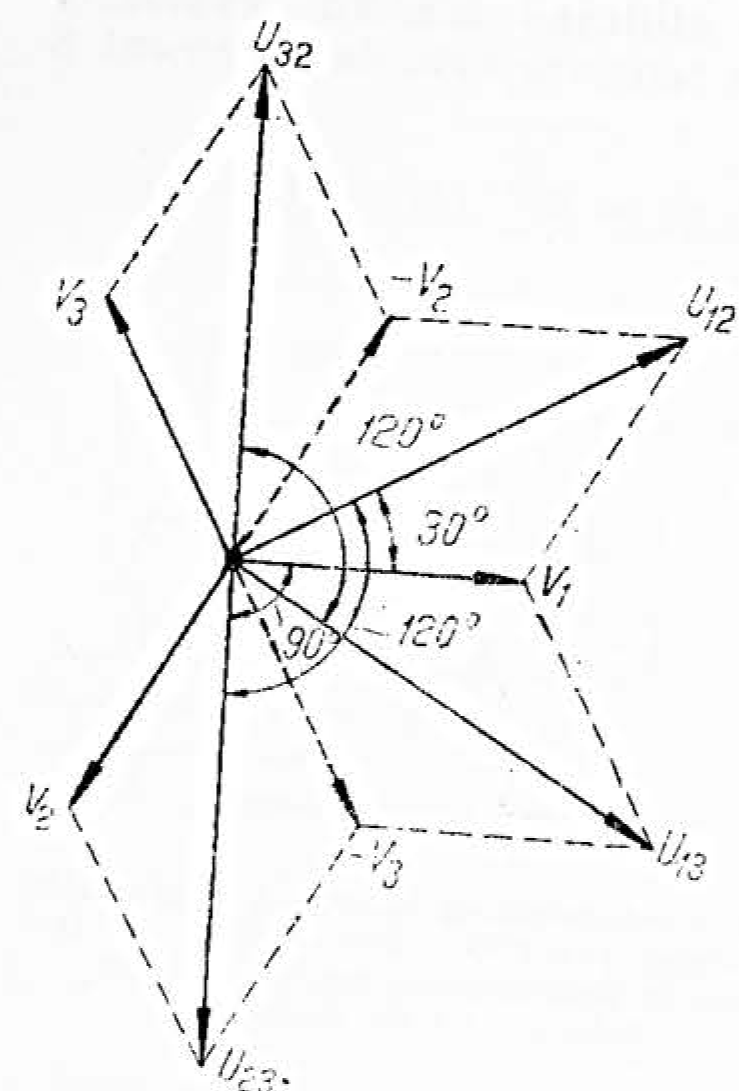


Fig. 244. — Diagrama vectorială a tensiunilor trifazate simetrice

pentru măsurarea căreia se pot întrebuinţa fie doi contori monofazaţi separaţi, fie un singur contor cu echipajul mobil format din două discuri solidare pe acelaşi ax, asupra fiecărui disc acţionând câte un sistem, întocmai ca la contorii trifazaţi de energie activă.

Dacă argumentul bobinei de tensiune a contorului este 60°, pentru ca primul contor să înregistreze energia reactivă corespunzătoare puterii $Q_1 = U_{12} I_1 \sin (U_{12} I_1)$, bobina lui de tensiune trebue alimentată cu o tensiune auxi-

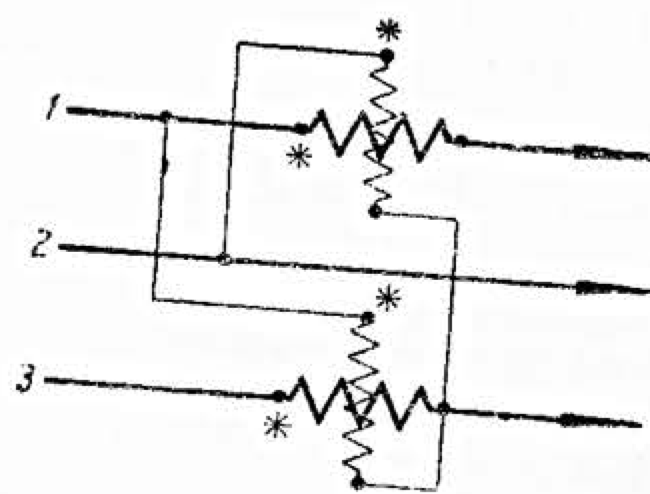


Fig. 245. — Schema principială de montaj a unui contor de energie reactivă cu două sisteme propulsoare

liară U' decalată în urmă faţă de U cu un unghiu egal cu $180 - \beta = 180 - 60 = 120°$.

Din diagrama vectorială a tensiunilor trifazate simetrice din fig. 244, se vede că tensiunea compusă U_{23} satisface această condiţie şi deci bobina de tensiune a primului contor se va alimenta cu tensiunea $U' = U_{23}$, ca în fig. 245.

Pentru ca al doilea contor să înregistreze energia reactivă corespunzătoare puterii reactive

$$Q_2 = U_{32} I_3 \sin (U_{32} I_3)$$

se găseşte că bobina lui de tensiune trebue alimentată cu tensiunea $U' = U_{13}$, de unde rezultă schema definitivă a contorului trifazat reprodusă şi în fig. 246 cu simbolii grafici obişnuiţi pentru contori.

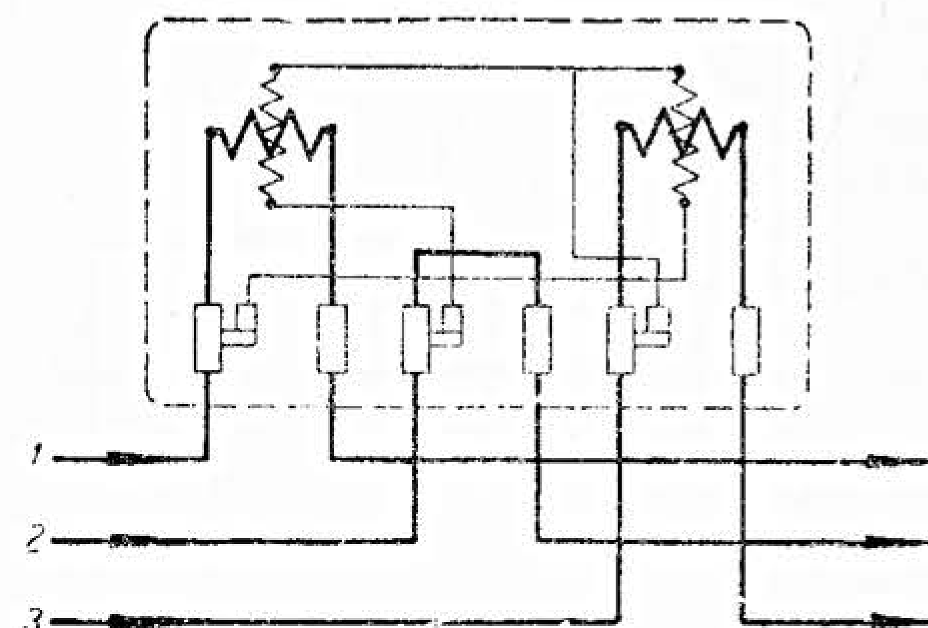


Fig. 246. — Contor de energie reactivă pentru circuite trifazate fără fir neutru

239. **Contori trifazaţi de energie reactivă pentru circuite cu fir neutru.** Pentru determinarea schemei contorului, se porneşte dela formula puterii reactive trifazate cu trei termeni:

$$Q = V_1 I_1 \sin (V_1 I_1) + V_2 I_2 \sin (V_2 I_2) + V_3 I_3 \sin (V_3 I_3),$$

V_1, V_2, V_3 fiind tensiunile simple ale reţelii, iar I_1, I_2, I_3 curenţii pe cele trei faze; pentru măsurarea acestei puteri reactive se va întrebuinţa un contor cu trei sisteme şi cu trei discuri solidare pe un acelaşi ax.

Procedându-se ca în cazul precedent, se găseşte că tensiunile auxiliare la care trebue supuse bobinele de tensiune ale celor trei contori de argument egal tot cu 60° sunt respectiv V_2, V_3 şi V_1, rezultând schema contorului din fig. 247.

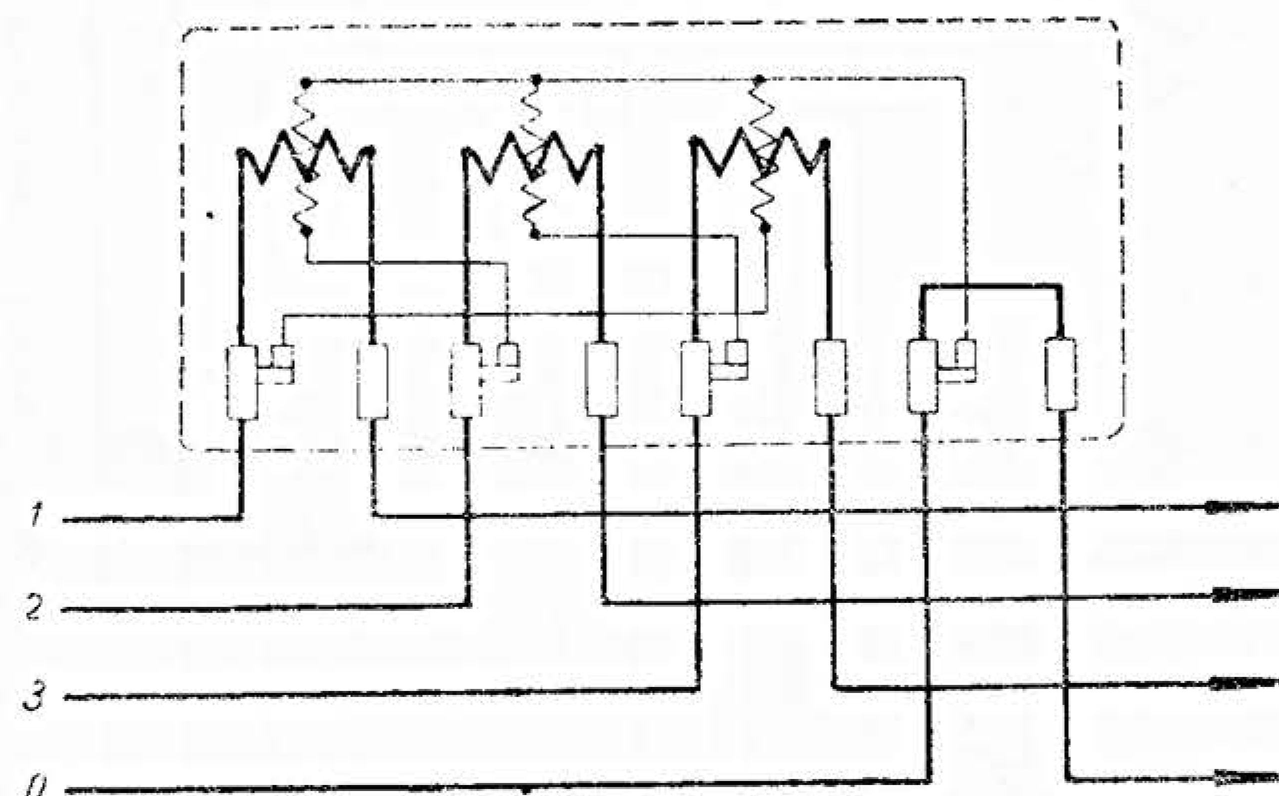


Fig. 247. — Contor de energie reactivă pentru circuite trifazate cu fir neutru

240. **Montajul indirect al contorilor de energie reactivă.** Ca şi contorii de energie activă, contorii de energie reactivă pot fi utilizaţi în *montaj indirect*, adică montaţi la reţea prin intermediul unor transformatori de măsură. In fig. 248 este reprezentat montajul indirect al unui grup de contori: unul de energie activă şi două de energie reactivă (inductivă respectiv capacitivă). Contorii de energie reactivă au dispozitive de oprire a rotaţiei în sens invers.

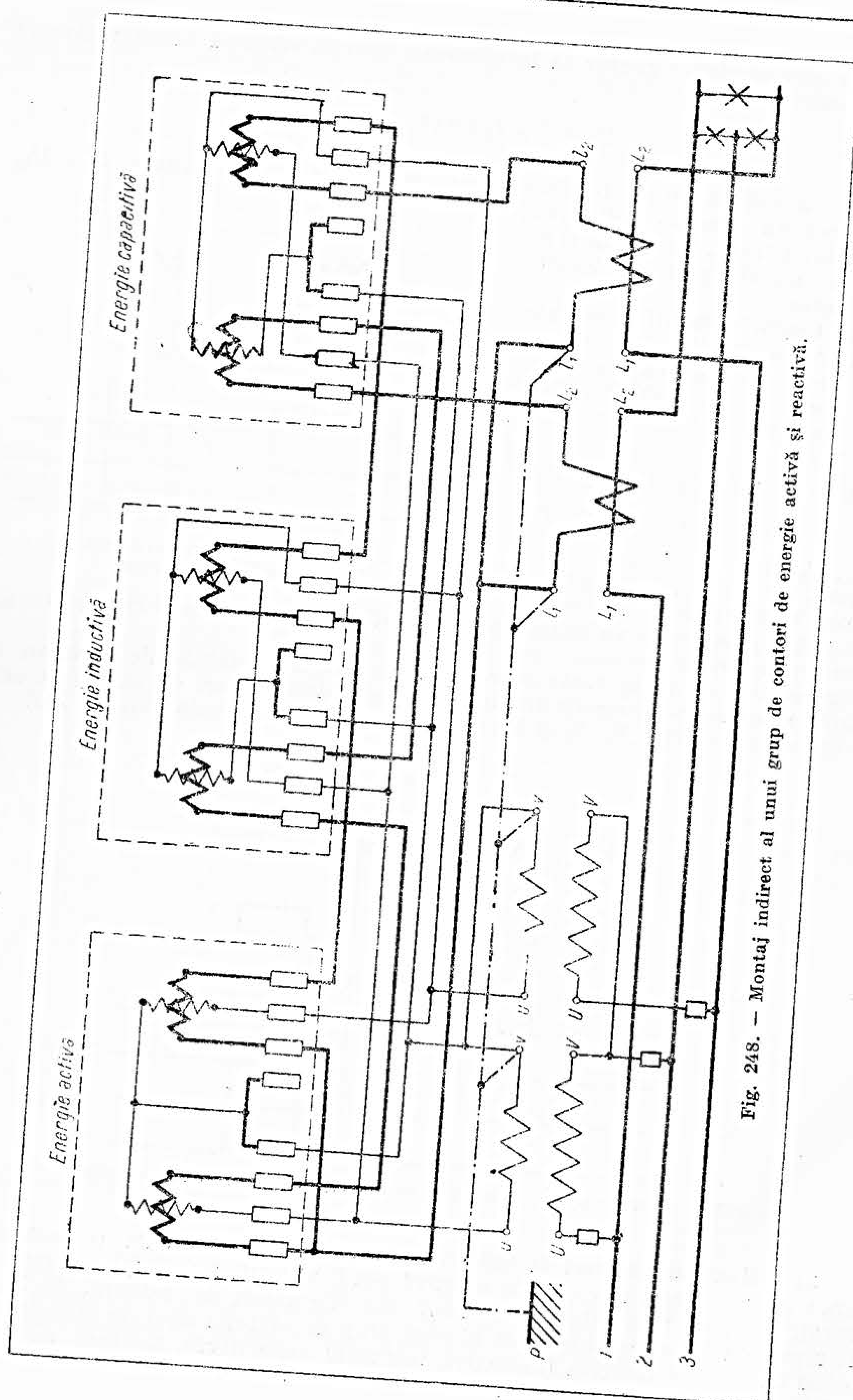


Fig. 248. — Montaj indirect al unui grup de contori de energie activă şi reactivă.

241. **Erorile contorilor trifazaţi** sunt datorite în general aceloraşi cauze ca şi cele ale contorilor monofazaţi şi curbele de erori caracteristice sunt cu totul similare acelora din fig. 232.

La contorii trifazaţi apare însă o nouă cauză de erori, cunoscută sub denumirea de *dependenţa indicaţiilor contorilor de ordinea de succesiune a fazelor*. Această influenţă se manifestă în trei moduri diferite:

— Sunt contori trifazaţi care prin modul lor de construcţie dau indicaţii corecte numai pentru o anumită ordine de succesiune a fazelor. Astfel sunt: contorii trifazaţi pentru încărcarea simetrică a celor trei faze, care posedă un singur sistem propulsor, contorii trifazaţi pentru energie reactivă în general şi alţi contori speciali, la care schimbarea ordinii de succesiune a fazelor echivalează de fapt cu o greşeală de montaj a contorului.

— Sunt contori trifazaţi ca aceia pentru distribuţii trifazate fără fir neutru care comportă două sisteme propulsoare montate după metoda celor două wattmetre şi ale căror indicaţii sunt, teoretic, independente de ordinea de succesiune a fazelor. Totuşi, dacă la etalonarea contorului, nu s'a realizat un reglaj identic pentru fiecare din cele două sisteme, eroarea de înregistrare a contorului poate să fie diferită când ordinea de succesiune a fazelor se schimbă.

— Chiar în cazul contorilor ale căror indicaţii sunt teoretic independente de ordinea de succesiune a fazelor şi la care reglajul sistemelor propulsoare este identic, erorile pot să fie diferite şi chiar sensibil diferite, din cauza influenţei reciproce exercitate între diferitele sisteme propulsoare. Această influenţare poate exista fie din cauza fluxurilor magnetice de dispersiune ale sistemelor propulsoare, fie din cauza curenţilor induşi în discul contorului de unul din sistemele propulsoare; aceştia dau cupluri cu fluxurile active ale altor sisteme care acţionează asupra aceluiaşi disc, cum ar fi de exemplu la contorii trifazaţi pentru distribuţii fără fir neutru cu două sisteme propulsoare dar cu un singur disc şi mai ales la contorii trifazaţi pentru distribuţii trifazate cu fir neutru, cu trei sisteme propulsoare dar numai cu două discuri, aceştia din urmă fiind foarte întrebuinţaţi.

Această influenţare reciprocă este cu atât mai redusă, cu cât diversele sisteme propulsoare sunt mai îndepărtate unele de altele şi cu cât aşezarea simetrică faţă de discul contorului a sistemelor care acţionează simultan asupra acestui disc este mai perfectă din punct de vedere constructiv.

Pentru combaterea acestor influenţe reciproce, există diverse mijloace: introducerea unor plăci metalice care creează fluxuri de dispersiune ale sistemelor propulsoare, etc. Bine înţeles, la contorii la care fiecare sistem propulsor acţionează separat asupra unui disc, aceste influenţe nu se produc.

241 bis. **Erorile de conexiune a contorilor.** La montarea contorilor de inducţie cu ajutorul transformatorilor de măsură se pot comite un număr extrem de ridicat de erori de conexiune, provenite fie din legarea greşită a circuitelor primare ale transformatorilor pe circuitele de utilizare, fie mai ales din legarea greşită a circuitelor de tensiune şi de curent ale contorilor pe secundarele transformatorilor de măsură, fie din întreruperea vreunui conductor de legătură între contor şi transformatorii de măsură.

Există numeroase astfel de conexiuni eronate, care dau naştere unei tarifări greşite — uneori cu 200—300% — a energiei electrice consumate de abonaţii ai căror contori n'au fost corect racordaţi.

Importanţa acestor erori de montaj este cu atât mai mare, cu cât multe din ele rămân neobservate vreme îndelungată — ani de zile chiar — şi o recalculare a energiei electrice realmente consumată de abonatul în chestiune, în scopul despăgubirii întreprinderii distribuitoare de energie electrică sau a abonatului, este foarte greu de executat. Montajul contorului are deasemenea o mare importanţă întrucât eroarea de înregistrare a contorului greşit racordat depinde foarte ade-

seori de factorul de putere respectiv, a cărui variație în timp nu poate fi stabilită decât cu totul aproximativ, sau deloc.

In orice caz, o astfel de eroare, odată descoperită, se studiază experimental sau teoretic cuantumul ei și se stabilește un așa numit *coeficient de corecție* K definit prin relația:

$$K = \frac{W_r}{W_e} = \frac{P_r}{P_e},$$

adică prin raportul dintre energia W_r pe care ar fi consumat-o realmente abonatul dacă contorul ar fi fost corect racordat și energia W_e pe care a înregistrat-o în mod eronat.

Energia realmente consumată se obține astfel multiplicând indicația contorului cu coeficientul de corecție K.

In cele ce urmează s'a calculat acest coeficient pentru două cazuri caracteristice de eroare de conexiune a contorilor.

Cazul I. Se inversează legăturile la bobina de curent a primului sistem al unui contor trifazat cu două sisteme, pentru distribuție trifazată, fără fir neutru.

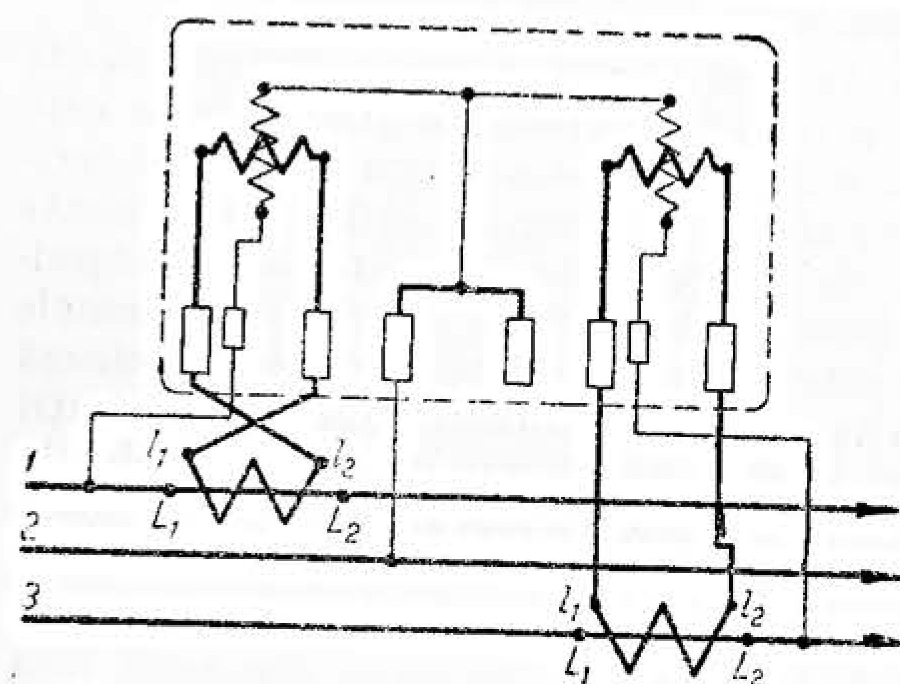


Fig. 249. — Montaj greșit al unui contor trifazat pe transformatori de intensitate

Schema eronată de legătură a contorului este aceea din fig. 249.

Se poate ușor găsi că puterea indicată de un astfel de contor în cazul unor sarcini trifazate echilibrate funcționând sub un decalaj φ este:

$$W_e = UI \sin \varphi,$$

în care U este tensiunea între două faze ale rețelii și I valoarea comună a curentului pe cele trei faze. Contorul greșit montat indică deci o energie proporțională cu energia reactivă consumată.

Puterea activă realmente consumată este însă:

$$W = \sqrt{3}\ UI \cos \varphi,$$

în consecință factorul K de corecție va fi:

$$K = \frac{W_r}{W_e} = \frac{\sqrt{3}\ UI \cos \varphi}{UI \sin \varphi} = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Valorile lui K pentru diverse decalaje sunt:

$$\varphi = 0 \quad 30^\circ \quad 60^\circ \quad 90^\circ;$$
$$K = \infty \quad 3 \quad 1 \quad 0.$$

Din faptul variației coeficientului K cu decalajul φ, rezultă imposibilitatea de a proceda la aplicarea unei corecții pentru postcalcularea energiei realmente consumată de abonat; aceasta pentru motivul că nu se poate face nicio ipoteză asupra valorii probabile a decalajului dealungul funcționării anormale a contorului și nici nu se poate aplica un factor $K = \infty$, în cazul când s'ar ști precis că abonatul a consumat numai energie activă și contorul n'a înregistrat nimic.

Cazul II. Se întrerupe firul median de legătură a punctului comun al celor două bobine de tensiune la faza de referință a unui contor trifazat cu două sisteme pentru distribuții fără fir neutru.

Schema de legături a contorului va fi aceea din fig. 250 accidentul fiind provocat de exemplu de topirea siguranței de pe faza a II-a a secundarului transformatorului de tensiune.

Se găsește că energia W_e înregistrată de contor este:

$$W_e = \frac{\sqrt{3}\ UI \cos \varphi}{2},$$

iar energia reală consumată fiind $W_r = \sqrt{3}\ UI \cos \varphi$, rezultă

$$K = \frac{W_r}{W_e} = 2.$$

Contorul montat greșit, înregistrează jumătate din energia realmente consumată, independent de decalajul φ al rețelii, astfel încât abonatul va trebui să plătească de două ori energia înregistrată de contor din momentul în care s'a produs întreruperea firului, dacă acest moment poate fi stabilit.

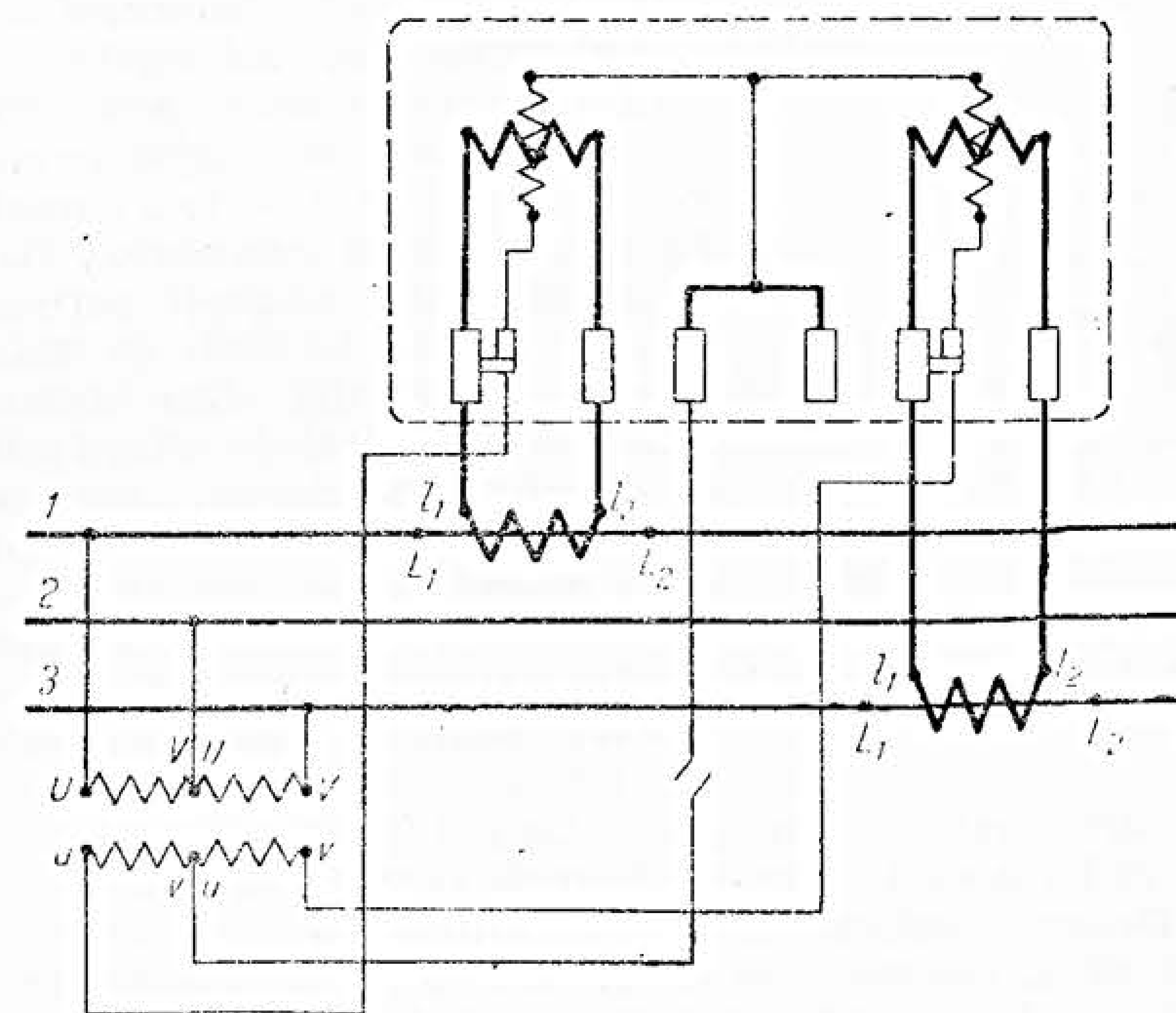


Fig. 250. — Montaj indirect al unui contor trifazat cu un fir de legătură întrerupt

Se vede de aici dificultatea de a face calculația ulterioară a energiei consumate pe baza factorului de corecție K și importanța fundamentală pe care o prezintă executarea cu cea mai deosebită grije a montajului corect al contorilor pe transformatori de măsură, pentru a se reduce la minimum posibil conexiunile greșite.

b) Amperorămetre

242. Contorii amperorămetre se utilizează în circuitele de curent continuu, în care tensiunea de alimentare este constantă și numai curentul variază; aceștia măsoară cantitatea de electricitate care trece prin circuit într'un anumit interval de timp. De multe ori la acești contori se citesc chiar wattore (sau kWh), energia fiind proporțională cu cantitatea de electricitate (tensiunea fiind constantă).

243. Contori electrolitici. Se bazează pe principiul că o cantitate de metal sau gaz depusă la catod într'o celulă electrolitică este proporțională cu cantitatea de electricitate trecută prin celulă, adică cu numărul de amperiore. Electrolitul se compune de exemplu dintr'o soluție apoasă a unei sări de mercur, care umple celula electrolitică, anodul este de mercur, iar catodul de cărbune. Celula este legată în serie cu o rezistență auxiliară (pentru compensarea erorii de temperatură), întregul ansamblu fiind legat la bornele unui șunt. Prin celulă trece deci numai o parte din curentul din circuit (de ordinul 0,02 A). Mercurul care se strânge la polul negativ este cules într'un tub gradat, putându-se astfel determina cantitatea depusă. După cantitatea de mercur depusă, se determină cantitatea de amperiore care a trecut prin contor și deci și numărul de wattore la tensiunea constantă a circuitului. Din timp în timp, mercurul trebue adus din nou în celula electrolitică, ceeace se face prin bascularea tubului.

244. Contori magnetomotori. Principiul unui astfel de contor este redat în fig. 251; *U* este un disc de aluminiu care are un bobinaj plat, constituit din trei înfășurări care, prin intermediul unui colector *L* și al periilor *B*, sunt legate la capetele unui șunt *R* de constantan, traversat de curentul I_s, astfel încât bobinajul indusului este traversat numai de o parte a curentului principal I_0. Sub influența curentului, indusul se mișcă între polii a doi magneți permanenți *M*. Prin această mișcare se nasc în disc curenți turbionari (Foucault), care frânează mișcarea rotorului. Numărul de rotații este proporțional cu curentul din circuit, deci indicațiile contorului sunt proporționale cu amperiorele utilizate. Acești contori construiți pe un principiu de economie nu au o compensare pentru frecări. Mecanismul integrator indică energia în kWh (pentru o anumită tensiune, de exemplu 100 V).

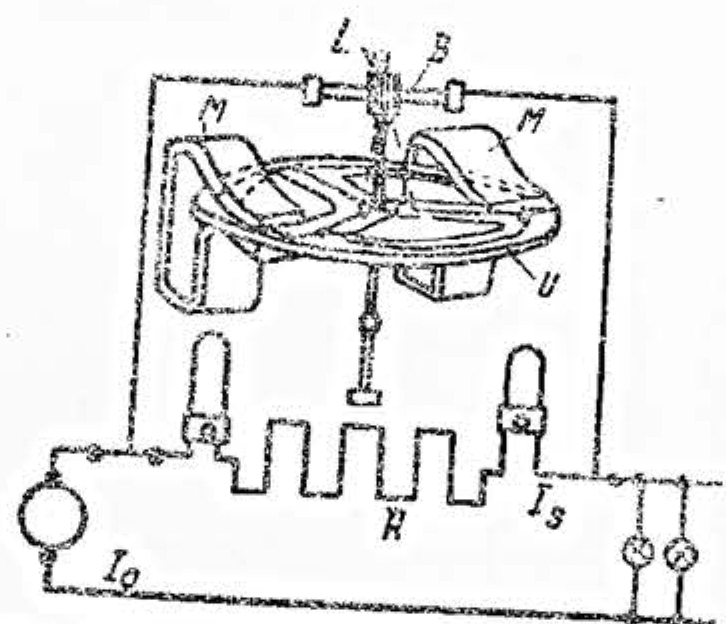


Fig. 251. — Schema de principiu a unui contor magnetomotor cu disc.

Erorile nu sunt mai mari de ± 3%, între 1/10 și 1/1 din curentul nominal; pornirea la 1%; căderea de tensiune la bornele șuntului la curentul nominal 0,5 V până la 1,5 V. Deoarece colectorul este alimentat sub o tensiune foarte mică, în special la sarcini mici, colectorul și periile trebue să fie construite din materiale speciale, astfel încât chiar după o funcționare îndelungată să nu existe rezistențe de contact importante, care ar falsifica cu totul măsurătoarea. Coeficientul de temperatură al șuntului de constantan fiind foarte mic, iar coeficientul de temperatură al cuprului (înfășurări) și al aluminiului (disc) fiind aproape același, indicațiile contorului sunt practic independente de variațiile de temperatură. Acest tip de contor se construește și cu tambur și este utilizat în special la tramvaie.

245. Contorii magnetomotori cu mercur sunt întrebuințați în special pentru vehicule electrice, locomotive, metropolitane, tramvaie, etc.

Ei au avantajul că neavând colector pot suporta mai bine vibrațiile și evită uzura rapidă a lagărelor, ca de pildă la contorii magnetomotori descriși mai sus, al căror echipaj mobil are o greutate relativ mare.

Desavantajul lor este că nu pot funcționa la temperaturi joase, mercurul înghețând la —38,7°C, iar curățirea mercurului și revizia acestor contori este anevoioasă.

Schema unui asemenea contor este reprezentată în fig. 252.

Intre polii magnetului permanent *M* se găsește inelul de cupru *A*, care se poate roti liber în jurul axului *O*. *F* este un cilindru de fier, fix, pentru întărirea câmpului magnetic. Extremitățile magnetului și inelul *A* sunt închise ermetic

într'o cameră umplută cu mercur; $+I$ și $-I$ sunt bornele de intrare și de ieșire ale curentului din mercur, așezate în două puncte diametral opuse ale camerei.

Cea mai mare parte a curentului intrat prin borna $+I$ circulă spre borna $-I$ prin inelul de cupru, curentul deviat prin mercur fiind mic, rezistivitatea mercurului fiind mult mai mare decât a cuprului.

Prin acțiunea câmpului magnetic asupra curentului care circulă în pereții verticali ai inelului, se produce rotația inelului de cupru.

Mișcarea este frânată de frecarea inelului cu mercurul și în special de curenții Foucault, care iau naștere în pereții inelului când acesta se rotește în câmpul magnetului permanent.

Viteza de rotație a inelului este proporțională cu curentul și independentă de tensiunea rețelei.

Contorul va măsura deci amperiore, având un dispozitiv de înregistrare etalonat în kWh (pentru o anumită tensiune constantă).

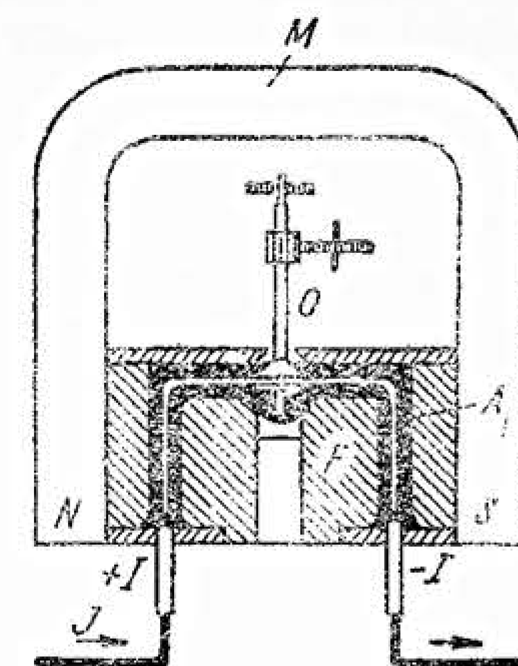


Fig. 252. — Contor cu mercur.

c) Contori pentru tarife speciale

246. Contori cu dublu tarif. Pentru a se socoti energia electrică cu două tarife diferite, după orele de utilizare, se întrebuințează contori cu dublu cadran a căror construcție este identică cu a contorilor obișnuiți, în afară de mecanismul de înregistrare, care permite înregistrarea consumației în kWh, pe unul sau altul din cele două cadrane ale contorului.

Contorul are de fapt două serii de role cu cifre comandate de un dispozitiv diferențial, acționat de un releu. Când releul nu este sub tensiune, una din extremitățile arborelui diferențial se găsește blocată și astfel funcționează o serie de cifre; când releul este sub tensiune, cealaltă extremitate a arborelui diferențial se găsește blocată, astfel că funcționează cealaltă serie de cifre. Cu acest dispozitiv frecările în dispozitivul cu angrenaje se reduc la minimum.

Releul este comandat de un ceasornic, care este de fapt un întrerupător orar, astfel reglat încât să facă contactul la anumite intervale de timp, când se dorește a se schimba tariful. Seria superioară de cifre de pe cadranul contorului este întrebuințată în general pentru tariful cu preț ridicat, iar seria de jos pentru tariful cu preț redus.

Consumul releului este între 15—18 mA.

Acest fel de contori se execută de tipul monofazat sau trifazat cu două sau trei sisteme propulsoare. Schema de montaj este indicată în fig. 253 pentru un contor trifazat cu două sisteme propulsoare.

247. Contorii cu triplu tarif se întrebuințează acolo unde tarifarea energiei se face cu trei prețuri: un preț ieftin în timpul nopții, un preț ridicat în timpul vârfului de sarcină pentru centrală și un al treilea preț, normal, pentru restul timpului. Contorul are trei dispozitive cu roți dințate și trei rânduri de cifre, permițând o citire directă a energiilor consumate cu cele trei tarife. In general, orice contor de inducție sau contorii de wattore de curent continuu pot să fie executați cu mecanismul pentru triplu tarif, care este analog cu mecanismul pentru dublul tarif.

248. Contorul de vârf. Contorul de vârf se utilizează când energia este vândută global până la o anumită putere consumată, iar pentru o putere superioară limitei stabilite, consumată accidental de abonat, energia este tarifată pe kWh, Cu alte cuvinte, abonatul poate consuma o putere mai mare decât aceea fixată.

plătind însă un preţ suplimentar. Atât timp cât puterea consumată de abonat rămâne sub limita prescrisă, contorul stă pe loc.

Aparatul se compune dintr'un contor normal, înzestrat cu un dispozitiv reglabil, al cărui rol este să limiteze înregistrarea la unităţile consumate deasupra

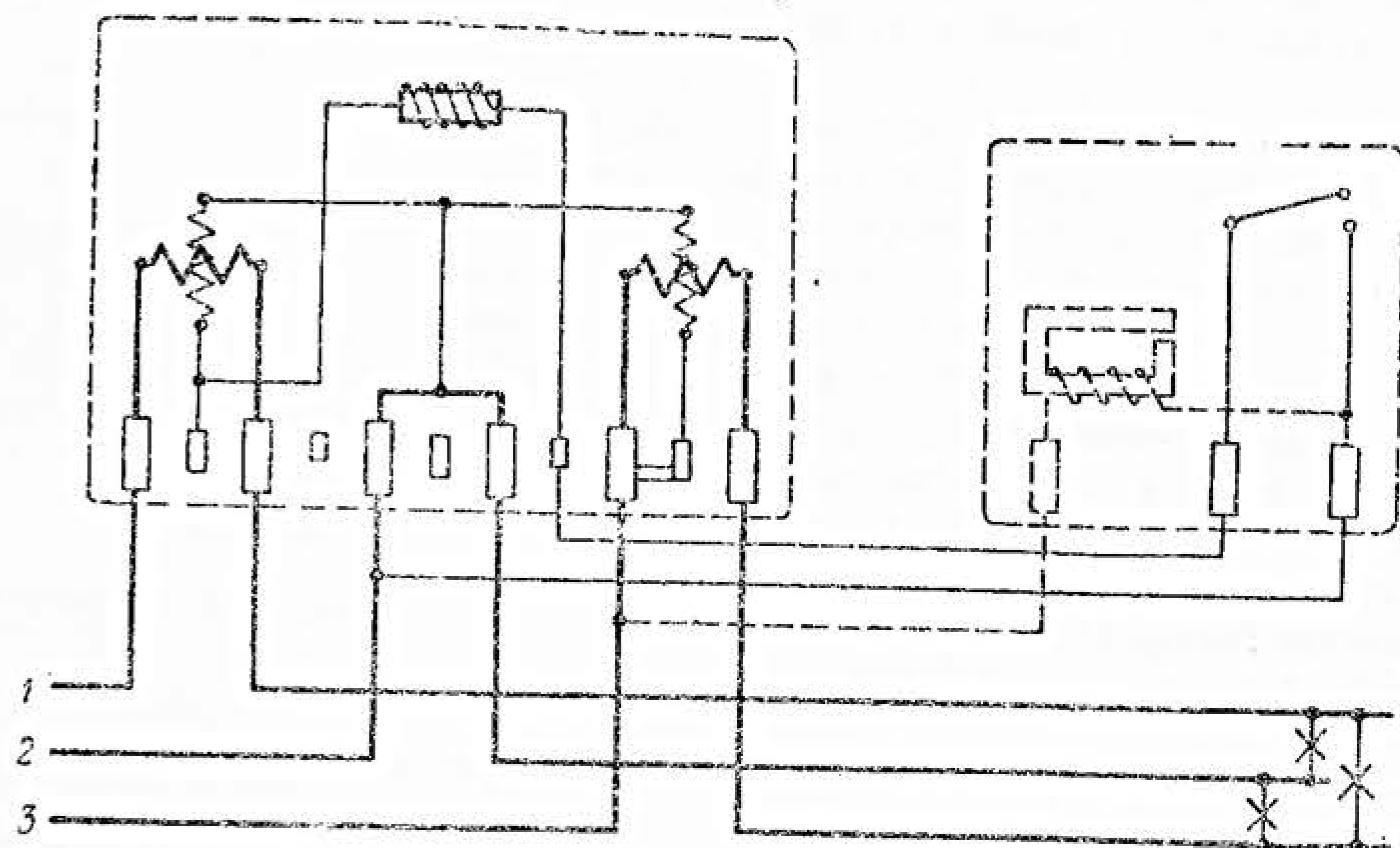
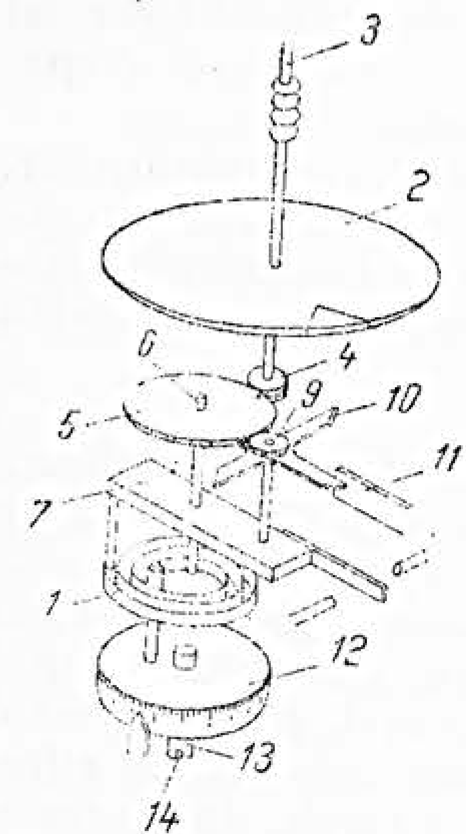


Fig. 253. — Schema de montaj pentru contorul trifazat cu două sisteme şi dublu tarif

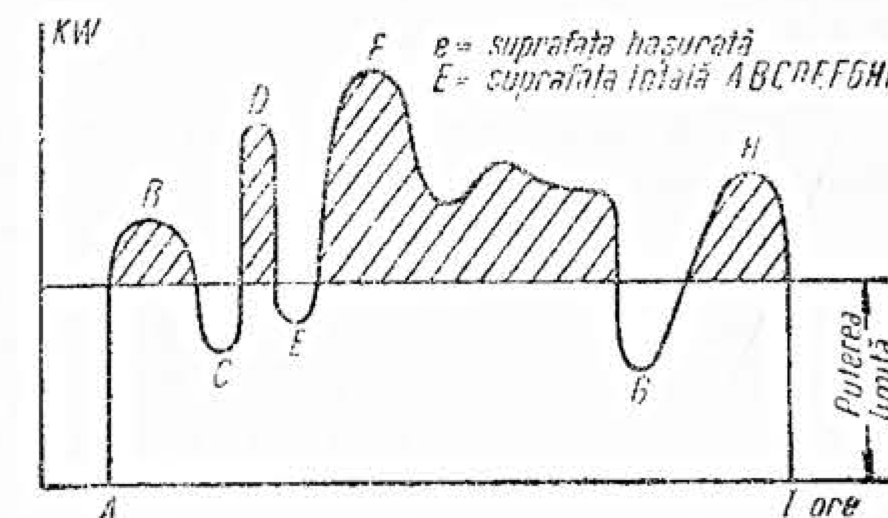
unei anumite valori ale sarcinii fixate dinainte. Acest dispozitiv se compune dintr'un resort dând un cuplu antagonist constant (şi reglabil), determinat de valoarea limită a sarcinii începând dela care contorul trebue să înregistreze. In fig. 254 se indică schema de principiu a dispozitivului de înregistrare. Indată ce sarcina limită a fost întrecută, cuplul motor al contorului devine superior cuplului antagonist dat de resortul *1*, discul *2* se pune în mişcare şi antrenează prin pinionul *4* şi roata dinţată *5*, pinionul *9*. Acesta din urmă fiind blocat de steaua *10*, care are unul din braţe pe opritorul *11*, mişcarea va avea efectul de a deplasa piesa *7* şi a strânge uşor resortul. Dacă totuşi cuplul motor este suficient de mare, braţul va depăşi extremitatea opritorului, resortul se va destinde uşor şi steaua va face un sfert de rotaţie. Aceste mişcări se vor repeta atât timp cât cuplul motor este suficient de mare, adică atât timp cât sarcina limită este depăşită şi în consecinţă dispozitivul cu roţi mişcat de şurubul fără sfârşit *3* va înregistra consumul depăşind limita. Una din extremităţile resortului este fixată pe un tambur gradat *12*, astfel că tensiunea iniţială a resortului poate fi reglată cu ajutorul şurubului *13*, fără a deplomba contorul întreg ci numai un capac, plombat separat.


Fig. 254. — Schema de principiu a dispozitivului de înregistrare a contorului de vârf

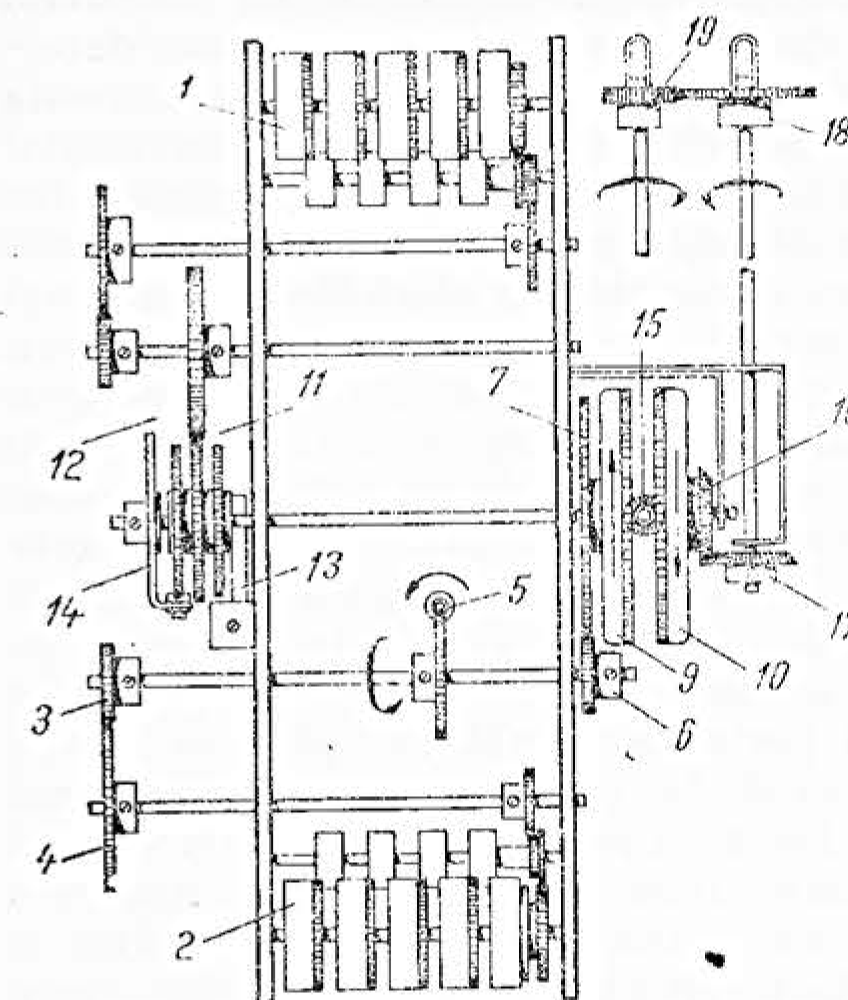
Reglajul se face în mod simplu, prin întinderea resortului proporţional cu indicaţiile de pe tambur, fără ajutorul vreunui wattmetru. In unele cazuri se montează şi contacte de semnalizare, care aduc la cunoştinţa consumatorului că funcţionează cu o sarcină mai mare decât sarcina limită stabilită prin contract.

249. Contorul de depăşire. Contorii de depăşire servesc la înregistrarea consumului care trece de o limită fixă (de exemplu: limita fixată printr'un contract), separat de consumul totală. In fig. 255, *e* este consumaţia efectuată cu o putere mai mare decât aceea fixată, din care cauză se plăteşte cu un preţ ridicat, iar *E* este consumul total.

Consumul $E - e$ se plăteşte cu tariful normal.


Fig. 255. — Reprezentarea consumaţiilor înregistrate de contorii de depăşire

Abonatul poate consuma la un moment dat o putere mai mare decât puterea limită stabilită prin contract, plătind însă în acest caz energia consumată cu un tarif mai ridicat decât în restul timpului, când puterea consumată rămâne sub limita prescrisă. Acest contor se întrebuinţează în special acolo unde lipsa de putere disponibilă (în timpul vârfului) duce la un preţ mai ridicat al energiei consumate în acest interval. Contorul are totdeauna două şiruri de cifre pentru indicarea energiei consumate: un rând pentru consumul care se efectuează sub o putere mai mare decât puterea limită fixată şi un rând pentru totalul consumului. Dispozitivul de înregistrare este reprezentat în fig. 256.


Fig. 256. — Schema de principiu a dispozitivului de înregistrare a contorului de depăşire

Mecanismul cu roţi dinţate *2*, acţionat de contor prin şurubul fără sfârşit *5* şi angrenajele *3* şi *4*, indică consumul total. Prin roţile dinţate *6* şi *7* contorul acţionează în acelaşi timp roata *9* a unui diferenţial. Cealaltă roată *10* a diferenţialului este acţionată de mecanismul de ceasornic prin angrenajele *16*, *17*, *18* şi *19*, cu o viteză constantă şi în sens invers cu roata *9*.

Când consumul nu a atins limita de putere fixată, viteza roţii *9* a diferenţialului, acţionată de contor, este mai mică decât viteza constantă a roţii *10*, acţionată de un motor sincron. Pinionul *15* este acţionat în sensul roţii *10* a diferenţialului şi clichetul *14*, fixat pe axa satelitului, va aluneca pe roata *12*; clichetul *13* împiedică roata *11* să se învârtească, astfel încât axa nu va putea transmite mişcarea sa de rotaţie sistemului *1*. Dimpotrivă, îndată ce energia se consumă sub o putere mai mare decât puterea limită, satelitul *15* şi axa schimbă sensul de rotaţie, astfel că roţile *1* încep să înregistreze din momentul în care viteza de rotaţie a axei satelitului corespunde cu diferenţa dintre consumul total şi aceea sub puterea limitată. Roţile *2* arată consumul.

Contorii de curent alternativ mono- şi trifazaţi se pot executa sub formă de contori de depăşire, cu mecanismul de ceasornic respectiv.

Limita de putere, dela care începe înregistrarea consumului cu puterea mărită, se poate alege începând dela câteva procente din sarcina maximă a contorului, prin schimbarea roţilor *18* şi *19*.

250. **Contorul cu plată prealabilă** serveşte la încasarea anticipată a costului energiei electrice; nu se va putea deci utiliza energie electrică decât numai după ce s'a introdus în aparat moneda corespunzătoare valorii unei anumite cantităţi de energie.

După consumarea energiei respective, circuitul se întrerupe, până la introducerea unei noi monede.

Avantajele contorilor cu plată prealabilă sunt multiple: se simplifică citirea acestora şi remiterea chitanţelor, şi în acelaşi timp creşte garanţia plăţii regulate a energiei. Se întrebuinţează mult în cazul distanţelor mari între centrul comercial şi utilizare (în zona rurală), făcându-se astfel economie şi la deplasările personalului pentru citiri. Contorii se execută în diferite forme:

— pentru tarif unic;
— pentru aplicarea unui tarif pe tranşe;
— pentru încasarea unei taxe fixe, etc.

Contorii cu plată prealabilă normală permit introducerea deodată a mai multor monede (maximum 99) constituindu-se astfel o rezervă. Monezile introduse sunt înregistrate de două ori: odată numărul total de monede şi a doua oară numărul monezilor de rezervă. Energia consumată se înregistrează separat. La comanda unui astfel de contor se va indica: felul curentului, intensitatea nominală în amperi, tensiunea nominală în volţi, frecvenţa (pentru curentul alternativ), numărul polilor pentru întrerupătorul de curent, valoarea monezilor de introdus, preţul pe kWh.

251. **Contorul cu indicator de maxim** înregistrează în afară de consumul total şi maximul valorilor medii ale puterii atinse într'un interval de timp determinat, numit perioadă de înregistrare. Durata perioadei de înregistrare poate varia în limite largi (deobicei se fixează la un sfert de oră). Indicarea maximului puterii medii poate servi la tarifarea energiei electrice. Ca exemplu se poate cita tariful conform căruia energia consumată se plăteşte pe kWh, cu un supliment calculat pe kW din maximum indicat de putere absorbită. In afară de mecanismul obişnuit care înregistrează consumul total, contorul este înzestrat cu un cadran circular, în faţa căruia se deplasează un ac indicator liber care nu este cuplat cu mecanismul contorului, ci este împins de un mic ac de împingere, care este în legătură cu mecanismul contorului. La sfârşitul fiecărei perioade de înregistrare, acest ac de împingere este decuplat de mecanismul contorului pentru câteva secunde. Resortul de care este legat îl aduce la zero, pe când acul indicator liber rămâne în poziţia pe care a atins-o. Dacă în perioada următoare puterea medie este mai mică, acul de împingere nu atinge acul indicator liber. Dacă, dimpotrivă, puterea este mai mare, acul indicator liber este împins din nou cu o cantitate egală cu diferenţa între noul maxim şi maximul precedent. După citirea maximului (care se poate face de exemplu în fiecare lună), acul indicator liber este adus la zero cu ajutorul unui buton special, aşezat în acest scop pe geamul contorului. Contorul cu indicator de maxim poate acţiona un dispozitiv de semnalizare, care să indice momentul în care puterea a atins o valoare anumită, sau poate acţiona un releu, care să declanşeze întrerupătorul principal al instalaţiei şi deci să servească la reducerea sarcinii.

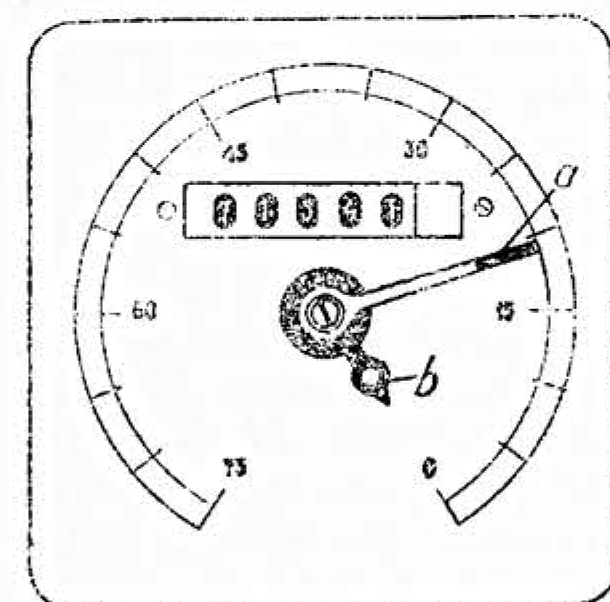


Fig. 257. — Cadranul unui contor cu indicator de maxim.

In fig. 257 este reprezentat cadranul unui asemenea contor; *a* este acul indicator liber iar *b*, acul de împingere.

Există multe construcţii de contori speciali, corespunzători diverselor moduri de tarifare întrebuinţate.

d) Erorile contorilor şi verificarea lor. Staţii de verificare

252. **Eroarea de înregistrare** a unui contor de energie electrică se defineşte prin raportul:

$$\varepsilon = \frac{W_m - W}{W},$$

în care W_m este energia înregistrată, măsurată de contor, iar W este energia electrică reală consumată de receptor, adică trecută prin contor.

In general eroarea se exprimă în %, deci are expresia:

$$\varepsilon\% = \frac{W_m - W}{W} \times 100.$$

Se vede că eroarea pozitivă a contorului înseamnă că acesta indică în plus: $W_m - W > 0$.

253. **Verificarea unui contor.** Prin verificarea sau încercarea unui contor se înţelege operaţia de determinare experimentală a erorii acestuia.

Pentru aceasta există două metode şi anume:

— metoda comparaţiei indicaţiilor contorului cu indicaţiile aparatelor de precizie de măsurat puterea: ampermetru şi voltmetru pentru curent continuu şi wattmetre electrodinamice pentru curent alternativ, şi

— metoda comparaţiei indicaţiilor contorului cu indicaţiile unui contor etalon.

254. **Metoda comparaţiei indicaţiilor contorului cu aparate etalon de măsurat puterea.** Se deosebesc două moduri de executare a verificării contorului: verificarea directă şi verificarea cu surse de energie separate.

255. **Verificarea directă.** Aceasta constă în montarea contorului pe circuitul de alimentare al unui receptor (în condiţiile de tensiune şi de curent identice cu acelea ale funcţionării contorului pe reţelele de distribuţie la abonaţi), în încărcarea lui la diverse sarcini şi în compararea energiei înregistrată de el sub o anumită putere constantă, cu energia reală măsurată cu ajutorul aparatelor etalon.

Pentru verificarea unui contor de curent continuu sau monofazat de exemplu, se face montajul în fig. 258 respectiv fig. 259.

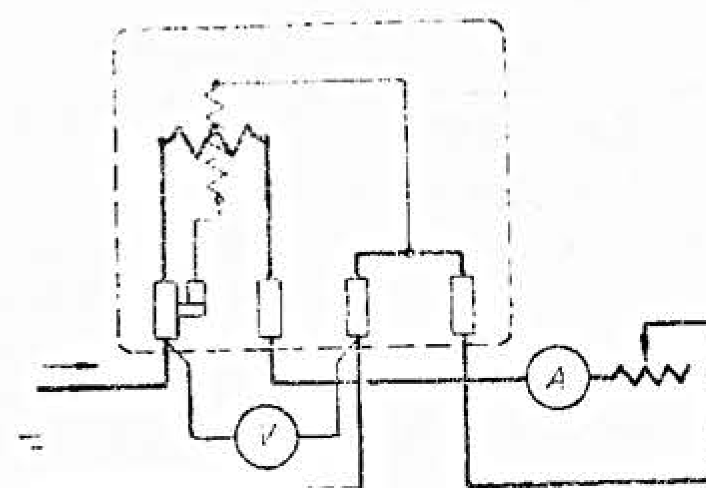


Fig. 258. — Verificarea unui contor de curent continuu.

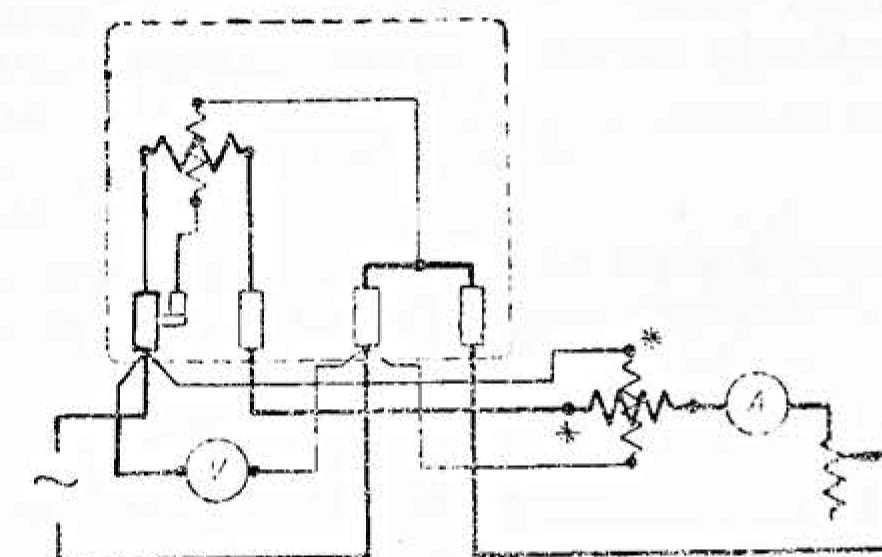


Fig. 259. — Verificarea unui contor. monofazat

La executarea montajului aparatelor etalon faţă de contor, trebue avut în vedere un principiu fundamental şi anume: ca bobinele de curent, respectiv de

tensiune, ale contorului, să fie puse în serie, respectiv în derivaţie, cu bobinele de curent, respectiv de tensiune, ale aparatelor etalon de măsurare a puterii pentru ca şi contorul şi aparatele etalon să fie traversate exact de aceeaşi putere electrică.

In fig. 260, respectiv 261, s'au indicat montajele cu totul greşite, privind verificarea aceloraşi contori; din fig. 260 se vede că pe lângă curentul I care trece în bobina de curent a contorului, ampermetrul etalon măsoară în plus şi curentul absorbit de voltmetrul etalon şi pe acela absorbit de bobina de tensiune a contorului, astfel încât puterea UI dată de aparatele etalon nu mai este identică cu puterea contorului; pentru contorul de curent alternativ din fig. 261, se vede că, în afară de puterea trecută în contor, wattmetrul măsoară în plus şi puterea consumată în bobina de tensiune a contorului şi în bobina proprie de curent a wattmetrului, astfel încât comparaţia celor două puteri nu mai este corectă.

Fig. 260. — Montaj greşit pentru verificarea unui contor de curent continuu

256. **Determinarea erorii contorului** se efectuează în modul următor:

Se supune contorul la tensiunea lui nominală U înscrisă pe placa de fabricaţie şi se reglează curentul la o valoare oarecare, de exemplu la valoarea sa nominală I.

Se cronometrează timpul t în care discul contorului execută un număr întreg de rotaţii n.

K fiind constanta înscrisă pe placa de fabricaţie a contorului sub forma

1 kWh = K rotaţii ale discului,

energia W_m pe care o va înregistra contorul va avea valoarea:

$$W_m = \frac{n}{k} \text{ kWh.}$$

Fig. 261. — Montaj greşit pentru verificarea unui contor de curent monofazat

Dacă P este puterea în waţi măsurată cu aparatele etalon ($P = UI$ în curent continuu sau $P = K'\alpha$ în curent alternativ, unde α este indicaţia wattmetrului în diviziuni, iar K' este constanta acestuia) atunci energia reală trecută prin contor va fi:

$$W = Pt \; W \text{secunde} = \frac{Pt}{3600 \times 1000} = \frac{Pt}{3{,}6 \times 10^6} \text{ kWh,}$$

timpul t fiind exprimat în secunde.

Eroarea contorului va avea deci valoarea:

$$\varepsilon\% = 100 \frac{W_m - W}{W} = \frac{\dfrac{n}{K} - \dfrac{Pt}{3{,}6 \times 10^6}}{\dfrac{Pt}{3{,}6 \times 10^6}} \times 100$$

Observaţie. Expresia erorii se mai poate scrie:

$$\varepsilon\% = \frac{\dfrac{n}{KP} \times 3{,}6 \times 10^6 - t}{t} = \frac{t_1 - t}{t} \times 100$$

în care s'a însemnat cu $t_1 = \frac{n}{KP} \times 3{,}6 \times 10^6$ timpul teoretic în care discul contorului ar executa n rotaţii la puterea P, dacă ar înregistra corect.

In baza acestei formule se pot calcula erorile contorului foarte comod în modul următor:

Se calculează timpul teoretic t' în care discul contorului ar trebui să execute o rotaţie la plină sarcină $P = UI$ conform relaţiei:

$$t' = \frac{3{,}6 \times 10^6}{KP}.$$

Apoi se alege un număr întreg de rotaţii $n = 60$ de exemplu (în general să fie divizibil cu 5, 4 şi 3) şi se calculează timpul teoretic $t_1 = nt'$ în care ar trebui să se execute cele n rotaţii la plină sarcină nominală a contorului ($P = UI$).

Pentru verificarea contorului la plina sarcină $P = UI$, se cronometrează timpul t în care discul contorului face n ture, eroarea fiind:

$$\varepsilon\% = \frac{t_1 - t}{t} \times 100.$$

Pentru a verifica contorul la altă sarcină, de exemplu 50% din sarcina nominală, se va cronometra timpul t în care se fac $\frac{50}{100} \times n = \frac{n}{2}$ rotaţii, comparându-se tot cu timpul t_1, etc.

Tot astfel dacă este vorba de un contor de curent alternativ şi dacă s'a dedus timpul t_1 la plina sarcină şi $\cos\varphi = 1$, verificarea la alt $\cos\varphi - 0{,}5$ de exemplu, — se va face cronometrând timpul t în care se fac $\frac{n}{2}$ ture şi se compară t tot cu timpul t_1, etc.

E x e m p l u. Contor de curent alternativ 120/10 A; $K = 2400$ rot/kWh.

Timpul t_1' al unei rotaţii la plină sarcină $P = 120 \times 10 = 1200$ W va fi:

$$t_1' = \frac{3{,}6 \times 10^6}{1200 \times 2400} = 1{,}25 \text{ s.}$$

Se alege un număr $n = 60$ rotaţii.

Timpul teoretic t_1 pentru 60 rot va fi:

$$t_1 = 60 \times 1{,}25 = 75 \text{ s.}$$

Experimental se găseşte că cele 60 de rotaţii se fac la plină sarcină într'un timp de $t = 73$ s.

Eroarea contorului este:

$$\varepsilon\% = \frac{75 - 73}{72} \times 100 = +2{,}74\%.$$

La 10% din sarcina nominală, se cronometrează timpul t a $\frac{10}{100} \times 60 = 6$ rotaţii şi se găseşte de exemplu un timp $t = 72$ s.

Eroarea este:

$$\varepsilon\% = \frac{75 - 72}{72} = 4{,}17\%$$

Formula erorii contorului $\varepsilon\% = \frac{t_1 - t}{t}$ % este de o foarte comodă aplicaţie şi utilizarea ei este generală.

257. **Verificarea contorilor cu surse separate.** Conform celor spuse mai sus, inconvenientul verificării contorilor în montaj direct constă în aceea că pentru efectuarea verificării trebue să se aibă la dispoziţie o sursă de energie electrică de aceeaşi putere ca şi puterea nominală a contorului şi să se consume deci o cantitate mare de energie electrică.

Astfel, pentru un contor de 220 V şi 100 A trebue să se folosească o sursă de energie putând furniza întregul curent de 100 A sub 220 V, deci de o putere mai mare de $P = 220 \times 100 = 22$ kW. In plus, întreagă această energie electrică trebue consumată în reostate speciale de reglaj, care devin astfel construcţii foarte costisitoare, prohibitive chiar.

Deaceea pentru verificarea economică şi comodă a contorilor se întrebuinţează *principiul surselor separate*, care constă în aceea că cele două circuite de curent

şi de tensiune ale contorului se alimentează separat cu două surse de curent şi anume:

Circuitul de curent cu o sursă de tensiune redusă putând produce curenţi mari până la câteva mii de amperi.

Circuitul de tensiune cu o sursă de tensiune mare 120—600 V şi curenţi reduşi până la circa 1 A.

258. **Sursele pentru verificarea contorilor de curent continuu** sunt formate din baterii de acumulatori, sau mai rar din generatori de curent continuu cu reglaj automat al tensiunii, schema de montaj a contorului fiind aceea din fig. 262.

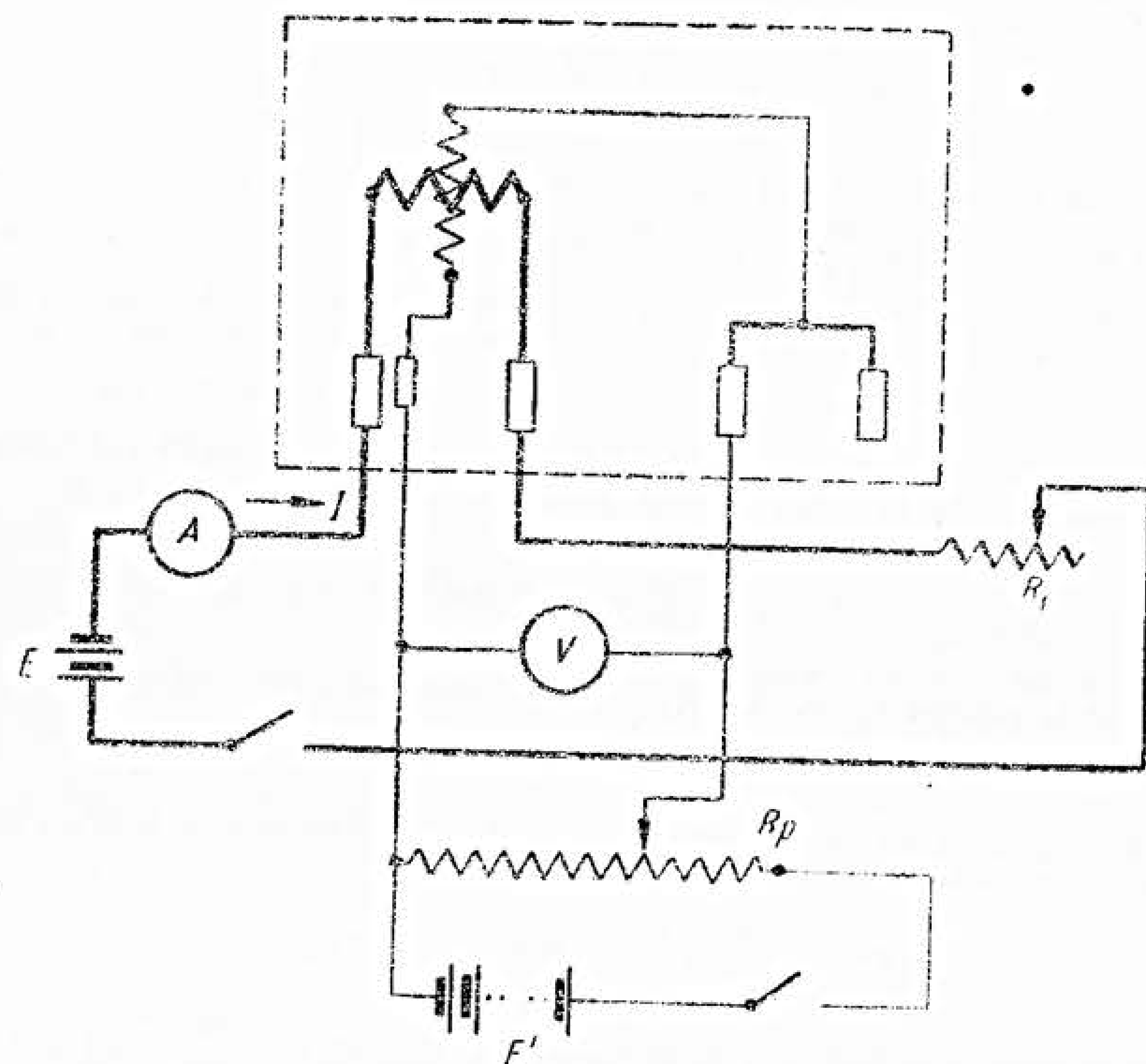


Fig. 262. — Verificarea unui contor de curent continuu cu surse separate.

Circuitul de curent cuprinde bateria de curenţi mari E, bobina de curent a contorului în serie cu ampermetrul etalon A şi un reostat de reglaj R_1.

Circuitul de tensiune cuprinde bateria de tensiune E' care alimentează în paralel bobina de tensiune a contorului şi voltmetrul etalon, printr'un reostat de reglaj R_p, în montaj potenţiometric.

Observaţie. Se înţelege că în condiţiile montajului de faţă, cu surse separate, consumaţia de energie este extrem de redusă.

Astfel, pentru verificarea unui contor de 120 V 100 A s'ar consuma următoarele puteri:

Pentru circuitul de curent ar fi suficientă o baterie de acumulatori de circa 4 V, 100 A, ca să acopere căderile de tensiune din acest circuit, astfel încât puterea consumată ar fi de circa 4 V × 100 A, = 400 W.

Pentru circuitul de tensiune alimentat de exemplu de o baterie de 220 V cu un curent de circa 0,3 – 0,4 A reprezentând curentul absorbit de reostatul de reglaj potenţiometric R_p, precum şi de bobina de tensiune a contorului şi de voltmetrul etalon, s'ar consuma o putere de circa 220 × 0,4 = 88 W, puterea totală consumată fiind deci de circa 488 W în loc de 12 kW cât ar reprezenta puterea nominală a contorului.

In plus, în montajul cu surse separate nu se mai pot comite erori de montaj ca acelea indicate în fig. 260.

259. **Sursele pentru verificarea contorilor de curent alternativ mono - şi trifazaţi,** cu surse separate. Se pot adopta două soluţii:

α) *In prima soluţie* se utilizează ca sursă de energie reţeaua trifazată a oraşului, de tensiune constantă, (de exemplu 3 × 220 V sau 3 × 380 V) sau eventual un generator de curent alternativ deasemenea de tensiune constantă.

In fig. 263 este reprezentată schema principială de montaj pentru verificarea unui contor monofazat.

Alimentarea circuitului de curent, cuprinzând bobinele de curent ale contorului, ale wattmetrului etalon şi ale ampermetrului de control, se face cu ajutorul unui transformator pentru producere de curenţi mari Tr_c, al cărui primar este

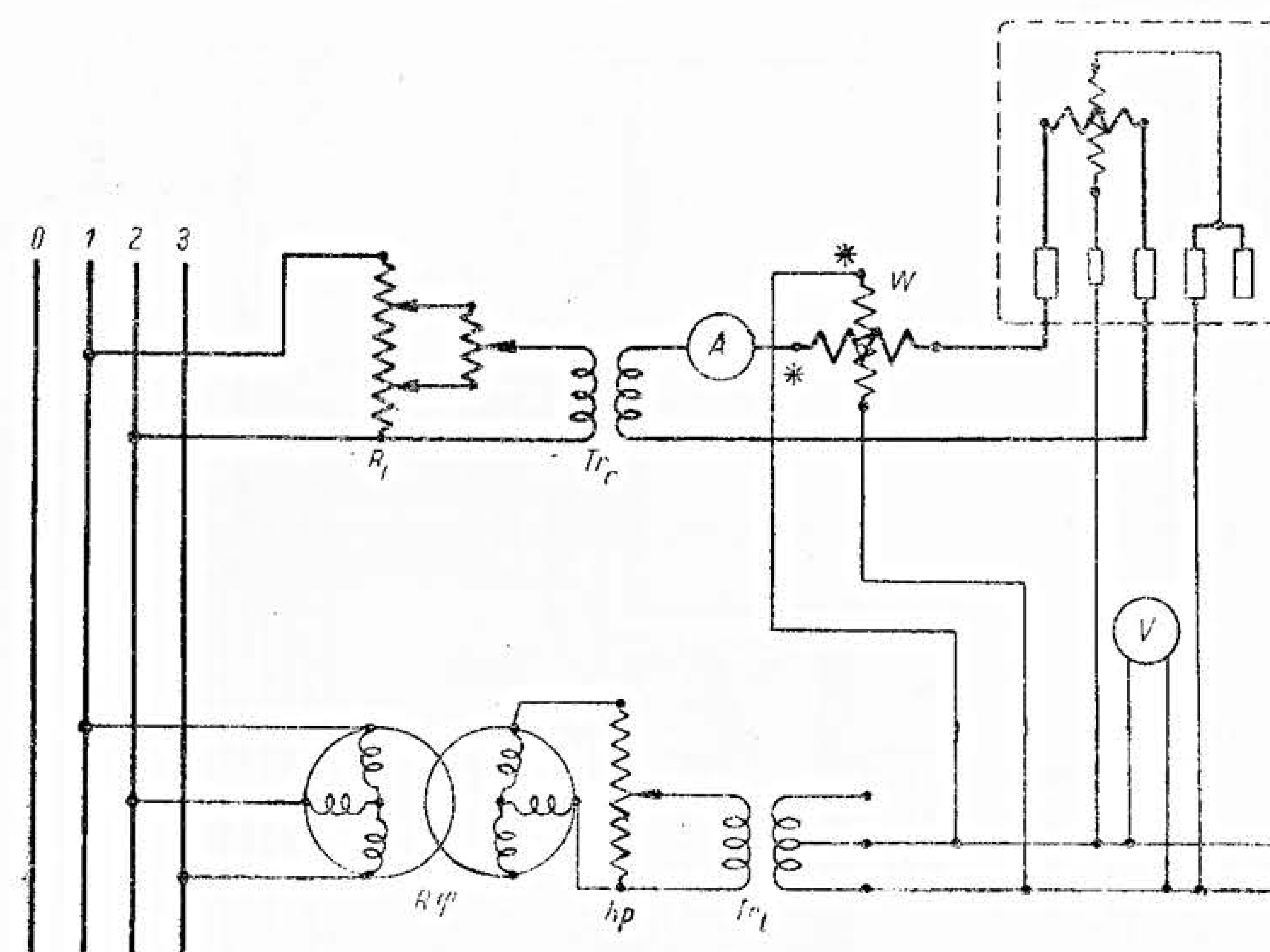


Fig. 263. — Verificarea unui contor monofazat cu surse separate

alimentat dela reţeaua alternativă prin intermediul unui regulator inductiv R_i care permite reglajul continuu al curentului în contor, dela cele mai mici valori la valoarea nominală.

Alimentarea circuitului de tensiune, cuprinzând bobinele de tensiune ale contorului, ale wattmetrului etalon, precum şi ale voltmetrului de control, se face dela aceeaşi reţea trifazată, prin intermediul unui decalator de fază R_φ al cărui secundar alimentează un transformator (sau autotransformator) prin intermediul unui reostat variabil R_p în montaj potenţiometric, întregul ansamblu producând tensiuni reglabile dela zero la circa 600 V.

Rolul decalatorului de fază R_φ este acela de a putea produce un decalaj variabil dela 0°... 90°, inductiv sau capacitiv, între curentul din bobina de curent a contorului şi tensiunea de alimentare a bobinei sale de tensiune, pentru verificarea contorului sub diverşi factori de putere cos φ.

β) *A doua soluţie* constă în utilizarea unui grup convertisor special, format dintr'un motor, fie de curent continuu fie de curent alternativ şi din doi generatori de curent alternativ trifazat, destinaţi a alimenta cele două circuite de curent, respectiv de tensiune ale contorului.

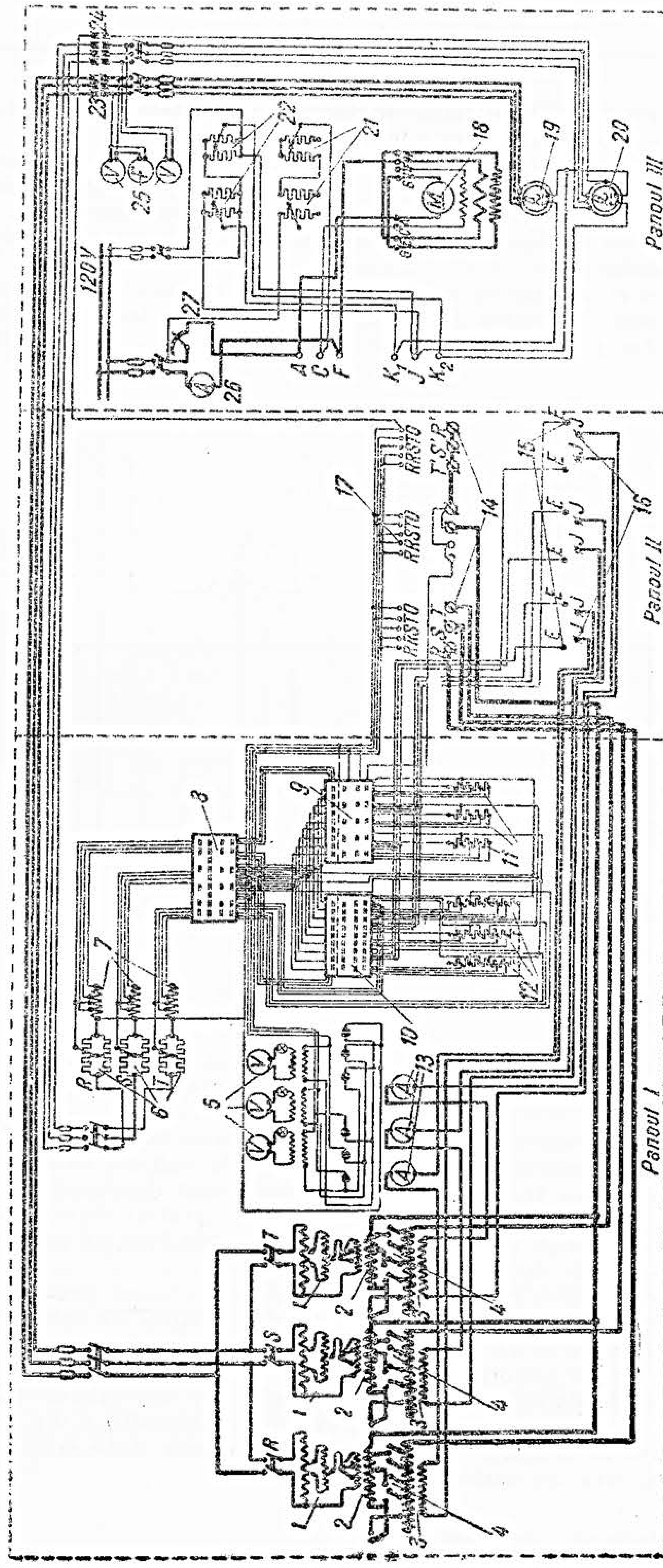


Fig. 264. — Schema electrică a unei staţii pentru verificarea de contori 3 × 300 A — 3 × 600 V.

260. Staţii de verificare. In fig. 264 este redată, ca un exemplu, schema complectă de montaj al unei *staţii pentru verificarea de contori electrici* mono şi trifazaţi, pentru curenţi trifazaţi până la 300 A, pentru tensiuni trifazate până la 600 V şi pentru frecvenţe dela 42 la 60 Hz.

Staţia are următoarele caracteristice de funcţionare: grupul convertisor este deservit de un tablou propriu şi cuprinde un motor de curent continuu *18* de o putere de circa 3 kW, alimentat de o baterie de acumulatori de 120 V şi asigurând o tensiune constantă celor doi generatori trifazaţi *19* şi *20*, de o putere de circa 2—3 kW, montaţi pe un ax comun.

Curenţii pe cele trei faze, furnizaţi de generatorul trifazat, se reglează cu ajutorul unui ansamblu de trei regulatori inductivi *1*, care alimentează trei transformatori pentru producerea de curenţi până la 300 A *4*, şi cu domeniile de utilizare de 1, 3, 10, 30, 100 şi 300 A. Curenţii se măsoară cu ajutorul a trei transformatori de intensitate de mare precizie *3*, având aceleaşi sensibilităţi; pe secundarele acestora sunt montate trei ampermetre de control *13* şi se pot monta şi bobinele de curent ale celor trei wattmetre etalon de comparaţie *16*, la borne disponibile în acest scop.

Bobinele de curent ale contorilor de verificat se racordează deasemenea la borne speciale *14*, existente în circuitele secundare ale celor trei transformatori de curenţi mari.

Tensiunile trifazate, furnizate de generatorul de tensiune prin intermediul a trei autotransformatori *7* cu sensibilităţile 120/220/380/600 V se reglează cu ajutorul a trei reostate *6* montate în potenţiometru direct pe generatorul de tensiune, ele alimentând în acelaşi timp şi bobinele de tensiune ale wattmetrelor etalon, disponibile deasemenea la borne speciale.

Bobinele de tensiune ale contorului sau contorilor de verificat se racordează la prizele destinate acestui scop *17*.

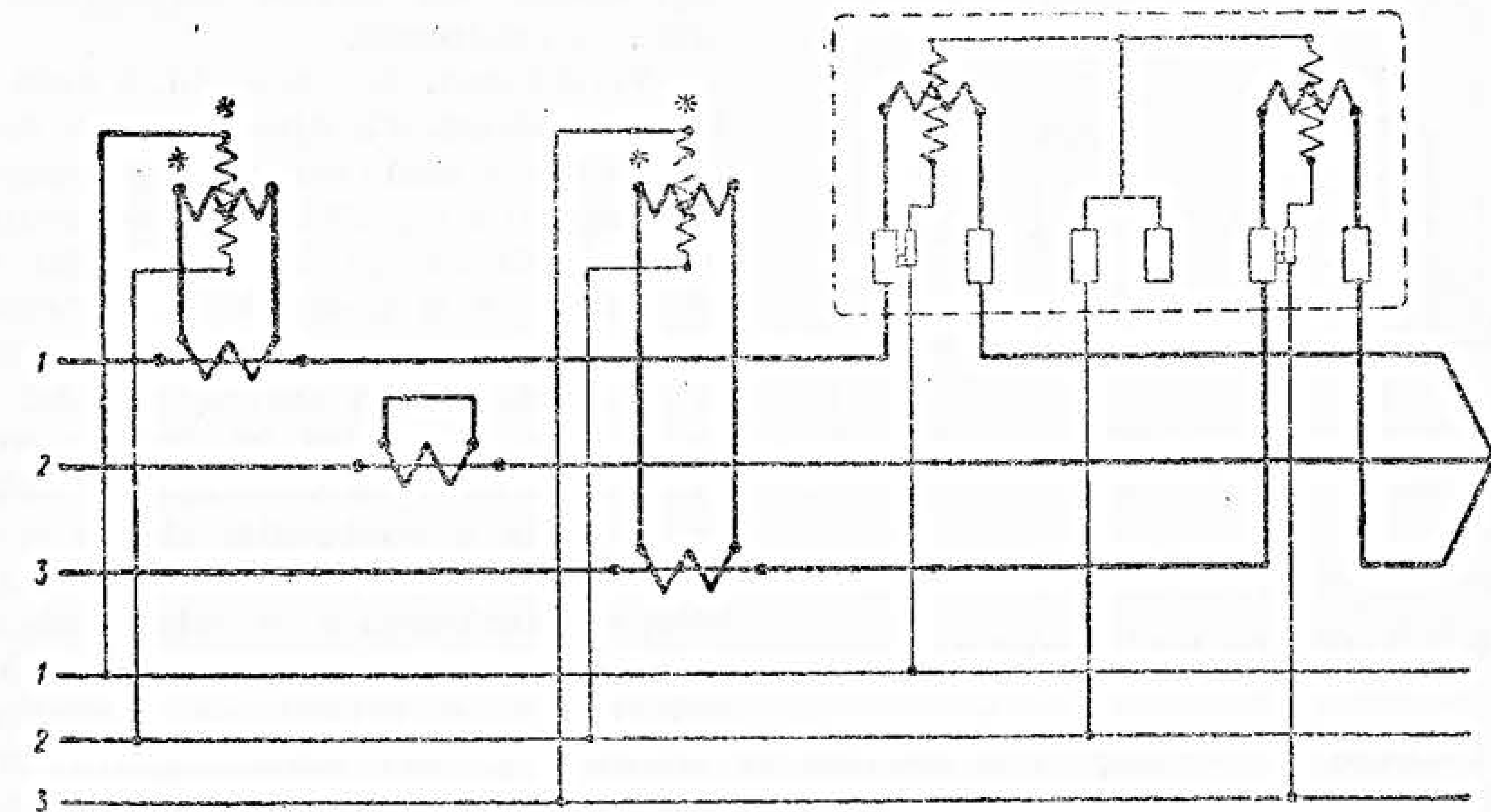


Fig. 265. — Schema de montaj pentru etalonarea unui contor trifazat de energie activă cu surse separate.

Doi comutatori speciali, *8* şi *9*, permit să se măsoare puterea trifazată fie prin metoda celor două wattmetre — montate pe fazele *1* şi *2* sau *1* şi *3*—realizându-se de exemplu schema din fig. 265 — fie prin metoda celor trei wattmetre, după numărul şi modul de conectare al sistemelor propulsoare ale contorilor de

verificat. Deasemenea un alt comutator *10*, permite să se treacă imediat dela măsurarea puterii trifazate active la măsurarea puterii reactive.

Statorul unuia din cei doi generatori este mobil şi poate fi rotit cu ajutorul unui dispozitiv cu cremalieră, astfel încât să se producă un decalaj variabil între curenţii şi tensiunile celor doi generatori pentru verificarea contorilor în sarcină inductivă sau capacitativă, sub diverşi factori de putere.

Intreaga aparatură a staţiei este montată fie pe tablouri de distribuţie verticale, fie în interiorul unui pupitru orizontal, soluţie preferată în momentul de faţă.

261. **Verificarea de aparate de măsurat de curent alternativ.** Cu ajutorul staţiilor de verificare de contori de felul celei descrise mai sus, se pot verifica orice aparate de măsurat de curent alternativ ca: ampermetre, voltmetre, wattmetre, fazmetre, etc., prin comparaţie cu aparate etalon, în limitele de curenţi şi tensiuni ale acestor staţii.

262. **Verificarea contorilor prin comparaţie cu un contor etalon.** Contorii etalon sunt contori speciali de o construcţie foarte îngrijită şi de o mare precizie şi se întrebuinţează la verificarea contorilor obişnuiţi.

Ei se construesc fie pentru curent continuu (sub formă de contori dinamometrici), fie pentru curent alternativ monofazat şi trifazat (sub formă de contori de inducţie).

Contorii etalon dau posibilitatea de a măsura energia electrică chiar pentru un interval de funcţionare foarte scurt. Pentru aceasta ei au un mecanism de înregistrare (în majoritatea cazurilor cu ac indicator), care permite să se citească sau direct energia consumată în kilowattore, sau numărul de rotaţii executate, în care caz energia se află multiplicând numărul de rotaţii cu constanta aparatului.

Contorii etalon pot fi puşi în funcţiune şi opriţi instantaneu prin apăsarea unui buton de anclanşare şi declanşare, în genul dispozitivului dela obturatoarele aparatelor fotografice; acest buton pune sau scoate din circuit bobina de tensiune a contorului.

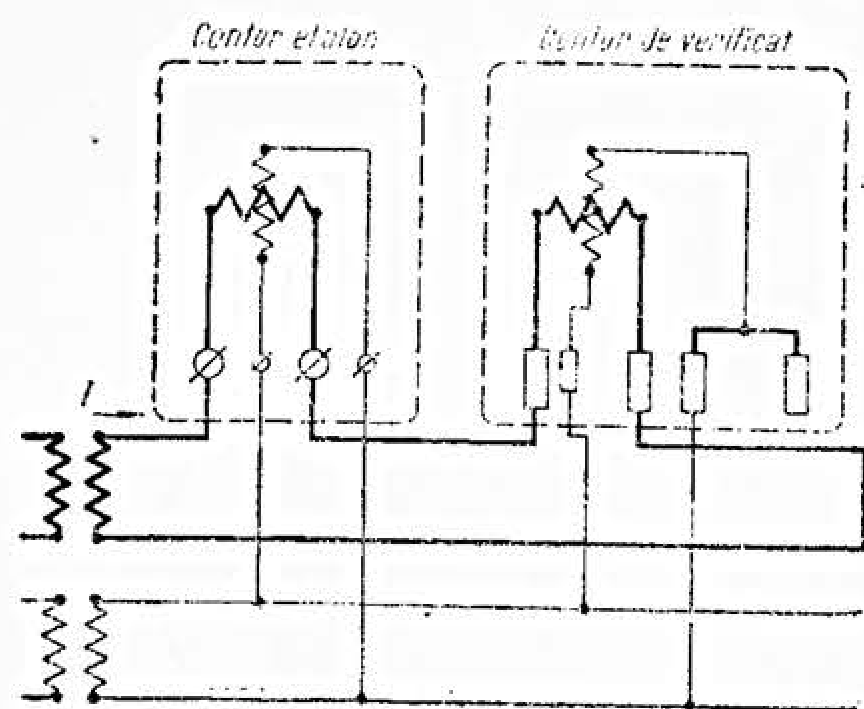


Fig. 266. — Verificarea unui contor monofazat cu un contor etalon

Verificarea, de exemplu, a unui contor monofazat, cu ajutorul unui contor etalon monofazat (pentru care se execută montajul din fig. 266, adică se montează bobinele de curent ale celor doi contori în serie şi bobinele lor de tensiune în paralel) se face în modul următor: se alimentează cu curent cei doi contori şi în momentul în care se manevrează butonul de anclanşare a bobinei de tensiune a contorului etalon şi deci de punere a acestuia în funcţiune, se începe numărarea a n rotaţii ale discului contorului de verificat. După numărarea a n rotaţii, se manevrează rapid butonul de declanşare a bobinei de tensiune şi deci scoaterea din circuit a contorului etalon. Pe cadranul sau cadranele acestuia se citeşte atunci valoarea exactă W în kWh a energiei trecută prin contorul de verificat în timpul efectuării celor n rotaţii.

Eroarea contorului de verificat, de constantă K, va fi:

$$\varepsilon\% = \frac{W_n - W}{W} \cdot 100 = \frac{\frac{n}{K} - W}{W} \cdot 100.$$

După cum se poate vedea, contorul etalon înlocueşte wattmetrul etalon şi cronometrul, întrebuinţate la verificările obişnuite de contori descrise mai sus.

Marele avantaj al utilizării contorului etalon constă în special în aceea că el permite o verificare foarte precisă, chiar în cazul când încărcarea contorului de verificat nu se poate menţine constantă în timpul verificării; aceasta datorită faptului că variaţiile de sarcină influenţează în mod egal şi contorul de verificat şi contorul etalon.

In sfârşit, contorul etalon este foarte potrivit pentru executarea de verificări de contori chiar la locul de utilizare, în centralele electrice, pe reţele, etc. In acest scop, aceşti contori se construesc de tipul portativ.

Spre deosebire de contorii obişnuiţi, el se construeşte cu mai multe sensibilităţi de curent şi de tensiune, de exemplu 1, 2, 5 şi 10 A şi 120, 240, 380 V, întocmai ca şi un wattmetru etalon, contorii trifazaţi putând fi utilizaţi şi în curent monofazat.

263. **Verificarea contorilor cu ajutorul mecanismului integrator.** Se înţelege că un mijloc de verificare a unui contor ar fi şi acela ca în loc să se calculeze energia înregistrată cu ajutorul constantei K a contorului, al numărului de rotaţii ale discului şi al timpului t în care se execută aceste rotaţii (§ 256), să se citească direct indicaţia contorului, cu ajutorul mecanismului său integrator.

Acest mijloc însă nu este comod de aplicat, deoarece ar trebui să se facă contorul să funcţioneze—mai ales la sarcini reduse — un interval de timp extrem de îndelungat pentru a se putea face o citire precisă a indicaţiei contorului, având în vedere că mecanismul său integrator se mişcă foarte încet. In plus, citirile pe cadranul contorului sunt lipsite de precizie.

264. **Erorile maxime admise,** conform prescripţiilor, pentru diverse categorii de contori, la tensiunea şi frecvenţa nominală şi la temperatura ambiantă de $+15\sim+20°C$, sunt date în tabela 19

Tabela 19. Erori maxime admise în %

Categorii de contori	Intensitatea în % din cea nominală		
	100%	50%	10%
	Eroarea maximă admisă ± %		
Pentru contorii de curent continuu şi de curent alternativ la cos φ = 1	3,5	3,5	4
Pentru contorii de curent alternativ la cos φ = 0,5	3,5	3,5	4,5

Contorii de curent continuu pentru distribuţii cu trei fire şi contorii de curent alternativ trifazaţi cu două sau trei sisteme propulsoare, vor fi încercaţi pe fiecare circuit în parte, admiţându-se în această situaţie o eroare adiţională de 0,5% peste erorile din tabloul de mai sus.

Aceeaşi eroare adiţională se admite şi pentru măsurarea energiei în circuite trifazate cu faze inegal încărcate.

Pentru contorii de energie reactivă, limitele erorilor sunt cele din tabloul de mai sus, majorate cu o eroare adiţională de 1,5%.

H) Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice

265. **Generalităţi.** Metodele şi aparatele electrice de măsurat îşi găsesc o întrebuinţare de o deosebită importanţă şi în alt domeniu al tehnicei măsurătorilor decât acela al mărimilor electrice şi magnetice, cuprinzând toate mărimile care servesc la evaluarea calitativă şi cantitativă a diferite fenomene mecanice, fizice, chimice, etc., adică în *domeniul măsurării electrice a mărimilor neelectrice.*

S'a desvoltat astfel o aparatură specială pentru măsurarea pe cale electrică a celor mai variate mărimi neelectrice ca:

Viteze unghiulare, acceleraţii, cupluri de torsiune, presiuni, deplasări, deformaţii, tensiuni mecanice, dimensiuni liniare, temperaturi, cantităţi de căldură, diferenţe de nivel ale lichidelor, concentraţia ionilor de H (p_H), gradul de umiditate, etc.

Rolul pe care îl îndeplinesc aceste aparate este de o deosebită importanţă pentru desvoltarea ştiinţei şi a producţiei industriale, care sunt strâns legate de tehnica măsurătorilor.

Producţia contemporană, în special în condiţiile economiei socialiste planificate, este caracterizată printr'o severă şi permanentă cercetare a procesului tehnologic în orice ramură a producţiei, şi printr'o largă folosire a automatizării proceselor de producţie.

Pentru acest motiv nu mai poate fi concepută o fabrică, o întreprindere industrială: de produse metalurgice, chimice, textile, petrolifere, etc., care să nu utilizeze pe o scară foarte întinsă aparatura necesară măsurării electrice a mărimilor neelectrice, care servesc pentru controlul şi comanda proceselor de producţie.

Adoptarea metodelor şi aparatelor electrice de măsurat a mărimilor neelectrice în locul metodelor şi aparatelor optice, mecanice, etc., se datoreşte calităţilor cunoscute ale aparaturii electrice, care oferă:

α) posibilitatea *măsurării la distanţă, a măsurării simultane* a mai multor parametri şi deci a *centralizării* unor serii întregi de măsurători.

β) posibilitatea *automatizării* oricăror procese de măsurare, ceeace constitue o condiţie de bază atât în cercetările tehnico-ştiinţifice cât şi în controlul industrial.

γ) posibilitatea executării de *măsurători foarte precise pentru o gamă extrem de întinsă* a mărimilor neelectrice de măsurat, de la cele mai mici valori până la cele mai mari, date fiind limitele mari între care poate să varieze sensibilitatea unui acelaşi tip de aparat electric de măsurat.

266. **Caracteristicele aparaturii pentru măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.** Această aparatură prin însăşi natura sa, este în general mai complicată decât aceea utilizată pentru măsurarea mărimilor electrice, având un specific propriu acestui domeniu al tehnicei măsurătorilor, care constă în faptul că mărimea neelectrică de măsurat trebue în primul rând să fie transformată într'o mărime electrică.

Pentru aceste motive, aparatura în chestiune comportă în general trei părţi:

α) un aparat denumit *mutator* sau *receptor,* destinat să transforme mărimea neelectrică de măsurat într'o mărime electrică. Astfel de receptori sunt bazaţi pe dependenţa unui parametru electric al corpurilor solide, lichide sau gazoase de mărimea neelectrică de măsurat (de exemplu variaţia rezistenţei electrice cu temperatura, etc.).

β) Aparatura denumită *schema electrică,* destinată să facă legătura între mutator şi aparatul electric care va măsura mărimea respectivă.

γ) *Aparatul electric de măsurat* însuşi, a cărui scară va fi gradată direct în unităţi ale mărimii neelectrice de măsurat.

Intreaga aparatură mai comportă cele mai deseori şi o sursă de energie electrică auxiliară care alimentează în general toate cele trei elemente de mai sus. In alte cazuri, sursa de energie alimentează numai schema electrică şi în fine, în alte cazuri speciale, însuşi mutatorul (receptorul) constitue sursa de energie pentru schemă şi aparatul electric de măsurat.

In ce priveşte schema electrică, ea se reduce uneori la o simplă conductă de legătură între mutator şi aparatul electric de măsurat.

Alteori, schema este mai complicată şi ia forma, fie a unei punţi de curent continuu sau curent alternativ, fie a unui potenţiometru de curent continuu, etc.

In fine, schema electrică devine în unele cazuri şi mai complicată, comportând o serie de aparate auxiliare având de îndeplinit diverse roluri ca: stabilizarea sursei de alimentare, redresarea unui curent alternativ care iese din punte pentru a putea fi măsurat cu un aparat de curent continuu, amplificarea curentului sau tensiunii care iese din schema electrică, etc.

In § 267 şi 268 se dau două exemple privind măsurarea electrică a mărimilor mecanice, iar § 269 tratează despre unul dintre cele mai importante domenii ale măsurării electrice de mărimi neelectrice, şi anume măsurarea electrică a temperaturilor: pirometria electrică:

267. **Măsurarea electrică a vitezei unghiulare: Tacometrul electric** (fig. 267). Aparatura se compune dintr'un mic generator de curent alternativ al cărui rotor R, format dintr'un magnet permanent este fixat pe arborele maşinii a cărei viteză se măsoară. Generatorul, care constitue mutatorul M al aparaturii, produce o tensiune alternativă proporţională cu viteza maşinii. Această tensiune alimentează un voltmetru V care constitue aparatul electric de măsurat, şi care este gradat în rotaţii/minut. In acest caz nu există sursă auxiliară de energie electrică, iar schema electrică S se reduce la firele de legătură între mutator şi voltmetru.

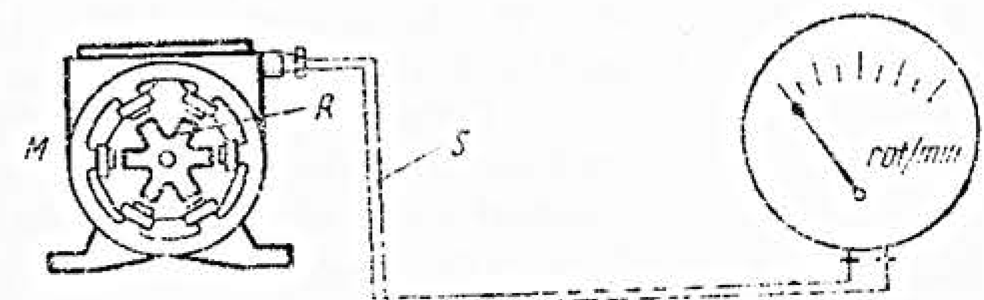


Fig. 267.—Tacometrul electric.

268. **Măsurarea electrică a nivelului lichidelor** (fig. 268). Mutatorul este constituit din două bobine de inductanţă identice legate în serie L_1 şi L_2 şi un miez de fier m legat mecanic prin tija t de un flotor f care pluteşte pe lichidul al cărui nivel trebue măsurat. Schema electrică se compune dintr'o punte $ABCD$ în care laturile AC şi BC sunt constituite din cele două bobine L_1 şi L_2 ale mutatorului, celelalte două laturi ale punţii fiind constituite din bobinele de inductanţă L_1' şi L_2' fixe, bobina s de inductanţă variabilă şi rezistenţa r variabilă. Diagonala AB a punţii este alimentată cu o tensiune alternativă de frecvenţă

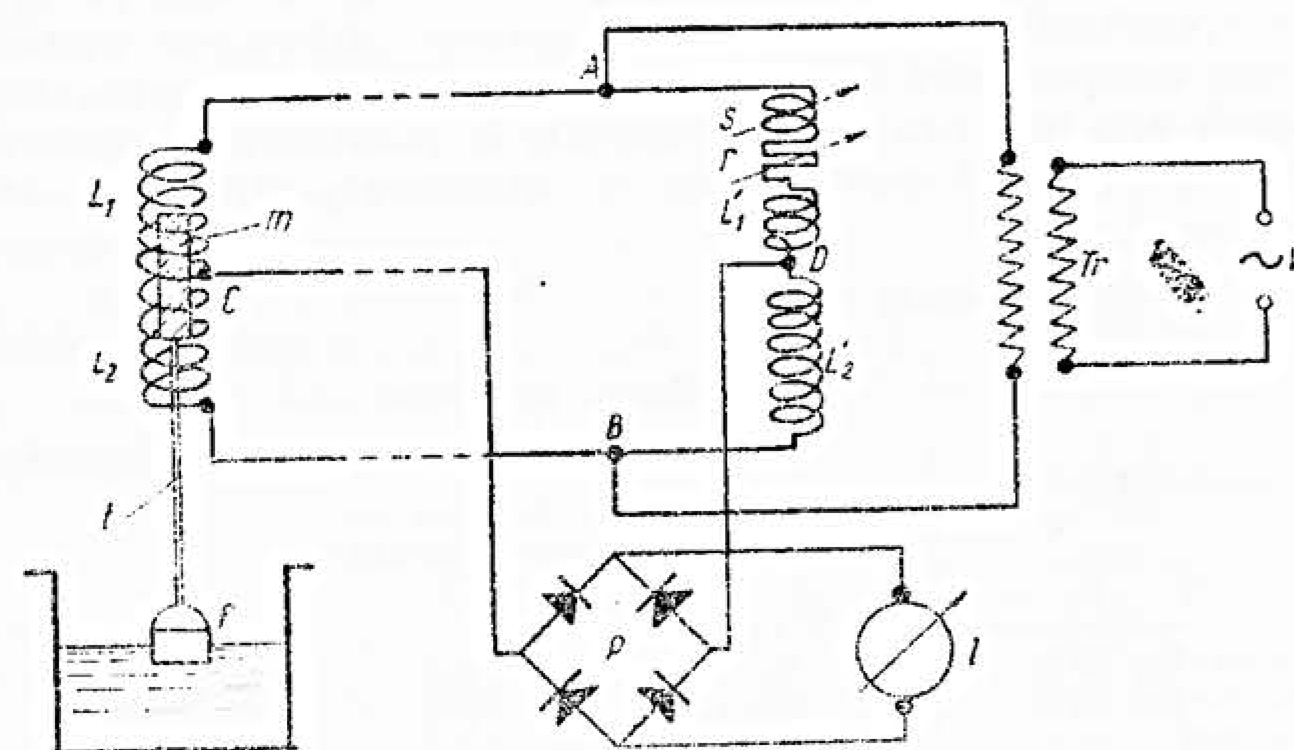


Fig. 268.—Dispozitiv pentru măsurarea electrică a nivelului lichidelor.

industrială (50 Hz) prin intermediul transformatorului Tr. In diagonala CD se află montat prin intermediul unei punți cu redresor P un aparat de curent continuu magnetoelectric I.

Pentru o anumită poziție extremă a flotorului puntea se echilibrează cu ajutorul inductanței și rezistenței variabile s și r aducând astfel la zero acul indicator al aparatului I. Când nivelul lichidului variază, variind și poziția miezului de fier m, inductanțele L_1 și L_2 variază, puntea desechilibrându-se, ceeace produce deviația acului aparatului electric, ale cărui gradații indică fie volumul lichidului din vas, fie nivelul lichidului.

269. **Pirometrie electrică.** Aparatele pentru măsurarea electrică a temperaturilor sunt astăzi foarte întrebuințate în cele mai diverse domenii ale tehnicei. După principiul lor de funcționare, ele se împart în trei categorii:

α) Pirometre termoelectrice.

β) Termometre cu rezistență.

γ) Pirometre cu radiații.

270. **Pirometrele termoelectrice.** Măsurarea temperaturii cu acest tip de pirometre se bazează pe variația f.e.m. a unui termocuplu în funcție de temperatură.

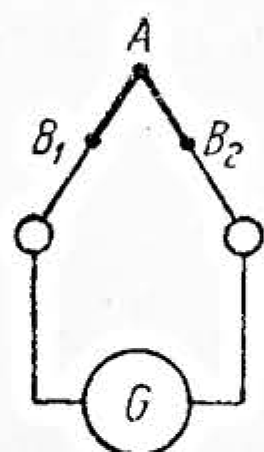


Fig. 269. — Termocuplu legat la un galvanometru: A — punctul de contact (extremitatea caldă); B_1 și B_2 — extremitățile reci

Pirometrul este constituit dintr'un termocuplu (mutator), un aparat de măsurat forța termoelectromotoare și conductele de legătură respective (schema electrică).

Termocuplul este alcătuit în esență din doi conductori din metale diferite, sudați la una din extremități, care va constitui *capătul cald* al termocuplului. Celelalte două extremități, care formează *capetele reci* ale termocuplului, se leagă la bornele unui milivoltmetru de curent continuu (un galvanometru) (fig. 269).

In cazul când între capătul cald și capetele reci ale termocuplului există o diferență de temperatură, se produce în circuitul termocuplului o forță electromotoare care este funcție de diferența de temperatură și care se măsoară cu ajutorul milivoltmetrului. Pentru a măsura temperatura unui obiect, se aplică capătul cald (punctul de contact) pe obiectul respectiv, (sau se cufundă în lichidul a cărui temperatură se măsoară) extremitățile reci ale termocuplului aflându-se ambele la o aceeași temperatură (de exemplu la temperatura ambiantă).

271. **Metalele și aliajele** cele mai uzuale întrebuințate în construcția termocuplurilor, cu domeniile de temperatură pentru care se utilizează, sunt indicate în tabela 20.

Tabela 20

Tipul termocuplului	Domeniul de măsurare a temperaturii	
	Serviciu continuu °C	Serviciu de scurtă durată *) °C
Platin-platin-rhodiu 10%	0...1450	1700
Platin-platin-rhodiu 13%	0...1450	1700
Cromel — Alumel	0...1100	1350
Fier — constantan	0... 900	1100
Crom — constantan	0... 900	1100
Cupru — constantan	−190... 350	600

*) Termocuplurile care au fost supuse la temperaturile indicate în această coloană trebue supuse la o reetalonare spre a se putea conta pe precizia indicațiilor respective.

272. **Variația f.e.m.** a diverselor termocupluri în funcție de temperatură este dată în tabela 21. Termocuplurile cu constantan de construcții diferite, pot da diferențe de 5...20° C.

Tabela 21. Variația f.e.m. în funcție de temperatură pentru termocuplurile uzuale (temperatura extremităților reci ale conductorilor 0°C)

F.e.m. mV	Grade centigrade			F.e.m. mV	Grade centigrade		
	Platin-platin rhodiu 10%	Platin-platin rhodiu 13%	Cupru constantan		Cromel-alumel	Fier-constantan	Cromel-constantan
0	0	0	0	0	0	0	0
1	147	145	25	5	122	93	80
2	263	259	49	10	246	182	153
3	365	361	72	15	367	272	221
4	474	457	94	20	485	362	286
5	578	550	115	25	602	453	350
6	675	638	136	30	720	543	413
7	770	724	156	35	841	629	475
8	861	806	176	40	966	711	537
9	950	886	195	45	1096	789	599
10	1037	964	213	50	1232	865	661
11	1122	1040	232	55	1376	946	723
12	1206	1114	250	60	—	—	786
13	1290	1187	268	65	—	—	850
14	1374	1259	285	70	—	—	915
15	1458	1332	302	—	—	—	—
16	1543	1404	319	—	—	—	—
17	—	1477	336	—	—	—	—
18	—	1550	353	—	—	—	—

In fig. 270 este reprezentat un termocuplu platin-platin rhodiu de construcție industrială.



Fig. 270. — Termocuplu industrial platin-platin-rhodiu

273. **Măsurarea f.e.m.** a cuplului termoelectric se face cu ajutorul unui galvanometru cu ac indicator sau al unui dispozitiv potențiometric.

α) *Metoda galvanometrului.* Dacă e este f.e.m. a termocuplului și e_0 f.e.m. citită la galvanometru (diferită de prima din cauza căderii de tensiune în circuitul de măsură), R_g rezistența galvanometrului, R_c rezistența termocuplului și R_L rezistența firelor de legătură:

$$e_0 = \frac{R_g \times e}{R_g + R_c + R_L}.$$

Dacă R_g este mare față de $R_c + R_L$

$$e_0 \simeq e,$$

și galvanometrul indică chiar f.e.m. a termocuplului. Dacă R_g este mic (condiție necesară ca galvanometrul să aibă o mare sensibilitate de tensiune) se poate totuși etalona aparatul astfel încât să indice f.e.m. reală pentru o anumită rezitență a firelor de legătură și bineînțeles pentru un termocuplu de un anumit tip.

Dacă însă R_L şi R_c variază, citirile pot fi afectate de erori foarte mari, ceeace reprezintă un desavantaj al acestor metode, altfel foarte comode.

β) *Metoda potenţiometrică* este cea mai precisă pentru măsurarea f.e.m. termoelectrică (subcap. *F*, § 103). Există potenţiometre industriale pentru măsurarea acestor f.e.m., cu scări de măsurare speciale, adaptate cuplurilor termoelectrice din metale nobile sau comune. Această metodă elimină complet erorile datorite schimbării rezistenţelor firelor de legătură şi a termocuplurilor. Aparatele au însă desavantajul unui cost ridicat, iar măsurarea nu se face prin citire directă, ca la galvanometru.

274. **Corecţia de temperatură.** Dacă un termocuplu este etalonat pentru o anumită temperatură t'_0 a extremităţilor reci şi este utilizat la temperatura t_0 a acestora, pentru a se obţine valoarea exactă trebue ca la valoarea citită a f.e.m. să se adauge valoarea f.e.m. desvoltată când punctul cald al termocuplului este la temperatura t'_0 iar extremităţile reci la t_0. Dacă aparatul indicator este gradat în grade de temperatură, se adaugă la valoarea citită corecţia $(t'_0 - t')\,K$, în care *K* este un factor depinzând de termocuplu şi de temperatură. In tabela 22 se dau valorile lui *K* pentru diverse termocupluri şi temperaturi, în ipoteza că etalonarea s'a făcut pentru o temperatură de zero grade a extremităţilor reci.

Tabela 22. Factori de corecţie de temperatură ($t_0 = 0°$ C)

Pt-PtRh 10%		Pt-Pt Rh 13%		Cupru-constantan		Fier-constantan		Cromel-Alumel	
°C	*K*	°C	*K*	°C	*K*	°C	*K*	°C	*K*
265... 450	0,65	250... 400	0,60	0... 50	1,00	0... 100	1,00	0... 800	1,00
450... 650	0,60	400... 550	0,55	50... 80	0,95	100... 600	0,95	800...1100	1,05
650...1000	0,55	550... 900	0,50	80...110	0,90	600...1000	0,85	—	—
1000...1450	0,50	900...1450	0,45	110...150	0,85	—	—	—	—
				150...200	0,80				
				200...270	0,75				
				270...350	0,70				

275. **Compensarea erorilor de temperatură.** In practică există anumite dispozitive care evită facerea corecţiilor de mai sus: de exemplu, în cazul utilizării unui galvanometru, acesta este înzestrat cu un dispozitiv compensator automat, constituit dintr'un resort bimetalic prins de resorturile bobinei mobile, astfel încât în circuit deschis acul indicator să indice temperatura instrumentului şi deci a extremităţilor reci (dacă acestea se află în aparat). Dispozitivele potenţiometrice au deasemenea compensatori de temperatură automaţi sau manuali.

276. **Instalaţiile de măsurat temperatura cu termocuplele** trebue să fie executate cu luarea următoarelor precauţiuni:

Conductorii de legătură din cupru trebue să aibă o izolaţie rezistentă la umezeală şi să fie protejaţi printr'un înveliş metalic, pus la pământ. Secţiunea lor trebue să fie suficient de mare pentru ca rezistenţa lor să fie mică. Toate legăturile trebue să fie lipite. Tubul de protecţie a termocuplului va fi din cuarţ, porţelan, carborundum, nichel, crom, fier, argilă, etc., după domeniul de utilizare respectiv, protecţia făcându-se împotriva gazelor, a loviturilor, a schimbărilor bruşte de temperatură (în cazul că termocuplul se introduce într'o masă de metal topit), etc.

La instalaţiile de centralizare, termocuplurile se vor monta fiecare cu conductori separaţi, fără să se utilizeze un conductor de întoarcere comun, din cauza pericolului de scurtcircuitare şi al curenţilor de scurgere.

Termocuplurile au o durată limitată de funcţionare, mai ales la temperaturi înalte, ele trebuind reetalonate împreună cu aparatul de măsurat respectiv, la

intervale de timp care depind de regimul de funcţionare a termocuplului respectiv.

277. **Termometrele cu rezistenţă** sunt bazate pe variaţia cu temperatura a rezistenţei metalelor. Se folosesc în general nichelul şi platina. Forma cea mai simplă a acestor termometre este o bobină din fir de platină, înfăşurată pe un miez de mică (fig. 271) şi închisă într'un tub protector de porţelan. Aceste termometre se pot utiliza până la temperaturi de circa 900°C şi chiar 1200°C.



Fig. 271. — Bobina unui termometru de rezistenţă.

Dacă R_{t_1} şi R_{t_2} sunt rezistenţele bobinei termometrului, măsurate la temperaturile t_1 şi t_2, din relaţia aproximativă:

$$R_{t_2} = R_{t_1}\,[1 + \alpha\,(t_2 - t_1)]$$

în care α este coeficientul de temperatură al metalului întrebuinţat la temperatura t_1; se deduce diferenţa de temperatură $t_2 - t_1$, respectiv temperatura t_2, t_1 fiind cunsocute.

Pentru măsurarea rezistenţelor R_{t_1} şi R_{t_2} se utilizează în principiu metodele expuse la subcap. *F*, § 180—182.

Ele se măsoară cu:

278. **Puntea Wheatstone,** montajul fiind astfel realizat încât rezistenţa conductorilor de legătură la bobina termometrului să nu falşifice rezultatele. In fig. 272 este reprezentată o asemenea schemă.

Conductorii de platină sau de aur *C'd* şi *T'e* din termometru sunt construiţi astfel încât rezistenţele lor să fie egale iar conductorii de legătură, de cupru, *CC'* şi *TT'* au deasemenea rezistenţe egale între ele. *B* este o sursă de curent continuu şi *G* un galvanometru. Echilibrul punţii se obţine variind rezistenţa r_3. La echilibru:

$$\frac{r_3 + Cd}{r_1} = \frac{r_1 + Te}{r_2}\,;$$

r_1 fiind prin construcţie egal cu r_2 şi *Cd* cu *Te*, rezultă:

$$r_3 = r_4\,,$$

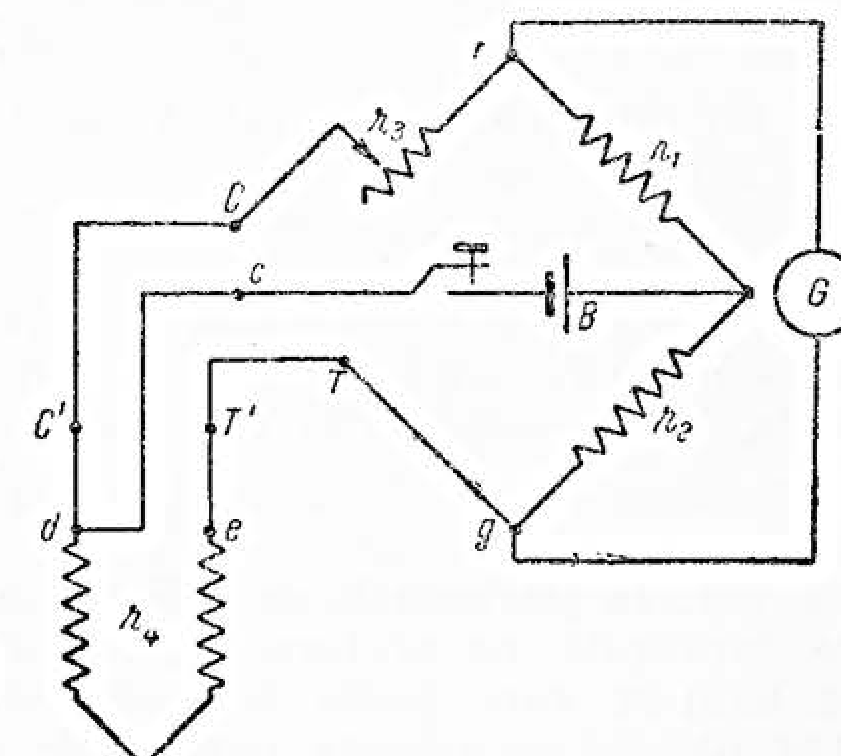


Fig. 272. — Montaj de punte pentru măsurarea rezistenţei unui termometru.

adică rezistenţa bobinei termometrului r_4 este independentă de conductorii de legătură.

Există şi alte dispozitive, bazate pe principiul punţii duble, al metodelor de compensaţie, sau al galvanometrului diferenţial.

Termometrele cu rezistenţă sunt în special utilizate pentru măsurări de diferenţe mici de temperatură, ca acelea care intervin în calorimetrie, la determinarea punctelor de solidificare, etc.. şi acolo unde se cere o precizie mare, de circa 1 sau 2 la 10 000. In industrie, acest tip de termometre este întrebuinţat în anumite cazuri speciale, instalaţiile cu termocupluri fiind în general preferate.

279. **Radiaţia.** Temperatura corpurilor poate fi evaluată din energia radiantă pe care o emit sub formă de lumină vizibilă şi de radiaţii infra-roşii.

Deoarece intensitatea radiaţiei variază foarte repede cu creşterea temperaturii, s'ar părea că un sistem pirometric bazat pe intensitatea radiaţiei luminoase sau a radiaţiei totale emisă de un corp cald ar fi un sistem ideal şi simplu. Totuşi, intensitatea radiaţiilor emise de diferite corpuri la o anumită temperatură şi pe o anumită lungime de undă diferă dela o substanţă la alta; cu alte cuvinte, puterea de absorbţie sau de emisie variază cu felul substanţei, cu lungimea de undă şi cu temperatura.

280. **Radiaţia corpului negru.** O substanţă care absoarbe toate radiaţiile, de orice lungime de undă, care cad asupra ei, se numeşte *corp negru*. Un asemenea corp va emite intensitatea maximă de radiaţie la o anumită temperatură şi o anumită lungime de undă. Un asemenea corp nu există dar poate fi reprezentat, cu o foarte mică aproximaţie, printr'o incintă goală în interior şi opacă, ai cărei pereţi sunt încălziţi uniform.

Energia radiantă a corpului este proporţională cu fascicolul de raze care ar ieşi din acest corp printr'o deschizătură foarte mică practicată în peretele corpului.

Legea Stefan-Bolzmann. Relaţia dintre energia totală radiată de un corp negru şi temperatura sa este exprimată prin formula:

$$W = \sigma\,(T^4 - T_0^4),$$

în care W este energia totală de toate lungimile de undă radiată de corp pe secundă şi cm^2 de suprafaţă, T şi T_0 sunt temperaturile absolute ale radiatorului, respectiv ale mediului ambiant, iar σ este o constantă:

$$\sigma = 5{,}7 \times 10^{-12}\ \text{watt cm}^{-2}\,\text{grade}^{-4}.$$

In general T_0^4 este neglijabil în raport cu T^4, relaţia de mai sus devenind:

$$W = \sigma\,T^4.$$

Cu toate că energia totală emisă de o substanţă oarecare nu este egală cu accea emisă de un corp negru la aceeaşi temperatură, ea poate fi considerată ca o fracţiune E a energiei emisă de radiatorul integral, această fracţiune E fiind denumită *emisivitatea totală.*

Dacă τ este temperatura corpului negru la care acesta ar emite o energie echivalentă cu energia emisă de un corp oarecare la temperatura T grade absolute, relaţia dintre emisivitatea totală E a acestui corp şi cantităţile τ şi T este:

$$\lg E = 4\,(\lg\tau - \lg T).$$

281. **In pirometrele cu radiaţie,** energia radiantă de diverse lungimi de undă este focalizată cu ajutorul unei lentile de cuarţ sau al unei oglinzi concave (fig. 273) M care poate fi deplasată cu ajutorul dispozitivului S. In focarul astfel obţinut se găseşte punctul de contact (punctul cald) al unui termocuplu T, extremităţile reci ale acestuia fiind izolate de radiaţiile corpului cald. In aceste condiţii, termocuplul dă naştere unei f.e.m. care poate fi măsurată sau înregistrată. In practică, aparatul de măsurat sau înregistrat este etalonat chiar în grade de temperatură. Relaţia dintre f.e.m. e a termocuplului şi temperatura absolută T este:

$$e = aT^b$$

sau

$$\lg e = K + b \lg T,$$

în care a (sau K) şi b sunt constante empirice, constanta b fiind cuprinsă între 4 şi 5.

Indicaţiile sunt independente de depărtarea la care se montează pirometrul atunci când fascicolul de raze vizate ocupă în întregime gaura din diafragma aparatului D. Tensiunea care se obţine cu asemenea pirometre este de 5 până la 20 mV şi se înregistrează de galvanometre sensibile. Avantajul acestor aparate este că nu au nevoie de nici o baterie auxiliară. Scara minimă de temperaturi este de 800 °C. O tensiune de 15 mV se obţine abia la o temperatură de cel puţin 1200 °C. Influenţa temperaturii înconjurătoare se elimină prin modificarea diafragmei orificiului, care se micşorează uneori în mod automat printr'un dispozitiv cu bimetal.

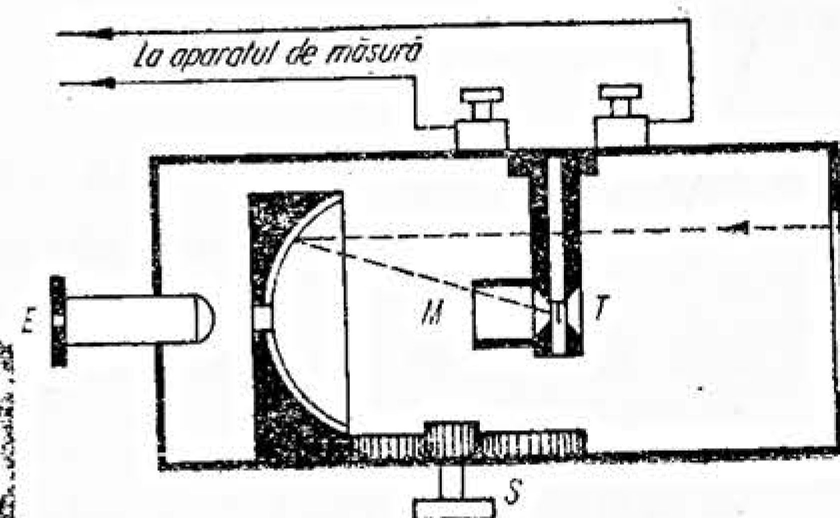


Fig. 273. — Pirometru cu radiaţie

Pirometrele cu radiaţie sunt întrebuinţate pentru măsurarea temperaturilor în cuptoare, sursa de radiaţii fiind în acest caz o gaură în peretele cuptorului şi totalitatea radiaţiilor emise fiind focalizate în punctul de contact al termocuplului. Pentru măsurarea temperaturii corpurilor în spaţii deschise, temperatura citită trebue corectată, coeficienţii de corecţie fiind cunoscuţi numai aproximativ şi metoda nefiind precisă.

La întrebuinţarea acestor pirometre trebue ca oglinzile şi dispozitivele optice să fie perfect curate, întrucât în cazul întrebuinţării oglinzilor prăfuite se obţin erori de circa 100°C.

Se va aştepta deasemenea timp suficient pentru ca termocuplul să fie încălzit şi se va lua totdeauna indicaţia maximă.

282. **Pirometrele optice** (fig. 274) folosesc principiul fotometric al comparaţiei intensităţii unei radiaţii monocromatice vizibile, emise de un corp, cu radiaţia de aceeaşi lungime de undă şi deci de aceeaşi culoare emisă de o sursă de comparaţie constantă şi reproductibilă, cum este de pildă o lampă electrică cu incandescenţă. Comparaţia se face mai adeseori la lumină roşie. Se vizează cu aparatul spre corpul de cercetat şi se aduce în câmpul optic al aparatului filamentul înroşit al unei lămpi de comparaţie alimentată printr'un curent variabil dela o baterie de acumulatori.

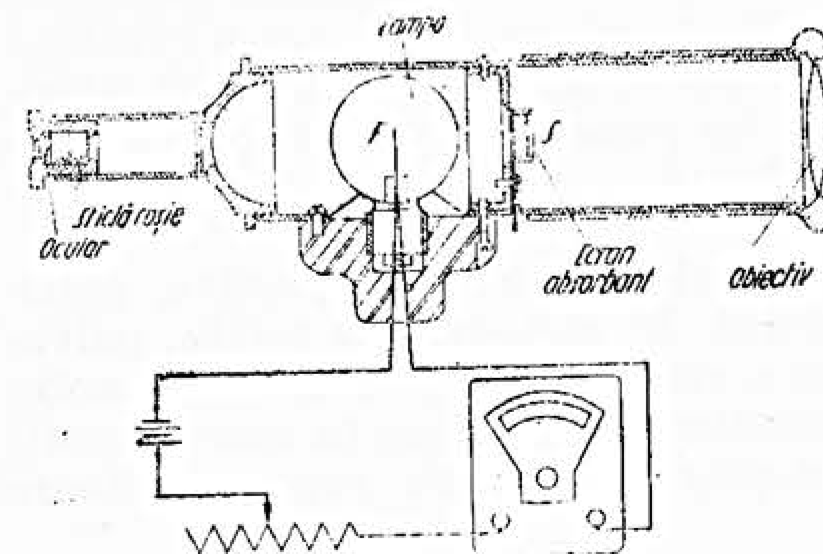


Fig. 274. — Pirometru optic

Se schimbă temperatura filamentului lămpii, prin variaţia curentului, până când imaginea filamentului dispare pe culoarea fondului, dată de corpul de cercetat. Dacă temperatura filamentului este mai mare, el apare luminos pe un fond întunecat; dacă temperatura este mai scăzută, apare ca un corp întunecos pe un fond mai luminat. Se variază curentul în filament, până când filamentul nu se mai vede; se citeşte atunci valoarea curentului i şi se obţine implicit şi temperatura corpului respectiv.

Lampa nu trebue să întreacă o temperatură de 1 500°C. Pentru temperaturi mai mari, se pun ecrane absorbante, care slăbesc radiaţiile emise de corpul de cercetat într'o proporţie cunoscută şi se fac apoi corecţiile respective. Temperaturile se citesc direct pe scara aparatului. Exactitate: ± 5°C pentru temperaturi de 1 200°C, ± 2°C pentru temperaturi de 1 600°C.

Pirometrele optice indică aproximativ temperaturile adevărate numai când se vizează corpuri negre (realizate în practică printr'o fereastră în peretele unui cuptor sau cu ajutorul unui tub de porţelan închis, cufundat în metale sau săruri topite).

Când se vizează obiecte în spaţiu deschis, trebue aplicate anumite corecţii, depinzând de emisivitatea substanţelor respective, corepunzătoare lungimii de undă a luminii întrebuinţate. Din acest motiv, pirometrele optice nu sunt indicate pentru măsurători în spaţii deschise.

Pirometrele pot fi construite şi ca aparate înregistratoare cu înregistrare pe bandă de hârtie sau pe diagrame circulare, cele mai întrebuinţate fiind *pirometrele termoelectrice.*

1. Recomandări relative la condiţiile de păstrare şi de utilizare a aparatelor electrice de măsurat

283. **Cauzele de deteriorare** a aparatelor electrice de măsurat sunt:
— supraîncărcările electrice;
— şocurile mecanice;
— păstrarea în condiţii neprielnice: umezeala, temperaturi prea ridicate sau prea scoborâte, atmosfere corozive sau conţinând praf, etc.

284. **Evitarea supraîncărcărilor electrice.**

α) *Aparate industriale.*

— Ampermetrele şi voltmetrele cu mai multe domenii de măsurare se vor lega în circuit alegând întotdeauna domeniul de măsurare potrivit curentului respectiv tensiunii maxime de măsurat.

— In cazul aparatelor care comportă două circuite, unul de curent (ampermetric) şi unul de tensiune (voltmetric) ca wattmetre, contori, fazmetre, etc., se vor alege domeniile de măsurare potrivite cu mărimea tensiunii sursei de alimentare şi a curentului absorbit de receptor, montând negreşit pentru controlul acestor mărimi un ampermetru în serie în circuitul de curent şi un voltmetru în paralel cu circuitul de tensiune al aparatului.

— Toate aparatele care sunt destinate să funcţioneze cu şunturi sau rezistenţe adiţionale nu vor fi niciodată utilizate fără aceste accesorii.

— Reostatele de reglaj, atât de mult întrebuinţate în măsurătorile electrice, vor trebui totdeauna să fie montate în serie cu un ampermetru pentru a constata că curentul care trece prin reostat nu este mai mare decât curentul maxim admisibil, înscris pe placa de fabricaţie a reostatului. La punerea în circuit, se va avea grije ca reostatul să fie pus la maximum de rezistenţă.

β) *Aparate de Laborator.*

— Galvanometrele vor fi montate pe şunturile universale respective, potrivite pentru minimum de sensibilitate a aparatului. In metodele de punte, galvanometrele vor fi totdeauna montate în serie cu o rezistenţă foarte mare de ordin de zeci de mii de ohmi, care la apropierea de echilibru se va pune în scurt circuit, pentru ca curentul în galvanometru să nu depăşească limita corespunzătoare maximului scării aparatului.

— *Buclele de oscilograf* trebue deasemenea utilizate numai în legătură cu şunturile speciale sau rezistenţele adiţionale, luând aceleaşi măsuri de precauţiune ca şi pentru galvanometre.

— Diversele aparate de laborator ca rezistenţe de precizie şi etalon, condensatori şi inductanţe etalon, etc., nu vor fi supuse în niciun caz unor curenţi sau tensiuni mai mari decât cele admise, căutându-se a se rămâne mult sub aceste limite.

— Nu se va lucra niciodată cu o punte de măsură până nu i se cunoaşte schema electrică pentru a identifica toate părţile sale componente.

— Nu se va alimenta circuitul primar al unui transformator de intensitate mai ales de precizie, până nu se constată în prealabil că circuitul secundar este închis pe aparatul de măsurat sau este scurtcircuitat.

285. **Evitarea şocurilor mecanice.**

— Toate aparatele prevăzute cu dispozitive de blocare a organului mobil — în special galvanometrele, miliwattmetrele, etc. — nu se vor deplasa decât după ce vor fi fost blocate.

— Deblocarea se va face cu îngrijire spre a nu se deteriora suspensiunea organului mobil.

Pentru galvanometrele care nu posedă dispozitivul de blocaj, blocarea va fi înlocuită prin legarea în scurt circuit a bornelor aparatului.

— Aparatele de măsurat electrice (ampermetre, voltmetre, wattmetre, etc.) ca şi aparatele de laborator (punţi, cutii de rezistenţe, capacităţi etalon, etc. vor fi negreşit ferite de orice şocuri mecanice şi sguduiri.

— Aparatele care posedă o anumită polaritate, ca cele magnetoelectrice, sau wattmetrele, contorii, fazmetrele, etc., se vor lega în circuit ţinând seama de polaritatea lor, astfel încât să indice în sensul normal al cadranului, adică acul indicator să nu bată contra opritorului şi să provoace cu timpul fie schimbarea poziţiei axului faţă de organul mobil, fie slăbirea însăşi a sistemului de prindere dintre aceste 2 piese.

286. **Condiţii de păstrare a aparatelor electrice de măsurat.**

Aparatele trebue păstrate în locuri ferite de umezeală, praf şi atmosfere corozive şi la temperaturi ambiante apropiate de cea normală (20° C).

287. **Condiţii preliminare pentru realizarea de măsurători precise.**

— Aparatele vor fi folosite în poziţia lor de etalonare, indicată de aparat.

— Inainte de întrebuinţare, acul aparatului se va aşeza la zero al gradaţiei, cu ajutorul dispozitivului de punere la zero (dacă posedă).

— In cazul când se şterge geamul unui aparat înainte de utilizare, acesta se va aburi pentru anularea sarcinei electrostatice provenită din frecarea geamului.

— Pentru toate aparatele de măsurat şi de Laborator care comportă fişe de contact şi în special pentru cutiile de rezistenţe de precizie şi de capacităţi, etc., se va avea grije ca fişele să fie bine curăţate, neoxidate şi bine presate (fără exagerare) în locaşurile respective.

— In cazul contorilor de energie electrică, se va da o deosebită atenţie legării lor corecte în circuit, în special când sunt montaţi pe transformatori de măsură.

— Aparatele de măsurat se vor feri de influenţa câmpurilor magnetice şi electrice exterioare având grije ca ele să nu fie aşezate în apropiere de maşini, transformatori sau conductori electrici prin care circulă curenţi mari.

Tabele şi formule matematice

Tabela 1. Valori numerice uzuale

Mărimi	n	lg n	Mărimi	n	lg n
π	3,14159	0,49715	e	2,71828	0,43429
2π	6,28319	0,79818	e^2	7,38906	0,86859
3π	9,42478	0,97427	$\sqrt{e}$	1,64872	0,21715
4π	12,56637	1,09921	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
6π	18,84956	1,27530	$1:e$	0,36788	$\bar{1}$,56571
$4\pi:3$	4,18879	0,62209	$1:e^2$	0,13533	$\bar{1}$,13141
$\pi:2$	1,57080	0,19612	$\sqrt{1:e}$	0,60653	$\bar{1}$,78285
$\pi:3$	1,04720	0,02003	$\sqrt[3]{1:e}$	0,71653	$\bar{1}$,85524
$\pi:4$	0,78540	$\bar{1}$,89509	lg e	0,43429	$\bar{1}$,63778
$\pi:6$	0,52360	$\bar{1}$,71900	ln 10	2,30258	0,36222
$\pi:180$	0,01745	$\bar{2}$,24188	ln π	1,14473	0,05870
$2:\pi$	0,63662	$\bar{1}$,80388	g	9,81	0,99167
$180:\pi$	57,29578	1,75812	g^2	96,2361	1,98334
$10800:\pi$	3437,747	3,53627	$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583
$648000:\pi$	206264,81	5,31443	$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635
$1:\pi$	0,31831	$\bar{1}$,50825	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
$1:2\pi$	0,15916	$\bar{1}$,20182	$1:2g$	0,05097	$\bar{2}$,70730
$1:3\pi$	0,10610	$\bar{1}$,02573	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$1:4\pi$	0,07958	$\bar{2}$,90079	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350
π^2	9,86960	0,99430	2 !	2	
$2\pi^2$	19,73921	1,29533	3 !	6	
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	4 !	24	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	5 !	120	
$1:\pi^2$	0,10132	$\bar{1}$,00570	6 !	720	
$1:\sqrt{\pi}$	0,56419	$\bar{1}$,75143	7 !	5010	
$\sqrt{2\pi}$	2,50663	0,39909	8 !	40320	
$\sqrt{\pi:2}$	1,25331	0,09806	9 !	362880	
$\sqrt{2:\pi}$	0,79788	$\bar{1}$,90194	10 !	3628800	
			11 !	39916800	
			12 !	479001000	

Tabela 2. Pătratele, cuburile, rădăcinile — patrată şi cubică — lg n, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, $\frac{1}{n}$ ale primelor 1000 numere

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1,000	1,000	0,000	3,142	0,785	1,000
2	4	8	1,414	1,260	0,301	6,283	3,142	0,500
3	9	27	1,732	1,442	0,477	9,425	7,068	0,333
4	16	64	2,000	1,587	0,602	12,57	12,57	0,250
5	25	125	2,236	1,710	0,699	15,71	19,63	0,200
6	36	216	2,449	1,817	0,778	18,85	28,27	0,167
7	49	343	2,646	1,913	0,845	21,99	38,48	0,143
8	64	512	2,828	2,000	0,903	25,13	50,27	0,125
9	81	729	3,000	2,080	0,954	28,27	63,62	0,111
10	100	1000	3,162	2,154	1,000	31,42	78,54	0,100

Tabela 2 *(continuare)*

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$	$\frac{1}{n}$
11	121	1331	3,317	2,224	1,041	34,56	95,03	0,091
12	144	1728	3,464	2,289	1,079	37,70	113,1	0,083
13	169	2197	3,606	2,351	1,114	40,84	132,7	0,077
14	196	2744	3,742	2,410	1,146	43,98	153,9	0,071
15	225	3375	3,873	2,466	1,176	47,12	176,7	0,067
16	256	4096	4,000	2,520	1,204	50,27	201,1	0,062
17	289	4913	4,123	2,571	1,230	53,41	227,0	0,059
18	324	5832	4,243	2,668	1,255	56,55	254,5	0,056
19	361	6859	4,359	2,669	1,279	59,69	283,5	0,053
20	400	8000	4,472	2,714	1,301	62,83	314,2	0,050
21	441	9261	4,583	2,759	1,322	65,97	346,4	0,048
22	484	10648	4,690	2,802	1,342	69,12	380,1	0,045
23	529	12167	4,796	2,844	1,362	72,26	415,5	0,043
24	576	13824	4,899	2,884	1,380	75,40	452,4	0,042
25	625	15625	5,000	2,924	1,398	78,54	490,9	0,040
26	676	17576	5,099	2,962	1,415	81,68	530,9	0,038
27	729	19683	5,196	3,000	1,431	84,82	572,6	0,037
28	784	21952	5,292	3,037	1,447	87,97	615,8	0,036
29	841	24389	5,385	3,072	1,462	91,11	660,5	0,034
30	900	27000	5,477	3,107	1,477	94,25	706,9	0,033
31	961	29791	5,568	3,141	1,491	97,39	754,8	0,032
32	1024	32768	5,657	3,175	1,505	100,5	804,2	0,031
33	1089	35937	5,745	3,208	1,519	103,7	855,3	0,030
34	1156	39304	5,831	3,240	1,531	106,8	907,9	0,029
35	1225	42875	5,916	3,271	1,544	110,0	962,1	0,029
36	1296	46656	6,000	3,302	1,556	113,1	1018	0,028
37	1369	50653	6,083	3,332	1,568	116,2	1075	0,027
38	1444	54872	6,164	3,362	1,580	119,4	1134	0,026
39	1521	59319	6,245	3,391	1,591	122,5	1195	0,026
40	1600	64000	6,325	3,420	1,602	125,7	1257	0,025
41	1681	68921	6,403	3,448	1,613	128,8	1320	0,024
42	1764	74088	6,481	3,476	1,623	131,9	1385	0,024
43	1849	79507	6,557	3,503	1,633	135,1	1452	0,023
44	1936	85184	6,633	3,530	1,643	138,2	1521	0,023
45	2025	91125	6,708	3,557	1,653	141,4	1590	0,022
46	2116	97336	6,782	3,533	1,663	144,5	1662	0,022
47	2209	103823	6,856	3,609	1,672	147,7	1735	0,021
48	2304	110592	6,928	3,634	1,681	150,8	1810	0,021
49	2401	117649	7,000	3,659	1,690	153,9	1886	0,020
50	2500	125000	7,071	3,684	1,699	157,1	1963	0,020
51	2601	132651	7,141	3,708	1,708	160,2	2043	0,020
52	2704	140608	7,211	3,733	1,716	163,4	2124	0,019
53	2809	148877	7,280	3,756	1,724	166,5	2206	0,019
54	2916	157464	7,348	3,780	1,732	169,7	2290	0,019
55	3025	166375	7,416	3,803	1,740	172,8	2376	0,018
56	3136	175616	7,483	3,826	1,748	175,9	2463	0,018
57	3249	185193	7,550	3,849	1,756	179,1	2552	0,018
58	3364	195112	7,616	3,871	1,763	182,2	2642	0,017
59	3481	205379	7,681	3,893	1,771	185,4	2734	0,017
60	3600	216000	7,746	3,915	1,778	188,5	2827	0,017
61	3721	226981	7,810	3,936	1,785	191,6	2922	0,0164
62	3844	238328	7,874	3,958	1,792	194,8	3019	0.0161
63	3969	250047	7,937	3,979	1,799	197,9	3117	0,0159
64	4096	262144	8,000	4,000	1,806	201,1	3217	0,0156
65	4225	274625	8,062	4,021	1,813	204,2	3318	0,0154
66	4356	287496	8,124	4,041	1,820	207,4	3421	0,0152
67	4489	300763	8,185	4,062	1,826	210,5	3526	0,0149
68	4624	314432	8,246	4,082	1,833	213,6	3632	0,0147
69	4761	328509	8,307	4,102	1,839	216.8	3739	0,0145
70	4900	343000	8,367	4,121	1,845	219,9	3848	0,0143

Tabela 2 *(continuare)*

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$	$\frac{1}{n}$
71	5041	357911	8,426	4,141	1,851	223,1	3959	0,0141
72	5184	373248	8,485	4,160	1,857	226,2	4072	0,0139
73	5329	389017	8,544	4,179	1,863	229,3	4185	0,0137
74	5476	405224	8,602	4,198	1,869	232,5	4301	0,0135
75	5625	421875	8,660	4,217	1,875	235,6	4418	0,0133
76	5776	438976	8,718	4,236	1,881	238,8	4536	0,0132
77	5929	456533	8,775	4,254	1,886	241,9	4657	0,0130
78	6084	474552	8,832	4,273	1,892	245,0	4778	0,0128
79	6241	493039	8,888	4,291	1,898	248,2	4902	0,0127
80	6400	512000	8,944	4,309	1,903	251,3	5027	0,0125
81	6561	531441	9,000	4,327	1,908	254,5	5153	0,0123
82	6724	551368	9,055	4,344	1,914	257,6	5281	0,0122
83	6889	571787	9,110	4,362	1,919	260,8	5411	0,0120
84	7056	592704	9,165	4,380	1,924	263,9	5542	0,0119
85	7225	614125	9,220	4,397	1,929	267,0	5675	0,0118
86	7396	636056	9,274	4,414	1,940	270,2	5809	0,0116
87	7569	658503	9,327	4,431	1,939	273,3	5945	0,0115
88	7744	681472	9,381	4,448	1,944	276,5	6082	0,0114
89	7921	704969	9,434	4,465	1,949	279,6	6221	0,0112
90	8100	729000	9,487	4,481	1,954	282,7	6362	0,0111
91	8281	753571	9,539	4,498	1,959	285,9	6504	0,0110
92	8464	778688	9,592	4,514	1,964	289,0	6648	0,0109
93	8649	804357	9,644	4,531	1,968	292,2	6793	0,0108
94	8836	830584	9,695	4,547	1,973	295,3	6940	0,0106
95	9025	857375	9,747	4,563	1,978	298,5	7088	0,0105
96	9216	884736	9,798	4,579	1,982	301,6	7238	0,0104
97	9409	912673	9,849	4,595	1,987	304,7	7390	0,0103
98	9604	941192	9,899	4,610	1,991	307,9	7543	0,0102
99	9801	970299	9,950	4,626	1,996	311,0	7698	0,0101
100	10000	1000000	10,00	4,642	2,000	314,2	7854	0,0100
101	10201	1030301	10,05	4,657	2,004	317,3	8012	0,0099
102	10404	1061208	10,10	4,672	2,009	320,4	8171	0,0098
103	10609	1092727	10,15	4,688	2,013	323,6	8332	0,0097
104	10816	1124864	10,20	4,703	2,017	326,7	8495	0,0096
105	11025	1157625	10,25	4,718	2,021	329,9	8659	0,0095
106	11236	1191016	10,30	4,733	2,025	333,0	8825	0,0094
107	11449	1225043	10,34	4,747	2,029	366,2	8992	0,0093
108	11664	1259712	10,39	4,762	2,033	339,3	9161	0,0093
109	11881	1295020	10,44	4,777	2,037	342,4	9331	0,0092
110	12100	1331000	10,49	4,791	2,041	345,6	9503	0,0091
111	12321	1367631	10,54	4,806	2,045	348,7	9677	0,0090
112	12544	1404928	10,58	4,820	2,049	351,9	9852	0,0089
113	12769	1442897	10,63	4,835	2,053	355,0	10029	0,0088
114	12996	1481544	10,68	4,849	2,057	358,1	10207	0,0088
115	13225	1520875	10,72	4,863	2,061	361,3	10387	0,0087
116	13456	1560896	10,77	4,877	2,064	364,4	10568	0,0086
117	13689	1601613	10,82	4,891	2,068	367,6	10751	0,0085
118	13924	1643032	10,86	4,905	2,072	370,7	10936	0,0085
119	14161	1685159	10,91	4,919	2,076	373,8	11122	0,0084
120	14400	1728000	10,95	4,932	2,079	377,0	11310	0,0083
121	14641	1771561	11,00	4,946	2,083	380,1	11499	0,0083
122	14884	1815848	11,05	4,960	2,086	383,8	11690	0,0082
123	15129	1860867	11,09	4,973	2,090	386,4	11822	0,0081
124	15376	1906624	11,14	4,987	2,093	389,6	12076	0,0081
125	15625	1953125	11,18	5,000	2,097	392,7	12271	0,0080
126	15876	2000376	11,22	5,013	2,100	395,8	12469	0,0079
127	16129	2048383	11,27	5,027	2,104	399,0	12667	0,0079
128	16384	2097152	11,31	5,040	2,107	402,1	12868	0,0078
129	16641	2146689	11,36	5,053	2,111	405,3	13080	0,0078
130	16900	2197000	11,40	5,066	2,114	408,4	13273	0,0077

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{1000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$
131	1716	2248	11,45	5,079	2,117	411,5	1348	0,0076
132	1742	2300	11,49	5,092	2,121	414,7	1368	0,0076
133	1769	2353	11,53	5,104	2,124	417,8	1389	0,0075
134	1796	2406	11,58	5,117	2,127	421,0	1410	0,0075
135	1822	2460	11,62	5,130	2,130	424,1	1431	0,0074
136	1850	2515	11,66	5,143	2,134	427,3	1453	0,0074
137	1877	2571	11,70	5,155	2,137	430,4	1474	0,0073
138	1904	2628	11,75	5,168	2,140	433,5	1496	0,0072
139	1932	2686	11,79	5,180	2,143	436,7	1517	0,0072
140	1960	2744	11,83	5,192	2,146	439,8	1539	0,0071
141	1988	2803	11,87	5,205	2,149	443,0	1561	0,0071
142	2016	2863	11,92	5,217	2,152	446,1	1584	0,0070
143	2045	2924	11,96	5,229	2,155	449,2	1606	0,0070
144	2074	2986	12,00	5,241	2,158	452,4	1629	0,0069
145	2102	3049	12,04	5,254	2,161	455,5	1651	0,0069
146	2132	3112	12,08	5,266	2,164	458,7	1674	0,0068
147	2161	3177	12,12	5,278	2,167	461,8	1697	0,0068
148	2190	3242	12,17	5,290	2,170	465,0	1720	0,0068
149	2220	3308	12,21	5,301	2,173	468,1	1744	0,0067
150	2250	3375	12,25	5,313	2,176	471,2	1767	0,0067
151	2280	3443	12,29	5,325	2,179	474,4	1791	0,0066
152	2310	3512	12,33	5,337	2,182	477,5	1815	0,0066
153	2341	3582	12,37	5,348	2,185	480,7	1839	0,0065
154	2372	3652	12,41	5,360	2,188	483,8	1863	0,0065
155	2402	3724	12,45	5,372	2,190	486,9	1887	0,0065
156	2434	3796	12,49	5,383	2,193	490,1	1911	0,0064
157	2465	3870	12,53	5,395	2,196	493,2	1936	0,0064
158	2496	3944	12,57	5,406	2,199	496,4	1961	0,0063
159	2528	4020	12,61	5,418	2,201	499,5	1986	0,0063
160	2560	4096	12,65	5,429	2,204	502,7	2011	0,0062
161	2592	4173	12,69	5,440	2,207	505,8	2036	0,0062
162	2624	4252	12,73	5,451	2,210	508.9	2061	0,0062
163	2657	4331	12,77	5,463	2,212	512,1	2087	0,0061
164	2690	4411	12,81	5,474	2,215	515,2	2112	0,0061
165	2722	4492	12,85	5,485	2,217	518,4	2138	0,0061
166	2756	4574	12,88	5,496	2,220	521,5	2164	0,0060
167	2789	4657	12,92	5,507	2,223	524,6	2190	0,0060
168	2822	4742	12,96	5,518	2,225	527,8	2217	0,0060
169	2856	4827	13,00	5,529	2,228	530,9	2243	0,0059
170	2890	4913	13,04	5,540	2,230	534,1	2270	0,0059
171	2924	5000	13,08	5.550	2,233	537,2	2297	0,0058
172	2958	5088	13,11	5,561	2,236	540,4	2324	0,0058
173	2993	5178	13,15	5,572	2.238	543,5	2351	0,0058
174	3028	5268	13,19	5,583	2,241	546,6	2378	0,0057
175	3062	5359	13,23	5,593	2,243	549,8	2405	0,0057
176	3098	5452	13,27	5,604	2,246	552,9	2433	0,0057
177	3133	5545	13,30	5,615	2,248	556,1	2461	0,0056
178	3168	5640	13,34	5,625	2,250	559,2	2488	0,0056
179	3204	5735	13,38	5,636	2,253	562,3	2516	0,0056
180	3240	5832	13,42	5,646	2,255	565,5	2545	0,0056
181	3276	5930	13,45	5,657	2,258	568,6	2573	0,0055
182	3312	6029	13,49	5,667	2,260	571,8	2602	0,0055
183	3349	6128	13,53	5,677	2,262	574,9	2630	0,0055
184	3386	6230	13,56	5,688	2,265	578,1	2659	0,0054
185	3422	6332	13,60	5,698	2,267	581,2	2688	0,0054
186	3460	6435	13,64	5,708	2,270	584,3	2717	0,0054
187	3497	6539	13,67	5,718	2,272	587,5	2746	0,0053
188	3534	6645	13,71	5,729	2,274	590,6	2776	0,0053
189	3572	6751	13,75	5,739	2,276	593,8	2806	0,0053
190	3610	6859	13,78	5,749	2,279	596,9	2835	0,0053

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{1000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$
191	3648	6968	13,82	5,759	2,281	600,0	2865	0,0052
192	3686	7078	13,86	5,769	2,283	603,2	2895	0,0052
193	3725	7189	13,89	5,779	2,286	606,3	2926	0,0052
194	3764	7301	13,93	5,789	2,288	609,5	2956	0,0052
195	3802	7415	13,96	5,799	2,290	612,6	2986	0,0051
196	3842	7530	14,00	5,809	2,292	615,8	3017	0,0051
197	3881	7645	14,04	5,819	2,294	618,9	3048	0,0051
198	3920	7762	14,07	5,828	2,297	622,0	3079	0,0051
199	3960	7881	14,11	5,838	2,299	625,2	3110	0,0050
200	4000	8000	14,14	5,848	2,301	628,3	3142	0,0050
201	4040	8121	14,18	5,858	2,303	631,5	3173	0,0050
202	4080	8242	14,21	5,867	2,305	634,6	3205	0,0050
203	4121	8365	14,25	5,877	2,307	637,7	3237	0,0049
204	4162	8490	14,28	5,887	2,310	640,9	3269	0,0049
205	4202	8615	14,32	5,896	2,312	644,0	3301	0,0049
206	4244	8742	14,35	5,906	2,314	647,2	3333	0,0049
207	4285	8870	14,39	5,916	2,316	650,3	3365	0,0048
208	4326	8999	14,42	5,925	2,318	653,5	3398	0,0048
209	4368	9129	14,46	5,934	2,320	656,6	3431	0,0048
210	4410	9261	14,49	5,944	2,322	659,7	3464	0,0048
211	4452	9394	14,53	5,953	2,324	662,9	3497	0,0048
212	4494	9528	14,56	5,963	2,326	666,0	3530	0,0047
213	4537	9664	14,59	5,972	2,328	669,2	3563	0,0047
214	4580	9800	14,63	5,981	2,330	672,3	3597	0,0047
215	4622	9938	14,66	5,991	2,332	675,4	3631	0,0047
216	4666	10078	14,70	6,000	2,334	678,6	3664	0,0046
217	4709	10218	14,73	6,009	2,336	681,7	3698	0,0046
218	4752	10360	14,76	6,018	2,338	684,9	3733	0,0046
219	4796	10503	14,80	6,028	2,340	688,0	3767	0,0046
220	4840	10648	14,83	6,037	2,342	691,2	3801	0,0045
221	4884	10794	14,87	6,046	2,344	694,3	3836	0,0045
222	4928	10941	14,90	6,055	2,346	697,4	3871	0,0045
223	4973	11090	14,93	6,064	2,348	700,6	3906	0,0045
224	5018	11239	14,97	6,073	2,350	703,7	3941	0,0045
225	5062	11391	15,00	6,082	2,352	706,9	3976	0,0044
226	5108	11543	15,03	6,091	2,354	710,0	4011	0,0044
227	5153	11797	15,07	6,100	2,356	713,1	4047	0,0044
228	5198	11852	15,10	6,109	2,358	716,3	4083	0,0044
229	5244	12009	15,13	6,118	2,360	719,4	4119	0,0044
230	5290	12167	15,17	6,127	2,362	722,6	4155	0,0043
231	5336	12326	15,20	6,136	2,364	725,7	4191	0,0043
232	5382	12487	15,23	6,145	2,365	728,8	4227	0,0043
233	5429	12649	15,26	6,153	2,367	732,0	4264	0,0043
234	5476	12813	15,30	6,162	2,369	735,1	4301	0,0043
235	5522	12978	15,33	6,171	2,371	738,3	4337	0,0043
236	5570	13144	15,36	6,180	2,373	741,4	4374	0,0042
237	5617	13312	15,39	6,188	2,375	744,6	4412	0,0042
238	5664	13481	15,43	6,197	2,377	747,7	4449	0,0042
239	5712	13652	15,46	6,206	2,378	750,8	4486	0,0042
240	5760	13824	15,49	6,214	2,380	754,0	4524	0,0042
241	5808	14098	15,52	6,223	2,382	757,1	4562	0,0041
242	5856	14172	15,56	6,232	2,384	760,3	4600	0,0041
243	5905	14349	15,59	6,240	2,386	763,4	4638	0,0041
244	5954	14527	15,62	6,249	2,387	766,5	4676	0,0041
245	6002	14706	15,65	6,257	2,389	769,7	4714	0,0041
246	6052	14886	15,68	6,266	2,391	772,8	4753	0,0041
247	6101	15069	15,72	6,274	2,393	776,0	4792	0,0040
248	6150	15253	15,75	6,283	2,394	779,1	4831	0,0040
249	6200	15438	15,78	6,291	2,396	782,3	4870	0,0040
250	6250	15625	15,81	6,300	2,398	785,4	4909	0,0040

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$
251	6300	1581	15,84	6,308	2,400	788,5	4948	0,0040
252	6350	1600	15,87	6,316	2,401	791,7	4988	0,0040
253	6401	1619	15,91	6,325	2,403	794,8	5027	0,0040
254	6452	1639	15,94	6,333	2,405	798,0	5067	0,0039
255	6502	1658	15,97	6,341	2,407	801,1	5107	0,0039
256	6554	1678	16,00	6,350	2,408	804,2	5147	0,0039
257	6605	1697	16,03	6,358	2,410	807,4	5187	0,0039
258	6656	1717	16,06	6,366	2,412	810,5	5228	0,0039
259	6708	1737	16,09	6,374	2,413	813,7	5269	0,0039
260	6760	1758	16,12	6,383	2,415	816,8	5309	0,0038
261	6812	1778	16,16	6,391	2,417	820,0	5350	0,0038
262	6864	1798	16,19	6,399	2,418	823,1	5391	0,0038
263	6917	1819	16,22	6,407	2,420	826,2	5433	0,0038
264	6970	1840	16,25	6,415	2,422	829,4	5474	0,0038
265	7022	1861	16,28	6,423	2,423	832,5	5515	0,0038
266	7076	1882	16,31	6,431	2,425	835,7	5557	0,0038
267	7129	1903	16,34	6,439	2,427	838,8	5599	0,0037
268	7182	1925	16,37	6,447	2,428	841,9	5641	0,0037
269	7236	1947	16,40	6,455	2,430	845,1	5683	0,0037
270	7290	1968	16,43	6,463	2,431	848,2	5726	0,0037
271	7344	1990	16,46	6,471	2,433	851,4	5768	0,0037
272	7398	2012	16,49	6,479	2,435	854,5	5811	0,0037
273	7453	2035	16,52	6,487	2,436	857,7	5853	0,0037
274	7508	2057	16,55	6,495	2,438	860,8	5896	0,0036
275	7562	2080	16,58	6,503	2,439	863,9	5940	0,0036
276	7618	2102	16,61	6,511	2,441	867,1	5983	0,0036
277	7673	2125	16,64	6,519	2,442	870,2	6026	0,0036
278	7728	2148	16,67	6,527	2,444	873,4	6070	0,0036
279	7784	2172	16,70	6,534	2,446	876,5	6114	0,0036
280	7840	2195	16,73	6,542	2,447	879,6	6158	0,0036
281	7896	2219	16,76	6,550	2,449	882,8	6202	0,0036
282	7952	2243	16,79	6,558	2,450	885,9	6246	0,0035
283	8009	2267	16,82	6,565	2,452	889,1	6290	0,0035
284	8066	2291	16,85	6,573	2,453	892,2	6335	0,0035
285	8122	2315	16,88	6,581	2,455	895,4	6379	0,0035
286	8180	2339	16,91	6,589	2,456	898,5	6424	0,0035
287	8237	2364	16,94	6,596	2,458	901,6	6469	0,0035
288	8294	2389	16,97	6,604	2,459	904,8	6514	0,0035
289	8352	2414	17,00	6,611	2,461	907,9	6560	0,0035
290	8410	2439	17,03	6,619	2,462	911,1	6605	0,0034
291	8468	2464	17,06	6,627	2,464	914,2	6651	0,0034
292	8526	2490	17,09	6,634	2,465	917,3	6697	0,0034
293	8585	2515	17,12	6,642	2,467	920,5	6743	0,0034
294	8644	2541	17,15	6,649	2,468	923,6	6789	0,0034
295	8702	2567	17,18	6,657	2,470	926,8	6835	0,0034
296	8762	2593	17,20	6,664	2,471	929,9	6881	0,0034
297	8821	2620	17,23	6,672	2,473	933,1	6928	0,0034
298	8880	2646	17,26	6,679	2,474	936,2	6975	0,0034
299	8940	2673	17,29	6,687	2,476	939,3	7022	0,0033
300	9000	2700	17,32	6,694	2,477	942,5	7069	0,0033
301	9060	2727	17,35	6,702	2,479	945,6	7116	0,00332
302	9120	2754	17,38	6,709	2,480	949,8	7163	0,00331
303	9181	2782	17,41	6,717	2,481	951,9	7211	0,00330
304	9242	2809	17,44	6,724	2,483	955,0	7258	0,00329
305	9302	2837	17,46	6,731	2,484	958,2	7306	0,00328
306	9364	2865	17,49	7,739	2,486	961,3	7354	0,00327
307	9425	2893	17,52	6,746	2,487	964,5	7402	0,00326
308	9486	2922	17,55	6,753	2,489	967,6	7451	0,00325
309	9548	2950	17,58	6,761	2,490	970,8	7499	0,00324
310	9610	2979	17,61	6,768	2,491	973,9	7548	0,00323

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$
311	9672	3008	17,64	6,775	2,493	977,0	7596	0,00322
312	9734	3037	17,66	6,782	2,494	980,2	7645	0,00321
313	9797	3066	17,69	6,790	2,496	983,3	7694	0,00319
314	9860	3096	17,72	6,797	2,497	986,5	7744	0,00318
315	9922	3126	17,75	6,804	2,498	989,6	7793	0,00317
316	9986	3155	17,78	6,811	2,500	992,7	7843	0,00316
317	10049	3186	17,80	6,818	2,501	995,9	7892	0,00315
318	10112	3216	17,83	6,826	2,502	999,0	7942	0,00314
319	10176	3246	17,86	6,833	2,504	1002	7992	0,00313
320	10240	3277	17,89	6,840	2,505	1005	8042	0,00312
321	10304	3308	17,92	6,847	2,507	1008	8093	0,00312
322	10368	3339	17,94	6,854	2,508	1012	8143	0,00311
323	10433	3370	17,97	6,861	2,509	1015	8194	0,00310
324	10498	3401	18,00	6,868	2,511	1018	8245	0,00309
325	10562	3433	18,03	6,875	2,512	1021	8296	0,00308
326	10628	3465	18,06	6,882	2,513	1024	8347	0,00307
327	10693	3497	18,08	6,889	2,515	1027	8398	0,00306
328	10758	3529	18,11	6,896	2,516	1030	8450	0,00305
329	10824	3561	18,14	6,903	2,517	1034	8501	0,00304
330	10890	3594	18,17	6,910	2,519	1037	8553	0,00303
331	10956	3626	18,19	6,917	2,520	1040	8605	0,00302
332	11022	3659	18,22	6,924	2,521	1043	8657	0,00301
333	11089	3693	18,25	6,931	2,522	1046	8709	0,00300
334	11156	3726	18,28	6,938	2,524	1049	8762	0,00299
335	11223	3760	18,30	6,945	2,525	1052	8814	0,00299
336	11290	3793	18,33	6,952	2,526	1056	8867	0,00298
337	11357	3827	18,36	6,959	2,528	1059	8920	0,00297
338	11424	3861	18,38	6,966	2,529	1062	8973	0,00296
339	11492	3896	18,41	6,973	2,530	1065	9026	0,00295
340	11560	3930	18,44	6,980	2,531	1068	9079	0,00294
341	11628	3965	18,47	6,986	2,533	1071	9133	0,00293
342	11796	4000	18,49	6,993	2,534	1074	9186	0,00292
343	11765	4035	18,52	7,000	2,535	1078	9240	0,00292
344	11834	4071	18,55	7,007	2,537	1081	9294	0,00291
345	11903	4106	18,57	7,014	2,538	1084	9348	0,00290
346	11972	4142	18,60	7,020	2,539	1087	9402	0,00289
347	12041	4178	18,63	7,027	2,540	1090	9457	0,00288
348	12110	4214	18,65	7,034	2,542	1093	9511	0,00287
349	12180	4251	18,68	7,041	2,543	1096	9566	0,00287
350	12250	4287	18,71	7,047	2,544	1100	9621	0,00286
351	12320	4324	18,73	7,054	2,545	1103	9676	0,00285
352	12390	4361	18,76	7,061	2,547	1106	9731	0,00284
353	12461	4399	18,79	7,067	2,548	1109	9787	0,00283
354	12532	4436	18,81	7,074	2,549	1112	9842	0,00282
355	12603	4474	18,84	7,081	2,550	1115	9898	0,00282
356	12674	4512	18,87	7,087	2,551	1118	9954	0,00281
357	12745	4550	18,89	7,094	2,553	1122	10010	0,00280
358	12816	4588	18,92	7,101	2,554	1125	10066	0,00279
359	12888	4627	18,95	7,107	2,556	1128	10122	0,00279
360	12960	4666	18,97	7,114	2,556	1131	10179	0,00278
361	13032	4706	19,00	7,120	2,558	1134	10235	0,00277
362	13104	4744	19,03	7,127	2,559	1137	10292	0,00276
363	13177	4783	19,05	7,133	2,560	1140	10349	0,00275
364	13250	4823	19,08	7,140	2,561	1144	10406	0,00275
365	13323	4863	19,10	7,147	2,562	1147	10464	0,00274
366	13496	4903	19,13	7,153	2,563	1150	10521	0,00273
367	13469	4943	19,16	7,160	2,565	1153	10578	0,00272
368	13542	4984	19,18	7,166	2,566	1156	10636	0,00272
369	13616	5024	19,21	7,173	2,567	1159	10694	0,00271
370	13690	5065	19,24	7,179	2,568	1162	10752	0,00270

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
371	1376	5106	19,26	7,186	2,569	1166	1081	0,00270
372	1384	5148	19,29	7,192	2,571	1169	1087	0,00269
373	1391	5190	19,31	7,198	2,572	1172	1093	0,00268
374	1399	5231	19,34	7,205	2,573	1175	1099	0,00267
375	1406	5273	19,36	7,211	2,574	1178	1104	0,00267
376	1414	5316	19,39	7,218	2,575	1181	1110	0,00266
377	1421	5358	19,42	7,224	2,576	1184	1116	0,00265
378	1429	5401	19,44	7,230	2,577	1188	1122	0,00265
379	1436	5444	19,47	7,237	2,579	1191	1128	0,00264
380	1444	5487	19,49	7,243	2,580	1194	1134	0,00263
381	1452	5531	19,52	7,250	2,581	1197	1140	0,00262
382	1459	5574	19,54	7,256	2,582	1200	1146	0,00262
383	1467	5618	19,57	7,262	2,583	1203	1152	0,00261
384	1475	5662	19,60	7,268	2,584	1206	1158	0,00260
385	1482	5707	19,62	7,275	2,585	1210	1164	0,00260
386	1490	5751	19,65	7,281	2,587	1213	1170	0,00259
387	1498	5796	19,67	7,287	2,588	1216	1176	0,00258
388	1505	5841	19,70	7,294	2,589	1219	1182	0,00258
389	1513	5886	19,72	7,300	2,590	1222	1188	0,00257
390	1521	5932	19,75	7,306	2,591	1225	1195	0,00256
391	1529	5978	19,77	7,312	2,592	1228	1201	0,00256
392	1537	6024	19,80	7,319	2,593	1232	1207	0,00255
393	1544	6070	19,82	7,325	2,594	1235	1213	0,00254
394	1552	6116	19,85	7,331	2,595	1238	1219	0,00254
395	1560	6163	19,87	7,337	2,597	1241	1225	0,00253
396	1568	6210	19,90	7,343	2,598	1244	1232	0,00253
397	1576	6257	19,92	7,350	2,599	1247	1238	0,00252
398	1584	6304	19,95	7,356	2,600	1250	1244	0,00251
399	1592	6352	19,97	7,362	2,601	1253	1250	0,00251
400	1600	6400	20,00	7,368	2,602	1257	1257	0,00250
401	1608	6448	20,02	7,374	2,603	1260	1263	0,00249
402	1616	6496	20,05	7,380	2,604	1263	1269	0,00249
403	1624	6545	20,07	7,386	2,605	1266	1276	0,00248
404	1632	6594	20,10	7,393	2,606	1269	1282	0,00248
405	1640	6643	20,12	7,399	2,607	1272	1288	0,00247
406	1648	6692	20,15	7,405	2,609	1275	1295	0,00246
407	1656	6742	20,17	7,411	2,610	1279	1301	0,00246
408	1665	6792	20,20	7,417	2,611	1282	1307	0,00245
409	1673	6842	20,22	7,423	2,612	1285	1314	0,00244
410	1681	6892	20,25	7,429	2,613	1288	1320	0,00244
411	1689	6943	20,27	7,435	2,614	1291	1327	0,00243
412	1697	6993	20,30	7,441	2,615	1294	1333	0,00243
413	1706	7044	20,32	7,447	2,616	1297	1340	0,00242
414	1714	7096	20,35	7,453	2,617	1301	1346	0,00242
415	1722	7147	20,37	7,459	2,618	1304	1353	0,00241
416	1731	7199	20,40	7,465	2,619	1307	1359	0,00240
417	1739	7251	20,42	7,471	2,620	1310	1366	0,00240
418	1747	7303	20,45	7,477	2,621	1313	1372	0,00239
419	1756	7356	20,47	7,483	2,622	1316	1379	0,00239
420	1764	7409	20,49	7,489	2,623	1319	1385	0,00238
421	1772	7462	20,52	7,495	2,624	1323	1392	0,00238
422	1781	7515	20,54	7,501	2,625	1326	1399	0,00237
423	1789	7569	20,57	7,507	2,626	1329	1405	0,00236
424	1798	7623	20,59	7,513	2,627	1332	1412	0,00236
425	1806	7677	20,62	7,518	2,628	1335	1419	0,00235
426	1815	7731	20,64	7,524	2,629	1338	1425	0,00235
427	1823	7785	20,66	7,530	2,630	1341	1432	0,00234
428	1832	7840	20,69	7,536	2,631	1345	1439	0,00234
429	1840	7895	20,71	7,542	2,632	1348	1445	0,00233
430	1849	7951	20,74	7,548	2,633	1351	1452	0,00233

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
431	1858	8006	20,76	7,554	2,634	1354	1459	0,00232
432	1866	8062	20,78	7,560	2,635	1357	1466	0,00231
433	1875	8118	20,81	7,565	2,636	1360	1473	0,00231
434	1884	8175	20,83	7,571	2,637	1363	1479	0,00230
435	1892	8231	20,86	7,577	2,638	1367	1486	0,00230
436	1901	8288	20,88	7,583	2,639	1370	1493	0,00229
437	1910	8345	20,90	7,589	2,640	1373	1500	0,00229
438	1918	8403	20,93	7,594	2,641	1376	1507	0,00228
439	1927	8460	20,95	7,600	2,642	1379	1514	0,00228
440	1936	8518	20,98	7,606	2,643	1382	1521	0,00227
441	1945	8577	21,00	7,612	2,644	1385	1527	0,00227
442	1954	8635	21.02	7,617	2,645	1389	1534	0,00226
443	1962	8694	21,05	7,623	2,646	1392	1541	0,00226
444	1971	8753	21,07	7,629	2,647	1395	1548	0,00225
445	1980	8812	21,10	7,635	2,648	1398	1555	0,00225
446	1989	8872	21,12	7,640	2,649	1401	1562	0,00224
447	1998	8931	21,14	7,646	2,650	1404	1569	0,00224
448	2007	8992	21,17	7,652	2,651	1407	1576	0,00223
449	2016	9052	21,19	7,657	2,652	1411	1583	0,00223
450	2025	9112	21,21	7,663	2,653	1414	1590	0,00222
451	2034	9173	21,24	7,669	2,654	1417	1598	0,00222
452	2043	9235	21,26	7,674	2,655	1420	1605	0,00221
453	2052	9296	21,28	7,680	2,656	1423	1612	0,00221
454	2061	9358	21,31	7,686	2,657	1426	1619	0,00220
455	2070	9420	21,33	7,691	2,658	1429	1626	0,00220
456	2079	9482	21,35	7,697	2,659	1433	1633	0,00219
457	2088	9544	21,38	7,703	2,660	1436	1640	0,00219
458	2098	9607	21,40	7,708	2,661	1439	1647	0,00218
459	2107	9670	21,42	7,714	2,662	1442	1655	0,00218
460	2116	9734	21,45	7,719	2,663	1445	1662	0,00217
461	2125	9797	21,47	7,725	2,664	1448	1669	0,00217
462	2134	9861	21,49	7,731	2,665	1451	1676	0,00216
463	2144	9925	21,52	7,736	2,666	1455	1684	0,00216
464	2153	9990	21,54	7,742	2,667	1458	1691	0,00216
465	2162	10054	21,56	7,747	2,667	1461	1698	0,00215
466	2172	10119	21,59	7,753	2,668	1464	1706	0,00215
467	2181	10185	21,61	7,758	2,669	1467	1713	0,00214
468	2190	10250	21,63	7,764	2,670	1470	1720	0,00214
469	2200	10316	21,66	7,769	2,671	1473	1728	0,00213
470	2209	10382	21,68	7,775	2,672	1477	1735	0,00213
471	2218	10449	21,70	7,780	2,673	1480	1742	0,00212
472	2228	10515	21,73	7,786	2,674	1483	1750	0,00212
473	2237	10582	21,75	7,791	2,675	1486	1757	0,00211
474	2247	10650	21,77	7,797	2,676	1489	1765	0,00211
475	2256	10717	21,79	7,802	2,677	1492	1772	0,00211
476	2266	10785	21,82	7,808	2,678	1495	1780	0,00210
477	2275	10853	21,84	7,813	2,679	1499	1787	0,00210
478	2285	10922	21,86	7,819	2,679	1502	1795	0,00209
479	2294	10990	21,89	7,824	2,680	1505	1802	0,00209
480	2304	11059	21,91	7,830	2,681	1508	1810	0,00208
481	2314	11130	21,93	7,835	2,682	1511	1817	0,00208
482	2323	11200	21,95	7,841	2,683	1514	1825	0,00207
483	2333	11270	21,98	7,846	2,684	1517	1838	0,00207
484	2343	11340	22,00	7,851	2,685	1521	1840	0,00207
485	2352	11410	22,02	7,857	2,686	1524	1847	0,00206
486	2362	11480	22,05	7,862	2,687	1527	1855	0,00206
487	2372	11550	22,07	7,868	2,688	1530	1863	0,00205
488	2381	11620	22,09	7,873	2,689	1533	1870	0,00205
489	2391	11690	22,11	7,878	2,689	1536	1878	0,00204
490	2401	11760	22,14	7,884	2,690	1539	1886	0,00204

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
491	2411	1184	22,16	7,889	2,691	1543	1893	0,00204
492	2421	1191	22,18	7,894	2,692	1546	1901	0,00203
493	2430	1198	22,20	7,900	2,693	1549	1909	0,00203
494	2440	1206	22,23	7,905	2,694	1552	1917	0,00202
495	2450	1213	22,25	7,910	2,695	1555	1924	0,00202
496	2460	1220	22,27	7,916	2,695	1558	1932	0,00202
497	2470	1228	22,29	7,921	2,696	1561	1940	0,00201
498	2480	1235	22,32	7,926	2,697	1565	1948	0,00201
499	2490	1243	22,34	7,932	2,698	1568	1956	0,00200
500	2500	1250	22,36	7,937	2,699	1571	1963	0,00200
501	2510	1258	22,38	7,942	2,700	1574	1971	0,00200
502	2520	1265	22,41	7,948	2,701	1577	1979	0,00199
503	2530	1273	22,43	7,953	2,702	1580	1987	0,00199
504	2540	1280	22,45	7,958	2,702	1583	1995	0,00198
505	2550	1288	22,47	7,963	2,703	1587	2003	0,00198
506	2560	1296	22,49	7,969	2,704	1590	2011	0,00198
507	2570	1303	22,52	7,974	2,705	1593	2019	0,00197
508	2581	1311	22,54	7,979	2,706	1596	2027	0,00197
509	2591	1319	22,56	7,984	2,707	1599	2035	0,00196
510	2601	1327	22,58	7,990	2,708	1602	2043	0,00196
511	2611	1334	22,61	7,995	2,708	1605	2051	0,00196
512	2621	1342	22,63	8,000	2,709	1608	2059	0,00195
513	2632	1350	22,65	8,005	2,710	1612	2067	0,00195
514	2642	1358	22,67	8,010	2,711	1615	2075	0,00195
515	2652	1366	22,69	8,016	2,712	1618	2083	0,00194
516	2663	1374	22,72	8,021	2,713	1621	2091	0,00194
517	2673	1382	22,74	8,026	2,713	1624	2099	0,00193
518	2683	1390	22,76	8,031	2,714	1627	2107	0,00193
519	2694	1398	22,78	8,036	2,715	1630	2116	0,00193
520	2704	1406	22,80	8,041	2,716	1634	2124	0,00192
521	2714	1414	22,83	8,047	2,717	1637	2132	0,00192
522	2725	1422	22,85	8,052	2,718	1640	2140	0,00192
523	2735	1431	22,87	8,057	2,719	1643	2148	0,00191
524	2746	1439	22,89	8,062	2,719	1646	2157	0,00191
525	2756	1447	22,91	8,067	2,720	1649	2165	0,00190
526	2767	1455	22,93	8,072	2,721	1652	2173	0,00190
527	2777	1464	22,96	8,077	2,722	1656	2181	0,00190
528	2788	1472	22,98	8,082	2,723	1659	2190	0,00189
529	2798	1480	23,00	8,088	2,723	1662	2198	0,00189
530	2809	1489	23,02	8,093	2,724	1665	2206	0,00189
531	2820	1497	23,04	8,098	2,725	1668	2215	0,00188
532	2830	1506	23,07	8,103	2,726	1671	2223	0,00188
533	2841	1514	23,09	8,108	2,727	1674	2231	0,00188
534	2852	1523	23,11	8,113	2,728	1678	2240	0,00187
535	2862	1531	23,13	8,118	2,728	1681	2248	0,00187
536	2873	1540	23,15	8,123	2,729	1684	2256	0,00187
537	2884	1549	23,17	8,128	2,730	1687	2265	0,00186
538	2894	1557	23,19	8,133	2,731	1690	2273	0,00186
539	2905	1566	23,22	8,138	2,732	1693	2282	0,00186
540	2916	1575	23,24	8,143	2,732	1696	2290	0,00185
541	2927	1583	23,26	8,148	2,733	1700	2299	0,00185
542	2938	1592	23,28	8,153	2,734	1703	2307	0,00185
543	2948	1601	23,30	8,158	2,735	1706	2316	0,00184
544	2959	1610	23,32	8,163	2,736	1709	2324	0,00184
545	2970	1619	23,35	8,168	2,736	1712	2333	0,00183
546	2981	1628	23,37	8,173	2,737	1715	2341	0,00183
547	2992	1637	23,39	8,178	2,738	1718	2350	0,00183
548	3003	1646	23,41	8,183	2,739	1722	2359	0,00182
549	3014	1655	23,43	8,188	2,740	1725	2367	0,00182
550	3025	1664	23,45	8,193	2,740	1728	2376	0,00182

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	n	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
551	3036	1673	23,47	8,198	2,741	1731	2384	0,00182
552	3047	1682	23,49	8,203	2,742	1734	2393	0,00181
553	3058	1691	23,52	8,208	2,743	1737	2402	0,00181
554	3069	1700	23,54	8,213	2,744	1740	2411	0,00181
555	3080	1710	23,56	8,218	2,744	1744	2419	0,00181
556	3091	1719	23,58	8,223	2,745	1747	2428	0,00180
557	3102	1728	23,60	8,228	2,746	1750	2437	0,00180
558	3114	1737	23,62	8,233	2,747	1753	2445	0,00180
559	3125	1747	23,64	8,238	2,747	1756	2454	0,00179
560	3136	1756	23,66	8,243	2,748	1759	2463	0,00179
561	3147	1766	23,69	8,247	2,749	1762	2472	0,00179
562	3158	1775	23,71	8,252	2,750	1766	2481	0,00178
563	3170	1785	23,73	8,257	2,751	1769	2489	0,00178
564	3181	1794	23,75	8,262	2,751	1772	2498	0,00178
565	3192	1804	23,77	8,267	2,752	1775	2507	0,00177
566	3204	1813	23,79	8,272	2,753	1778	2516	0,00177
567	3215	1823	23,81	8,277	2,754	1781	2525	0,00177
568	3226	1833	23,83	8,282	2,754	1784	2534	0,00176
569	3238	1842	23,85	8,286	2,755	1788	2543	0,00176
570	3249	1852	23,87	8,291	2,756	1791	2552	0,00176
571	3260	1862	23,90	8,296	2,757	1794	2561	0,00175
572	3272	1871	23,92	8,301	2,757	1797	2570	0,00175
573	3283	1881	23,94	8,306	2,758	1800	2579	0,00175
574	3295	1891	23,96	8,311	2,759	1803	2588	0,00175
575	3306	1901	23,98	8,316	2,760	1806	2597	0,00174
576	3318	1911	24,00	8,320	2,760	1810	2606	0,00174
577	3329	1921	24,02	8,325	2,761	1813	2615	0,00174
578	3341	1931	24,04	8,330	2,762	1816	2624	0,00173
579	3352	1941	24,06	8,335	2,763	1819	2633	0,00173
580	3364	1951	24,08	8,340	2,763	1822	2642	0,00173
581	3376	1961	24,10	8,344	2,764	1825	2651	0,00172
582	3387	1971	24,12	8,349	2,765	1828	2660	0,00172
583	3399	1982	24,15	8,354	2,766	1832	2669	0,00172
584	3411	1992	24,17	8,359	2,766	1835	2679	0,00172
585	3422	2002	24,19	8,363	2,767	1838	2688	0,00171
586	3434	2012	24,21	8,368	2,768	1841	2697	0,00171
587	3446	2023	24,23	8,373	2,769	1844	2706	0,00171
588	3457	2033	24,25	8,378	2,769	1847	2715	0,00170
589	3469	2043	24,27	8,382	2,770	1850	2725	0,00170
590	3481	2054	24,29	8,387	2,771	1854	2734	0,00169
591	3493	2064	24,31	8,392	2,772	1857	2743	0,00169
592	3505	2075	24,33	8,397	2,772	1860	2753	0,00169
593	3516	2085	24,35	8,401	2,773	1863	2762	0,00169
594	3528	2096	24,37	8,406	2,774	1866	2771	0,00168
595	3540	2106	24,39	8,411	2,775	1869	2781	0,00168
596	3552	2117	24,41	8,416	2,775	1872	2790	0,00168
597	3564	2128	24,43	8,420	2,776	1876	2799	0,00168
598	3576	2138	24,45	8,425	2,777	1879	2809	0,00167
599	3588	2149	24,47	8,430	2,777	1882	2818	0,00167
600	3600	2160	24,49	8,434	2,778	1885	2827	0,00167
601	3612	2171	24,52	8,439	2,779	1888	2837	0,00166
602	3624	2182	24,54	8,444	2,780	1891	2846	0,00166
603	3636	2193	24,56	8,448	2,780	1894	2856	0,00166
604	3648	2203	24,58	8,453	2,781	1898	2865	0,00166
605	3660	2214	24,60	8,458	2,782	1901	2875	0,00165
606	3672	2225	24,62	8,462	2,782	1904	2884	0,00165
607	3684	2236	24,64	8,467	2,783	1907	2894	0,00165
608	3697	2248	24,66	8,472	2,784	1910	2903	0,00164
609	3709	2259	24,68	8,476	2,785	1913	2913	0,00164
610	3721	2270	24,70	8,481	2,785	1916	2922	0,00164

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
611	3733	2281	24,72	8,486	2,786	1920	2932	0,00163
612	3745	2292	24,74	8,490	2,787	1923	2942	0,00163
613	3758	2303	24,76	8,495	2,787	1926	2951	0,00163
614	3770	2315	24,78	8,499	2,787	1929	2961	0,00163
615	3782	2326	24,80	8,504	2,789	1932	2971	0,00163
616	3795	2337	24,82	8,509	2,790	1935	2980	0,00162
617	3807	2349	24,84	8,513	2,790	1938	2990	0,00162
618	3819	2360	24,86	8,518	2,791	1942	3000	0,00162
619	3832	2372	24,88	8,522	2,792	1945	3009	0,00162
620	3844	2383	24,90	8,527	2,792	1948	3019	0,00161
621	3856	2395	24,92	8,532	2,793	1951	3029	0,00161
622	3869	2406	24,94	8,536	2,794	1954	3039	0,00161
623	3881	2418	24,96	8,541	2,794	1957	3048	0,00161
624	3894	2430	24,98	8,545	2,795	1960	3058	0,00160
625	3906	2441	25,00	8,550	2,796	1964	3068	0,00160
626	3919	2453	25,02	8,554	2,797	1967	3078	0,00160
627	3931	2465	25,04	8,559	2,797	1970	3088	0,00159
628	3944	2477	25,06	8,564	2,798	1973	3097	0,00159
629	3956	2489	25,08	8,568	2,799	1976	3107	0,00159
630	3969	2500	25,10	8,573	2,799	1979	3117	0,00159
631	3982	2512	25,12	8,577	2,800	1982	3127	0,00158
632	3994	2524	25,14	8,582	2,801	1985	3137	0,00158
633	4007	2536	25,16	8,586	2,801	1989	3147	0,00158
634	4020	2548	25,18	8,591	2,802	1992	3157	0,00158
635	4032	2560	25,20	8,595	2,803	1995	3167	0,00157
636	4045	2573	25,22	8,600	2,803	1998	3177	0,00157
637	4058	2585	25,24	8,604	2,804	2001	3187	0,00157
638	4070	2597	25,26	8,609	2,805	2004	3197	0,00157
639	4083	2609	25,28	8,613	2,806	2007	3207	0,00156
640	4096	2621	25,30	8,618	2,806	2011	3217	0,00156
641	4109	2634	25,32	8,622	2,807	2014	3227	0,00156
642	4122	2646	25,34	8,627	2,808	2017	3237	0,00156
643	4134	2658	25,36	8,631	2,808	2020	3247	0,00156
644	4147	2671	25,38	8,636	2,809	2023	3257	0,00155
645	4160	2683	25,40	8,640	2,810	2026	3267	0,00155
646	4173	2696	25,42	8,645	2,810	2029	3278	0,00155
647	4186	2708	25,44	8,649	2,811	2033	3288	0,00155
648	4199	2721	25,46	8,653	2,812	2036	3298	0,00154
649	4212	2734	25,48	8,658	2,812	2039	3308	0,00154
650	4225	2746	25,50	8,662	3,813	2042	3318	0,00154
651	4238	2759	25,51	8,667	2,814	2045	3329	0,00154
652	4251	2772	25,53	8,671	2,814	2048	3339	0,00153
653	4264	2784	25,55	8,676	2,815	2051	3349	0,00153
654	4277	2797	25,57	8,680	2,816	2055	3359	0,00153
655	4290	2810	25,59	8,685	2,816	2058	3370	0,00153
656	4303	2823	25,61	8,689	2,817	2061	3380	0,00152
657	4316	2836	25,63	8,693	2,818	2064	3390	0,00152
658	4330	2849	25,65	8,698	2,818	2067	3400	0,00152
659	4343	2862	25,67	8,702	2,819	2070	3411	0,00152
660	4356	2875	25,69	8,707	2,820	2073	3421	0,00152
661	4366	2888	25,71	8,711	2,820	2077	3432	0,00151
662	4382	2901	25,73	8,715	2,821	2080	3442	0,00151
663	4396	2914	25,75	8,720	2,822	2083	3452	0,00151
664	4409	2928	25,77	8,724	2,822	2086	3463	0,00151
665	4422	2941	25,79	8,729	2,823	2089	3473	0,00150
666	4436	2954	25,81	8,733	2,823	2092	3484	0,00150
667	4449	2967	25,83	8,737	2,824	2095	3494	0,00150
668	4462	2981	25,85	8,742	2,825	2099	3505	0,00150
669	4476	2994	25,87	8,746	2,825	2102	3515	0,00149
670	4489	3008	25,88	8,750	2,826	2105	3526	0,00149

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
671	4502	3021	25,90	8,755	2,827	2108	3536	0,00149
672	4516	3035	25,92	8,759	2,827	2111	3547	0,00149
673	4529	3048	25,94	8,763	2,828	2114	3557	0,00149
674	4543	3062	25,96	8,768	2,829	2117	3568	0,00148
675	4556	3075	25,98	8,772	2,829	2121	3578	0,00148
676	4570	3089	26,00	8,776	2,830	2124	3589	0,00148
677	4583	3103	26,02	8,781	2,831	2127	3600	0,00148
678	4597	3117	26,04	8,785	2,831	2130	3610	0,00147
679	4610	3130	26,06	8,789	2,832	2133	3621	0,00147
680	4624	3144	26,08	8,794	2,833	2136	3632	0,00147
681	4638	3158	26,10	8,798	2,833	2139	3642	0.00147
682	4651	3172	26,12	8,802	2,834	2143	3653	0,00147
683	4665	3186	26,13	8,807	2,834	2146	3664	0,00146
684	4679	3200	26,15	8,811	2,835	2149	3675	0,00146
685	4692	3214	26,17	8,815	2,836	2152	3685	0,00146
686	4706	3238	26,19	8,819	2,836	2155	3696	0,00146
687	4720	3242	26,21	8,824	2,837	2158	3707	0,00145
688	4733	3257	26,23	8,828	2,838	2161	3718	0,00145
689	4747	3271	26,25	8,832	2,838	2165	3728	0,00145
690	4761	3285	26,27	8,837	2,839	2168	3739	0,00145
691	4775	3299	26,29	8,841	2,839	2171	3750	0,00145
692	4789	3314	26,31	8,845	2,840	2174	3761	0,00145
693	4802	3328	26,32	8,849	2,841	2177	3772	0,00144
694	4816	3342	26,34	8,854	2,841	2180	3783	0,00144
695	4830	3357	26,36	8,858	2,842	2183	3794	0,00144
696	4844	3372	26,38	8,862	2,843	2187	3805	0,00144
697	4858	3386	26,40	8,866	2,843	2190	3816	0,00143
698	4872	3401	26,42	8,871	2,844	2193	3826	0,00143
699	4886	3415	26,44	8,875	2,844	2196	3837	0,00143
700	4900	3430	26,46	8,879	2,845	2199	3848	0,00143
701	4914	3445	26,48	8,883	2,846	2202	3859	0,00143
702	4928	3459	26,50	8,887	2,846	2205	3870	0,00142
703	4942	3474	26,51	8,892	2,847	2209	3882	0,00142
704	4956	3489	26,53	8,896	2,848	2212	3893	0,00142
705	4970	3504	26,55	8,900	2,848	2215	3904	0,00142
706	4984	3519	26,57	8,904	2,849	2218	3915	0,00142
707	4998	3534	26,59	8,909	2,849	2221	3926	0,00141
708	5013	3549	26,61	8,913	2,850	2224	3937	0,00141
709	5027	3564	26,63	8,917	2,851	2227	3948	0,00141
710	5041	3579	26,65	8,921	2,851	2231	3959	0,00141
711	5055	3594	26,66	8,925	2,852	2234	3970	0,00141
712	5069	3609	26,68	8,929	2,852	2237	3982	0,00140
713	5084	3625	26,70	8,934	2,853	2240	3993	0,00140
714	5098	3640	26,72	8,938	2,854	2243	4004	0,00140
715	5112	3655	26,74	8,942	2,854	2246	4015	0,00140
716	5127	3671	26,76	8,946	2,855	2249	4026	0,00149
717	5141	3686	26,78	8,950	2,856	2253	4038	0,00139
718	5155	3701	26,80	8,955	2,856	2256	4049	0,00139
719	5170	3717	26,81	8,959	2,857	2259	4060	0,00139
720	5184	3732	26,83	8,963	2,857	2262	4072	0,00139
721	5198	3748	26,85	8,967	2,858	2265	4083	0,00139
722	5213	3764	26,87	8,971	2,859	2268	4094	0,00139
723	5227	3779	26,89	8,975	2,859	2271	4106	0,00138
724	5242	3795	26,91	8,979	2,860	2275	4117	0,00138
725	5256	3811	26,93	8,984	2,860	2278	4128	0,00138
726	5271	3827	26,94	8,988	2,861	2281	4140	0,00138
727	5285	3842	26,96	8,992	2,862	2284	4151	0,00138
728	5300	3858	26,98	8,996	2,862	2287	4162	0,00137
729	5314	3874	27,00	9,000	2,863	2290	4174	0,00137
730	5329	3890	27,02	9,004	2,863	2293	4185	0,00137

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
731	5344	3906	27,04	9,008	2,864	2297	4197	0,00137
732	5358	3922	27,06	9.012	2,865	2300	4208	0,00137
733	5373	3938	27,07	9,016	2,865	2303	4220	0,00136
734	5388	3954	27,09	9,021	2,866	2306	4231	0,00136
735	5402	3971	27,11	9,025	2,866	2309	4243	0,00136
736	5417	3987	27,13	9,029	2,867	2312	4254	0,00136
737	5432	4003	27,15	9,033	2,867	2315	4266	0,00136
738	5446	4019	27,17	9,037	2,868	2319	4278	0,00136
739	5461	4036	27,18	9,041	2,869	2322	4289	0,00135
740	5476	4052	27,20	9,045	2,869	2325	4301	0,00135
741	5491	4069	27,22	9,049	2,870	2328	4312	0,00135
742	5506	4085	27,24	9,053	2,870	2331	4324	0.00135
743	5520	4102	27,27	9,057	2,871	2334	4336	0,00135
744	5535	4118	27,28	9,061	2,872	2337	4347	0,00134
745	5550	4135	27,29	9,065	2,872	2340	4359	0,00134
746	5565	4152	27,31	9,069	2,873	2344	4371	0,00134
747	5580	4168	27,33	9,073	2,873	2347	4383	0,00134
748	5595	4185	27,35	9,078	2,874	2350	4394	0,00134
749	5610	4202	27,37	9,082	2,874	2353	4406	0,00134
750	5625	4219	27,39	9,086	2,875	2356	4418	0,00133
751	5640	4236	27,40	9,090	2,876	2359	4430	0,00133
752	5655	4253	27,42	9,094	2,876	2362	4441	0,00133
753	5670	4270	27,44	9,098	2,877	2366	4453	0,00133
754	5685	4287	27,46	9,102	2,877	2369	4465	0,00133
755	5700	4304	27,48	9,106	2,878	2372	4477	0,00132
756	5715	4321	27,50	9,110	2,879	2375	4489	0,00132
757	5730	4338	27,51	9,114	2,879	2378	4501	0,00132
758	5746	4355	27,53	9,118	2,880	2381	4513	0,00132
759	5761	4372	27,55	9,122	2,880	2384	4525	0,00132
760	5776	4390	27,57	9,126	2,881	2388	4536	0,00132
761	5791	4407	27,59	9,130	2,881	2391	4548	0,00131
762	5806	4425	27,60	9,134	2,882	2394	4560	0,00131
763	5822	4442	27,62	9,138	2,883	2397	4572	0,00131
764	5837	4459	27,64	9,142	2,883	2400	4584	0,00131
765	5852	4477	27,66	9,146	2,884	2403	4596	0,00131
766	5868	4495	27,68	9,150	2,884	2406	4608	0,00131
767	5883	4512	27,69	9,154	2,885	2410	4620	0,00130
768	5898	4530	27,71	9,158	2,885	2413	4632	0,00130
769	5914	4548	27,73	9,162	2,886	2416	4645	0,00130
770	5929	4565	27,75	9,166	2,886	2419	4657	0,00130
771	5944	4583	27,77	9,170	2,887	2422	4669	0,00130
772	5960	4601	27,78	9,174	2,888	2425	4681	0,00130
773	5975	4619	27,80	9,178	2,888	2428	4693	0,00129
774	5991	4637	27,82	9,182	2,889	2432	4705	0,00129
775	6006	4655	27,84	9,185	2,889	2435	4717	0,00129
776	6022	4673	27,86	9,189	2,890	2438	4729	0,00129
777	6037	4691	27,87	9,193	2,890	2441	4742	0,00129
778	6053	4709	27,89	9,197	2,891	2444	4754	0,00129
779	6068	4727	27,91	9,201	2,892	2447	4766	0,00128
780	6084	4746	27,93	9,205	2,892	2450	4778	0,00128
781	6100	4764	27,95	9,209	2,893	2454	4791	0,00128
782	6115	4782	27,96	9,213	2,893	2457	4803	0,00128
783	6131	4800	27,98	9,217	2,894	2460	4815	0,00128
784	6147	4819	28,00	9,221	2,894	2463	4827	0,00128
785	6162	4837	28,02	9,225	2,895	2466	4840	0,00127
786	6178	4856	28,04	9,229	2,895	2469	4852	0,00127
787	6194	4874	28,05	9,233	2,896	2472	4865	0,00127
788	6209	4893	28,07	9,237	2,897	2476	4877	0,00127
789	6225	4912	28,09	9,240	2,897	2479	4889	0,00127
790	6241	4930	28,11	9,244	2,898	2482	4902	0,00127

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	n	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
791	6257	4949	28,12	9,248	2,898	2485	4914	0,00126
792	6273	4968	28,14	9,252	2,899	2488	4927	0,00126
793	6288	4987	28,16	9,256	2,899	2491	4939	0,00126
794	6304	5006	28,18	9,260	2,900	2494	4951	0,00126
795	6320	5025	28,20	9,264	2,900	2498	4964	0,00126
796	6336	5044	28,21	9,268	2,901	2501	4976	0,00126
797	6352	5063	28,23	9,272	2,901	2504	4989	0,00125
798	6368	5082	28,25	9,275	2,902	2507	5001	0,00125
799	6384	5101	28,27	9,279	2,903	2510	5014	0,00125
800	6400	5120	28,28	9,283	2,903	2513	5027	0,00125
801	6416	5139	28,30	9,287	2,904	2516	5039	0,00125
802	6432	5158	28,32	9,291	2,904	2520	5052	0,00125
803	6448	5178	28,34	9,295	2,905	2523	5064	0,00125
804	6464	5197	28,35	9,299	2,905	2526	5077	0,00125
805	6480	5217	28,37	9,302	2,906	2529	5090	0,00124
806	6496	5236	28,39	9,306	2,906	2532	5102	0,00124
807	6512	5256	28,41	9,310	2,907	2535	5115	0,00124
808	6529	5275	28,43	9,314	2,907	2538	5128	0,00124
809	6545	5295	28,44	9,318	2,908	2542	5140	0,00124
810	6561	5314	28,46	9,322	2,908	2545	5153	0,00124
811	6577	5334	28,48	9,326	2,909	2548	5166	0,00123
812	6593	5354	28,50	9,329	2,910	2551	5178	0,00123
813	6610	5374	28,51	9,333	2,910	2554	5191	0,00123
814	6626	5392	28,53	9,337	2,911	2557	5204	0,00123
815	6642	5413	28,55	9,341	2,911	2560	5217	0,00123
816	6659	5433	28,57	9,345	2,912	2564	5230	0,00123
817	6675	5453	28,58	9,348	2,912	2567	5242	0,00123
818	6691	5473	28,60	9,352	2,913	2570	5255	0,00122
819	6708	5494	28,62	9,356	2,913	2573	5268	0,00122
820	6724	5514	28,64	9,360	2,914	2576	5281	0,00122
821	6740	5534	28,65	9,364	2,914	2579	5294	0,00122
822	6757	5554	28,67	9,368	2,915	2582	5307	0,00122
823	6773	5574	28,69	9,371	2,915	2586	5320	0,00121
824	6790	5595	28,71	9,375	2,916	2589	5333	0,00121
825	6806	5615	28,72	9,379	2,916	2592	5346	0,00121
826	6823	5636	28,74	9,383	2,917	2595	5359	0,00121
827	6839	5656	28,76	9,386	2,918	2598	5372	0,00121
828	6856	5677	28,77	9,390	2,918	2601	5385	0,00121
829	6872	5697	28,79	9,394	2,919	2604	5398	0,00121
830	6889	5718	28,81	9,398	2,919	2608	5411	0,00121
831	6906	5739	28,83	9,402	2,920	2611	5424	0,00121
832	6922	5759	28,84	9,405	2,920	2614	5437	0,00120
833	6939	5780	28,86	9,409	2,921	2617	5450	0,00120
834	6956	5801	28,88	9,413	2,921	2620	5463	0,00120
835	6972	5822	28,90	9,417	2,922	2623	5476	0,00120
836	6989	5843	28,91	9,420	2,922	2626	5489	0,00120
837	7006	5864	28,93	9,424	2,923	2630	5502	0,00120
838	7022	5885	28,95	9,428	2,923	2633	5515	0,00120
839	7039	5906	28,97	9,432	2,924	2636	5529	0,00119
840	7056	5927	28,98	9,435	2,924	2639	5542	0,00119
841	7073	5948	29,00	9,439	2,925	2642	5555	0,00119
842	7090	5969	29,02	9,443	2,925	2645	5568	0,00119
843	7106	5991	29,03	9,447	2,926	2648	5581	0,00119
844	7123	6012	29,05	9,450	2,926	2652	5595	0,00119
845	7140	6034	29,07	9,454	2,927	2655	5608	0,00118
846	7157	6055	29,09	9,458	2,927	2658	5621	0,00118
847	7174	6076	29,10	9,462	2,928	2661	5635	0,00118
848	7194	6098	29,12	9,465	2,928	2664	5648	0,00118
849	7208	6120	29,14	9,469	2,929	2667	5661	0,00118
850	7225	6141	29,15	9,473	2,929	2670	5675	0,00118

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
851	7242	6163	29,17	9,476	2,930	2674	5688	0,00118
852	7259	6185	29,19	9,480	2,930	2677	5701	0,00117
853	7276	6207	29,21	9,484	2,931	2680	5715	0,00117
854	7293	6228	29,22	9,488	2,931	2683	5728	0,00117
855	7310	6250	29,24	9,491	2,932	2686	5741	0,00117
856	7327	6272	29,26	9,494	2,932	2689	5755	0,00117
857	7344	6294	29,27	9,499	2,933	2692	5768	0,00117
858	7362	6316	29,29	9,502	2,933	2695	5782	0,00117
859	7379	6338	29,31	9,506	2,934	2699	5795	0,00116
860	7396	6361	29,33	9,510	2,934	2702	5809	0,00116
861	7413	6383	29,34	9,513	2,935	2705	5822	0,00116
862	7430	6405	29,36	9,517	2,936	2708	5836	0,00116
863	7448	6427	29,38	9,521	2,936	2711	5849	0,00116
864	7465	6450	29,39	9,524	2,937	2714	5863	0,00116
865	7482	6472	29,41	9,528	2,937	2717	5877	0,00116
866	7500	6495	29,43	9,532	2,938	2721	5890	0,00115
867	7517	6517	29,44	9,535	2,938	2724	5904	0,00115
868	7534	6540	29,46	9,539	2,939	2727	5917	0,00115
869	7552	6562	29,48	9,543	2,939	2730	5931	0,00115
870	7569	6585	29,50	9,546	2,940	2733	5945	0,00115
871	7586	6608	29,51	9,550	2,940	2736	5958	0,00115
872	7604	6631	29,53	9,554	2,941	2739	5972	0,00115
873	7621	6653	29,55	9,557	2,941	2743	5986	0,00115
874	7639	6676	29,56	9,561	2,942	2746	5999	0,00114
875	7656	6699	29,58	9,565	2,942	2749	6013	0,00114
876	7674	6722	29,60	9,568	2,943	2752	6027	0,00114
877	7691	6745	29,61	9,572	2,943	2755	6041	0,00114
878	7709	6768	29,63	9,576	2,943	2758	6055	0,00114
879	7726	6792	29,65	9,579	2,944	2761	6068	0,00114
880	7744	6815	29,66	9,583	2,944	2765	6082	0,00114
881	7762	6838	29,68	9,586	2,945	2768	6096	0,00114
882	7779	6861	29,70	9,590	2,945	2771	6110	0,00113
883	7797	6885	29,72	9,594	2,946	2774	6124	0,00113
884	7815	6908	29,73	9,595	2,946	2777	6138	0,00113
885	7832	6932	29,75	9,601	2,947	2780	6151	0,00113
886	7850	6955	29,77	9,605	2,947	2783	6165	0,00113
887	7868	6979	29,78	9,608	2,948	2787	6179	0,00113
888	7885	7002	29,80	9,612	2,948	2790	6193	0,00113
889	7903	7026	29,82	9,615	2,949	2793	6207	0,00112
890	7921	7050	29,83	9,619	2,949	2796	6221	0,00112
891	7939	7073	29,85	9,623	2,950	2799	6235	0,00112
892	7957	7097	29,87	9,626	2,950	2802	6249	0,00112
893	7974	7121	29,88	9,630	2,951	2805	6263	0,00112
894	7992	7145	29,90	9,633	2,951	2809	6277	0,00112
895	8010	7169	29,92	9,637	2,952	2812	6291	0,00112
896	8028	7193	29,93	9,641	2,952	2815	6305	0,00112
897	8046	7217	29,95	9,644	2,953	2818	6319	0,00111
898	8064	7242	29,97	9,648	2,953	2821	6333	0,00111
899	8082	7266	29,98	9,651	2,954	2824	6348	0,00111
900	8100	7290	30,00	9,655	2,954	2827	6362	0,00111
901	8118	7314	30,02	9,658	2,955	2831	6376	0,00111
902	8136	7339	30,03	9,662	2,955	2834	6390	0,00111
903	8154	7363	30,05	9,666	2,956	2837	6404	0,00111
904	8172	7388	30,07	9,669	2,956	2840	6418	0,00111
905	8190	7412	30,08	9,673	2,957	2843	6433	0,00110
906	8208	7437	30,10	9,676	2,957	2846	6447	0,00110
907	8226	7461	30,12	9,680	2,958	2849	6461	0,00110
908	8245	7486	30,13	9,683	2,958	2853	6475	0,00110
909	8263	7511	30,15	9,687	2,959	2856	6490	0,00110
910	8281	7536	30,17	9,691	2,959	2859	6504	0,00110

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
911	8299	7561	30,18	9,694	2,960	2862	6518	0,00110
912	8317	7586	30,20	9,698	2,960	2865	6533	0,00110
913	8336	7610	30,22	9,701	2,960	2868	6547	0,00110
914	8354	7636	30,23	9,705	2,960	2871	6561	0,00109
915	8372	7661	30,25	9,708	2,961	2875	6576	0,00109
916	8391	7686	30,27	9,712	2,961	2878	6590	0,00109
917	8409	7711	30,28	9,715	2,962	2881	6604	0,00109
918	8427	7736	30,30	9,719	2,963	2884	6619	0,00109
919	8446	7762	30,31	9,722	2,963	2887	6633	0,00109
920	8464	7787	30,33	9,726	2,964	2890	6648	0,00109
921	8482	7812	30,35	9,729	2,964	2893	6662	0,00109
922	8501	7838	30,36	9,733	2,965	2897	6677	0,00108
923	8519	7863	30,38	9,736	2,965	2900	6691	0,00108
924	8538	7889	30,40	9,740	2,966	2903	6706	0,00108
925	8556	7915	30,41	9,743	2,966	2906	6720	0,00108
926	8575	7940	30,43	9,747	2,967	2909	6735	0,00108
927	8593	7966	30,45	9,750	2,967	2912	6749	0,00108
928	8612	7992	30,46	9,754	2,968	2915	6764	0,00108
929	8630	8018	30,48	9,758	2,968	2919	6778	0,00108
930	8649	8044	30,50	9,761	2,968	2922	6793	0,00108
931	8668	8070	30,51	9,764	2,969	2925	6808	0,00107
932	8686	8096	30,53	9,768	2,969	2928	6822	0,00107
933	8705	8122	30,55	9,771	2,970	2931	6837	0,00107
934	8724	8148	30,56	9,775	2,970	2934	6851	0,00107
935	8742	8174	30,58	9,778	2,971	2937	6866	0,00107
936	8761	8200	30,59	9,782	2,971	2941	6881	0,00107
937	8780	8227	30,61	9,785	2,972	2944	6896	0,00107
938	8798	8253	30,63	9,789	2,972	2947	6910	0,00107
939	8817	8279	30,64	9,792	2,973	2950	6925	0,00106
940	8836	8306	30,66	9,796	2,973	2953	6940	0,00106
941	8855	8332	30,68	9,799	2,974	2956	6945	0,00106
942	8874	8359	30,69	9,803	2,974	2959	6969	0,00106
943	8892	8386	30,71	9,806	2,975	2963	6984	0,00106
944	8911	8412	30,72	9,810	2,975	2966	6999	0,00106
945	8930	8439	30,74	9,813	2,975	2969	7014	0,00106
946	8949	8466	30,76	9,817	2,976	2972	7029	0,00106
947	8968	8493	30,77	9,820	2,976	2975	7044	0,00106
948	8987	8520	30,79	9,824	2,977	2978	7058	0,00105
949	9006	8547	30,81	9,827	2,977	2981	7073	0,00105
950	9025	8574	30,82	9,830	2,978	2985	7088	0,00105
951	9044	8601	30,84	9,834	2,978	2988	7103	0,00105
952	9063	8628	30,85	9,837	2,979	2991	7118	0,00105
953	9082	8655	30,87	9,841	2,979	2994	7133	0,00105
954	9101	8683	30,89	9,844	2,980	2997	7148	0,00105
955	9120	8710	30,90	9,848	2,980	3000	7163	0,00105
956	9139	8737	30,92	9,851	2,980	3003	7178	0,00105
957	9158	8765	30,94	9,855	2,981	3007	7193	0,00104
958	9178	8792	30,95	9,858	2,981	3010	7208	0,00104
959	9197	8820	30,97	9,861	2,982	3013	7223	0,00104
960	9217	8847	30,98	9,865	2,982	3016	7238	0,00104
961	9235	8875	31,00	9,868	2,983	3019	7253	0,00104
962	9254	8903	31,02	9,872	2,983	3022	7268	0,00104
963	9274	8931	31,03	9,875	2,984	3025	7284	0,00104
964	9293	8958	31,05	9,879	2,984	3028	7299	0,00104
965	9312	8986	31,06	9,882	2,985	3032	7314	0,00104
966	9332	9014	31,08	9,885	2,985	3035	7329	0,00104
967	9351	9042	31,10	9,889	2,985	3038	7344	0,00103
968	9370	9070	31,11	9,892	2,986	3041	7359	0,00103
969	9390	9099	31,13	9,896	2,986	3044	7375	0,00103
970	9409	9127	31,14	9,899	2,987	3047	7390	0,00103

Tabela 2 *(continuare)*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
971	9428	9155	31,16	9,902	2,987	3050	7405	0,00103
972	9448	9183	31,18	9,906	2,988	3054	7420	0,00103
973	9467	9212	31,19	9,909	2,988	3057	7436	0,00103
974	9487	9240	31,21	9,913	2,989	3060	7451	0,00103
975	9506	9269	31,22	9,916	2,989	3063	7466	0,00103
976	9526	9297	31,24	9,919	2,989	3066	7482	0,00102
977	9545	9326	31,26	9,923	2,990	3069	7497	0,00102
978	9565	9354	31,27	9,926	2,990	3072	7512	0,00102
979	9584	9383	31,29	9,930	2,991	3076	7528	0,00102
980	9604	9412	31,30	9,933	2,991	3079	7543	0,00102
981	9624	9441	31,32	9,936	2,992	3082	7558	0,00102
982	9643	9470	31,34	9,940	2,992	3085	7574	0,00102
983	9663	9499	31,35	9,943	2,993	3088	7589	0,00102
984	9683	9528	31,37	9,946	2,993	3091	7605	0,00102
985	9702	9557	31,38	9,950	2,993	3094	7620	0,00102
986	9722	9586	31,40	9,953	2,994	3098	7636	0,00101
987	9742	9615	31,42	9,956	2,994	3101	7651	0,00101
988	9761	9644	31,43	9,960	2,995	3104	7667	0,00101
989	9781	9674	31,45	9,963	2,995	3107	7682	0,00101
990	9801	9703	31,46	9,967	2,996	3110	7698	0,00101
991	9821	9732	31,48	9,970	2,996	3113	7713	0,00101
992	9841	9762	31,50	9,973	2,997	3116	7729	0,00101
993	9860	9791	31,51	9,977	2,997	3120	7744	0,00101
994	9880	9821	31,53	9,980	2,997	3123	7760	0,00101
995	9900	9851	31,54	9,983	2,998	3126	7776	0,00101
996	9920	9880	31,56	9,987	2,998	3129	7791	0,00100
997	9940	9910	31,58	9,990	2,999	3132	7807	0,00100
998	9960	9940	31,59	9,993	2,999	3135	7823	0,00100
999	9980	9970	31,61	9,997	3,000	3138	7838	0,00100
1000	10000	10000	31,62	10,000	3,000	3142	7854	0,00100

Tabela 3. Valorile în radiani ale gradelor, minutelor și secundelor

Secunde	Radiani	Minute	Radiani	Grade	Radiani
1″	0,000005	1′	0,000291	1°	0,017453
2	0,000010	2	0,000582	2	0,034907
3	0,000015	3	0,000873	3	0,052360
4	0,000019	4	0,001164	4	0,069813
5	0,000024	5	0,001454	5	0,087266
6	0,000029	6	0,001745	6	0,104720
7	0,000034	7	0,002036	7	0,122173
8	0,000039	8	0,002327	8	0,139626
9	0,000044	9	0,002618	9	0,157080
10	0,000048	10	0,002909	10	0,174533
20	0,000097	20	0,005818	11	0,191986
30	0,000145	30	0,008727	12	0,209440
40	0,000194	40	0,011636	13	0,226893
50	0,000242	50	0,014544	14	0,244346
				15	0,261799

Tabela 3 *(continuare)*

Grade	Radiani	Grade	Radiani	Grade	Radiani
16°	0,279253	31°	0,541052	70°	1,221730
17	0,296706	32	0,558505	75	1,308997
18	0,314159	33	0,575959	80	1,396263
19	0,331613	34	0,593412	85	1,483530
20	0,349066	35	0,610865	90	1,570769
21	0,366519	36	0,628319	100	1,745329
22	0,383972	37	0,645772	120	2,094395
23	0,401426	38	0,663225	150	2,617994
24	0,418879	39	0,680678	180	3,141593
25	0,436332	40	0,698132	200	3,490659
26	0,453786	45	0,785398	250	4,363323
27	0,471239	50	0,872665	270	4,712389
28	0,488692	55	0,959931	300	5,235988
29	0,506145	60	1,047198	360	6.283185
30	0,523599	65	1,134464	400	6,981317

Tabela 4. Valorile radianilor, în grade

Radiani	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade
0,0	0,0000	0,5730	1,1459	1,7189	2,2918	2,8648	3,4377	4,0107	4,5837	5,1566
0,1	5,7296	6,3025	6,8755	7,4485	8,0214	8,5944	9,1673	9,7403	10,3132	10,8862
0,2	11,4591	12,0321	12,6051	13,1780	13,7510	14,3239	14,8969	15,4699	16,0428	16,6158
0,3	17,1887	17,7617	18,3346	18,9076	19,4806	20,0535	20,6265	21,1994	21,7724	22,3454
0,4	22,9183	23,4913	24,0642	24,6372	25,2101	25,7831	26,3561	26,9290	27,5020	28,0749
0,5	28,6479	29,2208	29,7938	30,3668	30,9397	31,1527	32,0856	32,6586	33,2316	33,8045
0,6	34,3775	34,9504	35,5234	36,0963	36,6693	37,2423	37,8152	38,3882	38,9611	39,5341
0,7	40,1070	40,6800	41,2530	41,8259	42,3989	42,9718	43,5448	44,1178	44,6907	45,2637
0,8	45,8366	46,4096	46,9825	47,5555	48,1285	48,7014	49,2744	49,8473	50,4203	50,9932
0,9	51,5662	52,1392	52,7121	53,2851	53,8580	54,4310	55,0039	55,5769	56,1499	56,7228

1 radian = 57,29578 grade | 2 radiani = 114,59156 grade | 3 Radiani= 171,88734 grade

Tabela 5. Zecimalele unui grad, în minute și secunde

Zecimale	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	min s	min s	min s	min s	min s	min s	min s	min s	min s	min s
0,0	0 0	0 36	1 12	1 48	2 24	3 0	3 36	4 12	4 48	5 24
0,1	6 0	6 36	7 12	7 48	8 24	9 0	9 36	10 12	10 48	11 24
0,2	12 0	12 36	13 12	13 48	14 24	15 0	15 36	16 12	16 48	17 24
0,3	18 0	18 36	19 12	19 48	20 24	21 0	21 36	22 12	22 48	23 24
0,4	24 0	24 36	25 12	25 48	26 24	27 0	27 36	28 12	28 48	29 24
0,5	30 0	30 36	31 12	31 48	32 24	33 0	33 36	34 12	34 48	35 24
0,6	36 0	36 36	37 12	37 48	38 24	39 0	39 36	40 12	40 48	41 24
0,7	42 0	42 36	43 12	43 48	44 24	45 0	45 36	46 12	46 48	47 24
0,8	48 0	48 36	49 12	49 48	50 24	51 0	51 36	52 12	52 48	53 24
0,9	54 0	54 36	55 12	55 48	56 24	57 0	57 36	58 12	58 48	59 24

Arce, coarde, segmente și sectoare de cerc

Notații:

A = unghiul la centru, în grade; G = aria segmentului;

C = coarda arcului; H = înălțimea arcului;

c = coarda jumătății de arc; L = lungimea arcului;

D = diametrul cercului; R = raza cercului;

S = aria sectorului.

$$L = 2\pi RA\,360 = 0{,}017453\ RA.$$

$$C = 2\sqrt{c^2 - H^2} = \sqrt{D^2 - (D-2H)^2} = 2\sqrt{R^2 - (R-H)^2} = 2\sqrt{(D-H)\,H}.$$

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - 4H^2} = \sqrt{D \cdot H}.$$

$$D = \frac{c^2}{H} = \frac{\frac{1}{4}C^2 + H^2}{H}.$$

$$H = \frac{c^2}{D} = \frac{1}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - C^2}\right), \text{ dacă } H < R.$$

$$H = \frac{1}{2}\left(D + \sqrt{D^2 - C^2}\right) = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}C^2}, \text{ dacă } H > R.$$

$$G = S - \frac{1}{2}C\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}C^2}, \text{ dacă } G < \text{un semicerc}.$$

$$G = S + \frac{1}{2}C\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}C^2}, \text{ dacă } G > \text{un semicerc}.$$

$$S = \frac{1}{2}LR = \frac{AR^2}{360}.$$

$$R = \frac{(C^2 + 4H^2)}{8H}.$$

Tabela 6. Arce, coarde și segmente de cerc ($R = 1$)

Unghiul la centru în grade	Arcul		Lungimea coardei C	H/C	Aria segmentului*) G	Unghiul la centru în grade	Arcul		Lungimea coardei C	H/C	Aria segmentului*) G
	Lungimea L	Înălțimea H					Lungimea L	Înălțimea H			
1	0,0175	0,0000	0,0175	0,0022	0,00000	61	1,0647	0,1384	1,015	0,1363	0,09502
2	0,0349	0,0002	0,0349	0,0044	0,00000	62	1,0821	0,1428	1,030	0,1387	0,09958
3	0,0524	0,0003	0,0524	0,0066	0,00001	63	1,0996	0,1474	1,045	0,1410	0,10428
4	0,0698	0,0006	0,0698	0,0087	0,00003	64	1,1170	0,1520	1,060	0,1434	0,10911
5	0,0873	0,0010	0,0872	0,0109	0,00006	65	1,1345	0,1566	1,075	0,1457	0,11408
6	0,1047	0,0014	0,1047	0,0131	0,00010	66	1,1519	0,1613	1,089	0,1481	0,11919
7	0,1222	0,0019	0,1221	0,0153	0,00015	67	1,1694	0,1661	1,104	0,1505	0,12443
8	0,1396	0,0024	0,1395	0,0175	0,00023	68	1,1868	0,1710	1,118	0,1529	0,12982
9	0,1571	0,0031	0,1569	0,0196	0,00032	69	1,2043	0,1758	1,133	0,1553	0,13535
10	**0,1745**	**0,0038**	**0,1743**	**0,0218**	**0,00044**	**70**	**1,2217**	**0,1808**	**1,147**	**0,1576**	**0,14102**
11	0,1920	0,0046	0,1917	0,0240	0,00059	71	1,2392	0,1859	1,161	0,1601	0,14683
12	0,2094	0,0055	0,2091	0,0262	0,00076	72	1,2566	0,1910	1,176	0,1625	0,15279
13	0,2269	0,0064	0,2264	0,0284	0.00097	73	1,2741	0,1961	1,190	0,1649	0,15889
14	0,2443	0,0075	0,2437	0,0306	0,00121	74	1,2915	0,2014	1,204	0,1673	0,16514
15	0,2618	0,0086	0,2611	0,0328	0,00149	75	1,3090	0,2066	1,218	0,1697	0,17154
16	0,2793	0,0097	0,2783	0,0350	0,00181	76	1,3265	0,2120	1,231	0,1722	0,17808
17	0,2967	0,0110	0,2956	0,0372	0,00217	77	1,3439	0,2174	1,245	0,1746	0,18477
18	0,3142	0,0123	0,3129	0,0394	0,00257	78	1,3614	0,2229	1,259	0,1771	0,19160
19	0,3316	0,0137	0,3301	0,0415	0,00302	79	1,3788	0,2284	1,272	0,1795	0,19859
20	**0,3491**	**0,0152**	**0,3473**	**0,0437**	**0,00352**	**80**	**1,3963**	**0,2340**	**1,286**	**0,1820**	**0,20578**
21	0,3565	0,0167	0,3645	0,0459	0,00408	81	1,4137	0,2396	1,299	0,1845	0,21301
22	0,3840	0,0184	0,3816	0,0481	0,00468	82	1,4312	0,2453	1,312	0,1869	0,22045
23	0,4014	0,0201	0,3987	0,0503	0,00535	83	1,4486	0,2510	1,325	0,1894	0,22804
24	0,4189	0,0219	0,4158	0,0526	0,00607	84	1,4661	0,2569	1,338	0,1919	0,23578
25	0,4363	0,0237	0,4329	0,0548	0,00686	85	1,4835	0,2627	1,351	0,1944	0,24367
26	0,4538	0,0256	0,4499	0,0570	0,00771	86	1,5010	0,2686	1,364	0,1970	0,25171
27	0,4712	0,0276	0,4669	0,0592	0,00862	87	1,5184	0,2746	1,377	0,1995	0,25990
28	0,4887	0,0297	0,4838	0,0614	0,00961	88	1,5359	0,2807	1,389	0,2020	0,26825
29	0,5061	0,0319	0,5008	0,0636	0,01067	89	1,5533	0,2867	1,402	0,2046	0,27675
30	**0,5236**	**0,0351**	**0,5176**	**0,0658**	**0,01180**	**90**	**1,5708**	**0,2929**	**1,414**	**0,2071**	**0,28540**
31	0,5411	0,0364	0,5345	0,0680	0,01301	91	1,5882	0,2991	1,427	0,2097	0,29420
32	0,5585	0,0387	0,5513	0,0703	0,01429	92	1,6057	0,3053	1,439	0,2122	0,30316
33	0,5760	0,0412	0,5680	0,0725	0,01566	93	1,6232	0,3116	1,451	0,2148	0,31226
34	0,5934	0,0437	0,5847	0,0744	0,01711	94	1,6406	0,3180	1,463	0,2174	0,32152
35	0,6109	0,0463	0,6014	0,0770	0,01864	95	1,6581	0,3244	1,475	0,2200	0,33093
36	0,6283	0,0489	0,6180	0,0792	0,02027	96	1,6755	0,3309	1,486	0,2226	0,34050
37	0,6458	0,0517	0,6346	0,0814	0,02198	97	1,6930	0,3374	1,498	0,2252	0,35021
38	0,6632	0,0545	0,6511	0,0837	0,02378	98	1,7104	0,3439	1,509	0,2279	0,36008
39	0,6807	0,0574	0,6676	0,0859	0,02563	99	1,7279	0,3506	1,521	0,2305	0,37009
40	**0,6981**	**0,0603**	**0,6840**	**0,0882**	**0,02767**	**100**	**1,7453**	**0,3572**	**1,533**	**0,2332**	**0,38026**
41	0,7156	0,0633	0,7004	0,0904	0,02976	101	1,7628	0,3639	1,543	0,2358	0,39058
42	0,7330	0,0664	0,7167	0,0927	0,03195	102	1,7802	0,3707	1,554	0,2385	0,40104
43	0,7505	0,0696	0,7330	0,0949	0,03425	103	1,7977	0,3757	1,565	0,2412	0,41166
44	0,7679	0,0728	0,7492	0,0972	0,03664	104	1,8151	0,3843	1,576	0,2439	0,42242
45	0,7854	0,0761	0,7645	0,0995	0,03915	105	1,8326	0,3912	1,587	0,2466	0,43333
46	0,8029	0,0795	0,7815	0,1017	0,04176	106	1,8500	0,3982	1,597	0,2493	0,44439
47	0,8203	0,0829	0,7975	0,1040	0,04448	107	1,8675	0,4052	1,608	0,2520	0,45560
48	0,8378	0,0865	0,8135	0,1063	0,04731	108	1,8850	0,4122	1,618	0,2548	0,46695
49	0,8552	0,0900	0,8294	0,1086	0,05025	109	1,9024	0,4193	1,628	0,2575	0,47844
50	**0,8727**	**0,0937**	**0,8452**	**0,1108**	**0,0 331**	**110**	**1,9199**	**0,4264**	**1,638**	**0,2603**	**0,49008**
51	0,8901	0,0974	0,8610	0,1131	0,05649	111	1,9373	0,4336	1,648	0,2531	0,50187
52	0,9076	0,1012	0,8767	0,1154	0,05978	112	1,9548	0,4408	1,658	0,2659	0,51379
53	0,9250	0,1051	0,8924	0,1177	0,06319	113	1,9722	0,4481	1,668	0,2687	0,52586
54	0,9425	0,1090	0,9080	0,1200	0,06673	114	1,9897	0,4554	1,677	0,2715	0,53806
55	0,9599	0,1130	0,9235	0,1223	0,07039	115	2,0071	0,4627	1,687	0,2743	0,55041
56	0,9774	0,1171	0,9389	0,1247	0,07417	116	2,0246	0,4701	1,696	0,2772	0,56289
57	0,9848	0,1212	0,9543	0,1270	0,07808	117	2,0420	0,4775	1,705	0,2800	0,57551
58	1,0123	0,1254	0,9696	0,1293	0,08212	118	2,0595	0,4850	1,714	0,2829	0,58827
59	1,0297	0,1296	0,9848	0,1316	0,08629	119	2,0769	0,4925	1,723	0,2858	0,60116
60	**1,0472**	**0,1340**	**1,0000**	**0,1340**	**0,09059**	**120**	**2,0944**	**0,5000**	**1,732**	**0,2887**	**0,61419**

*) Aria segmentului de rază $R = G \cdot R^2$.

Tabela 6 *(continuare)*

Unghiul la centru în grade	Arcul		Lungimea coardei C	H/C	Aria segmentului*) G	Unghiul la centru, în grade	Arcul		Lungimea coardei C	H/C	Aria segmentului*) G
	Lungimea L	Înălțimea H					Lungimea L	Înălțimea H			
121	2,1118	0,5076	1,741	0,2916	0,62734	151	2,6354	0,7496	1,936	0,3871	1,0753
122	2,1293	0,5152	1,749	0,2945	0,64063	152	2,6529	0,7581	1,941	0,3906	1,0917
123	2,1468	0,5228	1,758	0,2975	0,65404	153	2,6704	0,7666	1,945	0,3942	1,1082
124	2,1642	0,5305	1,766	0,3004	0,66759	154	2,6878	0,7750	1,949	0,3977	1,1247
125	2,1817	0,5383	1,774	0,3034	0,68125	155	2,7053	0,7836	1,953	0,4013	1,1413
126	2,1991	0,5460	1,782	0,3064	0,69505	156	2,7227	0,7921	1,956	0,4049	1,1580
127	2,2166	0,5538	1,790	0,3094	0,70897	157	2,7402	0,8006	1,960	0,4085	1,1747
128	2,2340	0,5616	1,798	0,3124	0,72301	158	2,7576	0,8092	1,963	0,4122	1,1915
129	2,2515	0,5695	1,805	0,3155	0,73716	159	2,7751	0,8178	1,967	0,4158	1,2084
130	**2,2689**	**0,5774**	**1,813**	**0,3185**	**0,75144**	**160**	**2,7925**	**0,8264**	**1,970**	**0,4195**	**1,2253**
131	2,2864	0,5853	1,820	0,3216	0,76584	161	2,8100	0,8350	1,973	0,4233	1,2422
132	2,3038	0,5933	1,827	0,3247	0,78034	162	2,8274	0,8436	1,975	0,4270	1,2592
133	2,3213	0,6013	1,834	0,3278	0,79497	163	2,8449	0,8522	1,978	0,4308	1,2763
134	2,3387	0,6093	1,841	0,3309	0,80970	164	2,8623	0,8608	1,981	0,4346	1,2934
135	2,3562	0,6173	1,848	0,3341	0,82454	165	2,8798	0,8695	1,983	0,4385	1,3105
136	2,3736	0,6254	1,854	0,3373	0,83949	166	2,8972	0,8781	1,985	0,4424	1,3277
137	2,3911	0,6335	1,861	0,3404	0,85455	167	2,9147	0,8868	1,987	0,4463	1,3449
138	2,4086	0,6416	1,867	0,3436	0,86971	168	2,9322	0,8955	1,989	0,4502	1,3621
139	2,4260	0,6498	1,873	0,3469	0,88497	169	2,9496	0,9042	1,991	0,4542	1,3794
140	**2,4435**	**0,6580**	**1,879**	**0,3501**	**0,90034**	**170**	**2,9671**	**0,9128**	**1,992**	**0,4582**	**1,3967**
141	2,4609	0,6662	1,885	0,3534	0,91580	171	2,9845	0,9215	1,994	0,4622	1,4140
142	2,4784	0,6744	1,891	0,3566	0,93135	172	3,0020	0,9302	1,995	0,4663	1,4314
143	2,4958	0,6827	1,897	0,3599	0,94700	173	3,0194	0,9390	1,996	0,4704	1,4488
144	2,5133	0,6910	1,902	0,3633	0,96274	174	3,0369	0,9477	1,997	0,4745	1,4662
145	2,5307	0,6993	1,907	0,3666	0,97858	175	3,0543	0,9564	1,998	0,4786	1,4836
146	2,5482	0,7076	1,913	0,3700	0,99449	176	3,0718	0,9651	1,9988	0,4828	1,5010
147	2,5656	0,7160	1,918	0,3734	0,0105	177	3,0892	0,9738	1,9993	0,4871	1,5184
148	2,5831	0,7244	1,923	0,3768	0,0266	178	3,1067	0,9825	1,9997	0,4913	1,5359
149	2,6005	0,7328	1,927	0,3802	1,0428	179	3,1241	0,9913	1,9999	0,4957	1,5533
150	**2,6180**	**0,7412**	**1,932**	**0,3837**	**1,0590**	**180**	**3,1416**	**1,0000**	**2,000**	**0,5000**	**1,5708**

*) Aria segmentului de rază $R = G \cdot R^2$.

Tabela 7. Funcții trigonometrice

a) *Sinus și cosinus*

Grade	sin	cos		Grade	sin	cos		Grade	sin	cos	
0°0′	0,000	1,000	90° 0′	2°0′	0,035	0,999	88° 0′	4°0′	0,070	0,998	86° 0′
10	0,003	1,000	89°50	10	0,038	0,999	87°50	10	0,073	0,997	85°50′
20	0,006	1,000	40	20	0,041	0,999	40	20	0,076	0,997	40
30	0,009	1,000	30	30	0,044	0,999	30	30	0,078	0,997	30
40	0,012	1,000	20	40	0,047	0,999	20	40	0,081	0,997	20
50	0,015	1,000	10	50	0,049	0,999	10	50	0,084	0,996	10
1°0′	0,017	1,000	89° 0′	3°0′	0,052	0,999	87° 0′	5°0′	0,087	0,996	85° 0′
10	0,020	1,000	88°50	10	0,055	0,998	86°50	10	0,090	0,996	84°50
20	0,023	1,000	40	20	0,058	0,998	40	20	0,093	0,996	40
30	0,026	1,000	30	30	0,061	0,998	30	30	0,096	0,995	30
40	0,029	1,000	20	40	0,064	0,998	20	40	0,099	0,995	20
50	0,032	0,999	10	50	0,067	0,998	10	50	0,102	0,995	10
	cos	sin	Grade		cos	sin	Grade		cos	sin	Grade

Tabela 7 *(continuare)*

a) *Sinus şi cosinus*

Grade	sin	cos		Grade	sin	cos		Grade	sin	cos	
6°0′	0,105	0,995	84° 0′	16°0′	0,276	0,961	74° 0′	26°0′	0,438	0,899	64° 0′
10	0,107	0,994	83°50	10	0,278	0,960	73°50	10	0,441	0,898	63°50
20	0,110	0,994	40	20	0,281	0,960	40	20	0,444	0,896	40
30	0,113	0,994	30	30	0,284	0,959	30	30	0,446	0,895	30
40	0,116	0,993	20	40	0,287	0,958	20	40	0,449	0,894	20
50	0,119	0,993	10	50	0,290	0,957	10	50	0,451	0,892	10
7°0′	0,122	0,993	83° 0′	17°0′	0,292	0,956	73° 0′	27°0′	0,454	0,891	63° 0′
10	0,125	0,992	82°50	10	0,295	0,955	72°50	10	0,457	0,890	62°50
20	0,128	0,992	40	20	0,298	0,955	40	20	0,459	0,888	40
30	0,131	0,991	30	30	0,301	0,954	30	30	0,462	0,887	30
40	0,133	0,991	20	40	0,303	0,953	20	40	0,464	0,886	20
50	0,136	0,991	10	50	0,306	0,952	10	50	0,467	0,884	10
8°0′	0,139	0,990	82° 0′	18°0′	0,309	0,951	72° 0′	28°0′	0,469	0,883	62° 0′
10	0,142	0,990	81°50	10	0,312	0,950	71°50	10	0,472	0,882	61°50
20	0,145	0,989	40	20	0,315	0,949	40	20	0,475	0,880	40
30	0,148	0,989	30	30	0,317	0,948	30	30	0,477	0,879	30
40	0,151	0,989	20	40	0,320	0,947	20	40	0,480	0,877	20
50	0,154	0,988	10	50	0,323	0,946	10	50	0,482	0,876	10
9°0′	0,156	0,988	81°0	19°0′	0,326	0,946	71° 0′	29°0′	0,485	0,875	61° 0′
10	0,159	0,987	80°50′	10	0,328	0,945	70°50	10	0,487	0,873	60°50
20	0,162	0,987	40	20	0,331	0,944	40	20	0,490	0,872	40
30	0,165	0,987	30	30	0,334	0,943	30	30	0,492	0,870	30
40	0,168	0,986	20	40	0,337	0,942	20	40	0,495	0,869	20
50	0,171	0,985	10	50	0,339	0,941	10	50	0,497	0,867	10
10°0	0,174	0,985	80° 0′	20°0′	0,342	0,940	70° 0′	30°0′	0,500	0,866	60° 0′
10	0,177	0,984	79°50	10	0,345	0,939	69°50	10	0,503	0,865	59°50
20	0,179	0,984	40	20	0,347	0,938	40	20	0,505	0,863	40
30	0,182	0,983	30	30	0,350	0,937	30	30	0,508	0,862	30
40	0,185	0,983	20	40	0,353	0,936	20	40	0,510	0,860	20
50	0,188	0,982	10	50	0,356	0,935	10	50	0,513	0,859	10
11°0′	0,191	0,982	79° 0′	21°0′	0,358	0,934	69° 0′	31°0′	0,515	0,857	59° 0′
10	0,194	0,981	78°50	10	0,361	0,933	68°50	10	0,518	0,856	58°50
20	0,197	0,981	40	20	0,364	0,931	40	20	0,520	0,854	40
30	0,199	0,980	30	30	0,367	0,930	30	30	0,522	0,853	30
40	0,202	0,979	20	40	0,369	0,929	20	40	0,525	0,851	20
50	0,205	0,979	10	50	0,372	0,928	10	50	0,527	0,850	10
12°0′	0,208	0,978	78° 0′	22°0′	0,375	0,927	68° 0′	32°0′	0,530	0,848	58° 0′
10	0,211	0,978	77°50	10	0,377	0,926	67°50	10	0,532	0,847	57°50
20	0,214	0,977	40	20	0,380	0,925	40	20	0,535	0,845	40
30	0,216	0,976	30	30	0,383	0,924	30	30	0,537	0,843	30
40	0,219	0,976	20	40	0,385	0,923	20	40	0,540	0,842	20
50	0,222	0,975	10	50	0,388	0,922	10	50	0,542	0,840	10
13°0′	0,225	0,974	77° 0′	23°0′	0,391	0,921	67° 0′	33°0′	0,545	0,839	57° 0′
10	0,228	0,974	76°50	10	0,393	0,919	66°50	10	0,547	0,837	56°50
20	0,231	0,973	40	20	0,396	0,918	40	20	0,550	0,835	40
30	0,233	0,972	30	30	0,399	0,917	30	30	0,552	0,834	30
40	0,236	0,972	20	40	0,401	0,916	20	40	0,554	0,832	20
50	0,239	0,971	10	50	0,404	0,915	10	50	0,557	0,831	10
14°0′	0,242	0,970	76° 0′	24°0′	0,407	0,914	66° 0′	34°0′	0,559	0,829	56° 0′
10	0,245	0,970	75°50	10	0,409	0,912	65°50	10	0,562	0,827	55°50
20	0,248	0,969	40	20	0,412	0,911	40	20	0,564	0,826	40
30	0,250	0,968	30	30	0,415	0,910	30	30	0,566	0,824	30
40	0,253	0,967	20	40	0,417	0,909	20	40	0,569	0,822	20
50	0,256	0,967	10	50	0,420	0,908	10	50	0,571	0,821	10
15°0′	0,259	0,966	75° 0′	25°0′	0,423	0,906	65° 0′	35°0′	0,574	0,819	55° 0′
10	0,262	0,965	74°50	10	0,425	0,905	64°50	10	0,576	0,817	54°50
20	0,264	0,964	40	20	0,428	0,904	40	20	0,578	0,816	40
30	0,267	0,964	30	30	0,431	0,903	30	30	0,581	0,814	30
40	0,270	0,963	20	40	0,433	0,901	20	40	0,583	0,812	20
50	0,273	0,962	10	50	0,436	0,900	10	50	0,585	0,811	10
16°0′	0,276	0,961	74° 0′	26°0′	0,438	0,899	64° 0′	36°0′	0,588	0,809	54° 0′
	cos	sin	Grade		cos	sin	Grade		cos	sin	Grade

Tabela 7 *(continuare)*

a) *Sinus şi cosinus*

Grade	sin	cos		Grade	sin	cos		Grade	sin	cos	
36°0′	0,588	0,809	54° 0′	39°0′	0,629	0,777	31° 0′	42°0′	0,669	0,743	48° 0′
10	0,590	0,807	53°50	10	0,632	0,775	50°50	10	0,671	0,741	47°50
20	0,592	0,806	40	20	0,634	0,773	40	20	0,673	0,739	40
30	0,595	0,804	30	30	0,636	0,772	30	30	0,676	0,737	30
40	0,597	0,802	20	40	0,638	0,770	20	40	0,678	0,735	20
50	0,599	0,800	10	50	0,641	0,768	10	50	0,680	0,733	10
37°0′	0,602	0,799	53° 0′	40°0′	0,643	0,766	50° 0′	43°0′	0,682	0,731	47° 0′
10	0,604	0,797	52°50	10	0,645	0,764	49°50	10	0,684	0,729	46°50
20	0,606	0,795	40	20	0,647	0,762	40	20	0,686	0,727	40
30	0,609	0,793	30	30	0,649	0,760	30	30	0,688	0,725	30
40	0,611	0,792	20	40	0,652	0,759	20	40	0,690	0,723	20
50	0,613	0,790	10	50	0,654	0,757	10	50	0,693	0,721	10
38°0′	0,616	0,788	52° 0′	41°0′	0,656	0,755	49° 0′	44°0′	0,695	0,719	46° 0′
10	0,618	0,786	51°50	10	0,658	0,753	48°50	10	0,697	0,717	45°50
20	0,620	0,784	40	20	0,660	0,751	40	20	0,699	0,715	40
30	0,623	0,783	30	30	0,663	0,749	30	30	0,701	0,713	30
40	0,625	0,781	20	40	0,665	0,747	20	40	0,703	0,711	20
50	0,627	0,779	10	50	0,667	0,745	10	50	0,705	0,709	10
39°0′	0,629	0,777	51° 0′	42°0′	0,669	0,743	48° 0′	45°0′	0,707	0,707	45° 0′
	cos	sin	Grade		cos	sin	Grade		cos	sin	Grade

b) *Tangentă şi cotangentă*

Grade	tg	ctg		Grade	tg	ctg		Grade	tg	ctg	
0°0′	0,000	∞	90° 0′	5°0′	0,087	11,[illegible]	85° 0′	10°0′	0,176	5,671	80° 0′
10	0,003	343,8	89°50	10	0,090	11,06	84°50	10	0,179	5,576	79°50
20	0,006	171,9	40	20	0,093	10,71	40	20	0,182	5,485	40
30	0,009	114,6	30	30	0,096	10,39	30	30	0,185	5,396	30
40	0,012	85,94	20	40	0,099	10,08	20	40	0,188	5,309	20
50	0,015	68,75	10	50	0,102	9,788	10	50	0,191	5,226	10
1°0′	0,017	57,29	89° 0	6°0′	0,105	9,514	84° 0′	11°0′	0,194	5,145	79° 0
10	0,020	49,10	88°50′	10	0,108	9,255	83°50	10	0,197	5,066	78°50′
20	0,023	42,96	40	20	0,111	9,010	40	20	0,200	4,989	40
30	0,026	38,19	30	30	0,114	8,777	30	30	0,203	4,915	30
40	0,029	34,37	20	40	0,117	8,556	20	40	0,206	4,843	20
50	0,032	31,24	10	50	0,120	8,345	10	50	0,210	4,773	10
2°0′	0,035	28,64	88° 0′	7°0′	0,123	8,144	83° 0′	12°0′	0,213	4,705	78° 0′
10	0,038	26,43	87°50	10	0,126	7,953	82°50	10	0,216	4,638	77°50
20	0,041	24,54	40	20	0,129	7,770	40	20	0,219	4,574	40
30	0,044	22,90	30	30	0,132	7,596	30	30	0,222	4,511	30
40	0,047	21,47	20	40	0,135	7,429	20	40	0,225	4,449	20
50	0,049	20,21	10	50	0,138	7,269	10	50	0,228	4,390	10
3°0′	0,052	19,08	87° 0′	8°0′	0,141	7,115	82° 0′	13°0′	0,231	4,331	77° 0′
10	0,055	18,07	86°50	10	0,144	6,968	81°50	10	0,234	4,275	76°50
20	0,058	17,17	40	20	0,146	6,827	40	20	0,237	4,219	40
30	0,061	16,35	30	30	0,149	6,691	30	30	0.240	4,165	30
40	0,064	15,60	20	40	0,152	6,561	20	40	0,243	4,113	20
50	0,067	14,92	10	50	0,155	6,435	10	50	0,246	4,061	10
4°0′	0,070	14,30	86° 0′	9°0′	0,158	6,314	81° 0′	14°0′	0,249	4,011	76° 0′
10	0,073	13,73	85°50	10	0,161	6,197	80°50	10	0,252	3,962	75°50
20	0,076	13,20	40	20	0,164	6,084	40	20	0,256	3,914	40
30	0,079	12,71	30	30	0,167	5,976	30	30	0,259	3,867	30
40	0,082	12,25	20	40	0,170	5,871	20	40	0,262	3,821	20
50	0,085	11,83	10	50	0,173	5,769	10	50	0,265	3,776	10
	ctg	tg	Grade		ctg	tg	Grade		ctg	tg	Grade

Tabela 7 *(continuare)*

b) *Tangentă și cotangentă*

Grade	tg	ctg		Grade	tg	ctg		Grade	tg	ctg	
15°0′	0,268	3,732	75° 0′	25° 20′	0,473	2,112	64° 40′	35° 40′	0,718	1,393	54° 20′
10	0,271	3,689	74°50	30	0,477	2,097	30	50	0,722	1,384	10
20	0,274	3,647	40	40	0,481	2,081	20	36°0′	0,727	1,376	54° 0′
30	0,277	3,606	30	50	0,484	2,066	10	10	0,731	1,368	53°50
40	0,280	3,566	20	26°0′	0,488	2,050	64° 0′	20	0,735	1,360	40
50	0,284	3,526	10	10	0,491	2,035	63°50	30	0,740	1,351	30
16°0′	0,287	3,487	74° 0′	20	0,495	2,020	40	40	0,744	1,343	20
10	0,290	3,450	73°50	30	0,499	2,006	30	50	0,749	1,335	10
20	0,293	3,412	40	40	0,502	1,991	20	37°0′	0,754	1,327	53° 0
30	0,296	3,376	30	50	0,506	1,966	10	10	0,758	1,319	52°50
40	0,299	3,340	20	27°0′	0,510	1,963	63° 0′	20	0,763	1,311	40
50	0,303	3,305	10	10	0,513	1,949	62°50	30	0,767	1,303	30
17°0′	0,306	3,271	73° 0′	20	0,517	1,935	40	40	0,772	1,295	20
10	0,309	3,237	72°50	30	0,521	1,921	30	50	0,777	1,288	10
20	0,312	3,204	40	40	0,524	1,906	20	38°0′	0,781	1,280	52° 0′
30	0,315	3,172	30	50	0,528	1,894	10	10	0,786	1,272	51°50
40	0,319	3,140	20	28°0	0,532	1,881	62° 0′	20	0,791	1,265	40
50	0,322	3,108	10	10′	0,535	1,868	61°50	30	0,795	1,257	30
18°0′	0,325	3,078	72° 0′	20	0,539	1,855	40	40	0,800	1,250	20
10	0,328	3,047	71°50	30	0,543	1,842	30	50	0,805	1,242	10
20	0,331	3,018	40	40	0,547	1,829	20	39°0′	0,810	1,235	51° 0′
30	0,335	2,989	30	50	0,551	1,816	10	10	0,815	1,228	50°50
40	0,338	2,960	20	29°0′	0,554	1,804	61° 0′	20	0,819	1,220	40
50	0,341	2,932	10	10	0,558	1,792	60°50	30	0,824	1,213	30
19°0′	0,344	2,904	71° 0	20	0,562	1,780	40	40	0,829	1,206	20
10	0,348	2,877	70°50	30	0,566	1,767	30	50	0,834	1,199	10
20	0,351	2,850	40	40	0,570	1,756	20	40°0′	0,839	1,192	50° 0′
30	0,354	2,824	30	50	0,573	1,744	10	10	0,844	1,185	49°50
40	0,357	2,798	20	30°0′	0,577	1,732	60° 0′	20	0,849	1,178	40
50	0,361	2,773	10	10	0,581	1,720	59°50	30	0,854	1,171	30
20°0′	0,364	2,747	70° 0′	20	0,585	1,709	40	40	0,859	1,164	20
10	0,367	2,723	69°50	30	0,589	1,698	30	50	0,864	1,157	10
20	0,371	2,699	40	40	0,593	1,686	20	41°0′	0,869	1,150	49° 0′
30	0,374	2,675	30	50	0,596	1,675	10	10	0,874	1,144	48°50
40	0,377	2,651	20	31°0′	0,601	1,664	59° 0′	20	0,880	1,137	40
50	0,381	2,628	10	10	0,605	1,653	58°50	30	0,885	1,130	30
21°0′	0,384	2,605	69° 0′	20	0,609	1,643	40	40	0,890	1,124	20
10	0,387	2,583	68°50	30	0,613	1,632	30	50	0,895	1,117	10
20	0,391	2,560	40	40	0,617	1,621	20	42°0′	0,900	1,111	48° 0′
30	0,394	2,539	30	50	0,621	1,611	10	10	0,906	1,104	47°50
40	0,397	2,517	20	32°0′	0,625	1,600	58° 0	20	0,911	1,098	40
50	0,401	2,496	10	10	0,629	1,590	57°50	30	0,916	1,091	30
22°0′	0,404	2,475	68° 0′	20	0,633	1,580	40	40	0,922	1,085	20
10	0,407	2,455	67°50	30	0,637	1,570	30	50	0,927	1,079	10
20	0,411	2,434	40	40	0,641	1,560	20	43°0′	0,933	1,072	47° 0′
30	0,414	2,414	30	50	0,645	1,550	10	10	0,938	1,066	46°50
40	0,418	2,394	20	33°0′	0,649	1,540	57° 0′	20	0,943	1,060	40
50	0,421	2,375	10	10	0,654	1,530	56°50	30	0,949	1,054	30
23°0′	0,424	2,356	67° 0′	20	0,658	1,520	40	40	0,955	1,048	20
10	0,428	2,337	66°50	30	0,662	1,511	30	50	0,960	1,042	10
20	0,431	2,318	40	40	0,666	1,501	20	44°0′	0,966	1,036	46° 0′
30	0,435	2,300	30	50	0,670	1,492	10	10	0,971	1,030	45°50
40	0,438	2,282	20	34°0′	0,675	1,483	56° 0′	20	0,977	1,024	40
50	0,442	2,264	10	10	0,679	1,473	55°50	30	0,983	1,018	30
24°0′	0,445	2,246	66° 0′	20	0,683	1,464	40	40	0,988	1,012	20
10	0,449	2,229	65°50	30	0,687	1,455	30	50	0,994	1,006	10
20	0,452	2,211	40	40	0,692	1,446	20	45°0′	1,000	1,000	45° 0′
30	0,456	2,194	30	50	0,696	1,437	10				
40	0,459	2,177	20	35°0′	0,700	1,428	55° 0′				
50	0,463	2,161	10	10	0,705	1,419	54°50				
25°0′	0,466	2,145	65° 0′	20	0,709	1,411	40				
10	0,470	2,128	64°50	30	0,713	1,402	30				
	ctg	tg	Grade		ctg	tg	Grade		ctg	tg	Grade

Logaritmi

Logaritmul unui număr este exponentul puterii la care este necesar să fie ridicat un număr fixat în prealabil, pentru ca să se obțină numărul dat. Numărul fixat se numește *bază*.

In mod obișnuit se folosesc două sisteme de logaritmi și anume:

— logaritmii comuni sau zecimali, la care baza este 10;

— logaritmii neperieni, naturali sau hiperbolici, la care baza este numărul $e = 2{,}7182818\ldots$

In orice sistem de logaritmi, logaritmul numărului 1 este egal cu 0. Logaritmul bazei, în sistemul dat, este egal cu 1.

Modulul oricărui sistem este egal cu numărul invers al logaritmului natural al bazei sistemului respectiv. Modulul sistemului natural fiind 1, cel al sistemului zecimal va fi:

$$\frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{2{,}3025851} = 0{,}4342945.$$

In orice sistem logaritmul unui număr este egal cu modulul acelui sistem înmulțit cu logaritmul natural al numărului.

Rezultă deci că logaritmul zecimal al unui număr este egal cu logaritmul natural înmulțit cu 0,4342945.

Fiecare logaritm constă din două părți:

— partea întreagă sau *caracteristica*;

— partea zecimală sau *mantisa*.

In tabelele care urmează sunt dați logaritmii naturali ai numerelor între 1—1000.

Pentru a obține logaritmii naturali ai numerelor care nu figurează în tabelă se adună sau se scad logaritmii naturali ai puterilor lui 10, după cum urmează:

$$\ln 10 = 2{,}30258 \qquad \ln 10^4 = 9{,}21034$$

$$\ln 10^2 = 4{,}60517; \qquad \ln 10^5 = 11{,}51292;$$

$$\ln 10^3 = 6{,}90775; \qquad \ln 10^6 = 13{,}81551.$$

Exemplu:

$$\ln 2{,}86 = \ln (286 : 10^2) = \ln 286 - \ln 10^2 = 5{,}6560 - 4{,}6052 = 1{,}0508.$$

Logaritmul zecimal va fi:

$$1{,}0508 \times 0{,}43429 = 0{,}45635.$$

In orice sistem de logaritmi, logaritmii numerelor mai mici decât 1 sunt negativi. Calculul lor se face după cum urmează:

$$\ln 0{,}0437 = \ln (437 : 10^4) =$$

$$= \ln 437 - 9{,}2103 = 6{,}0799 - 9{,}2103 = -3{,}1304.$$

Exemplu:

Logaritmul zecimal al numărului 0,0437 va fi:

$$-3{,}1304 \times 0{,}43429 = -1{,}3595 = -\bar{2}{,}6405$$

Semnul — pus deasupra cifrei 2 arată că el se raportă numai la caracteristică, mantisa fiind socotită pozitivă.

Tabela 8. Logaritmi naturali

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1797
1	2,3026	2,3979	2,4840	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4198	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
11	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
12	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
13	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
16	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
17	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
18	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
19	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
20	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
21	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
22	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
23	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
24	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
25	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5590	5,5568
26	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
27	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
28	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
29	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004
30	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333
31	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652
32	5,7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961
33	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
34	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551
35	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833
36	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9108
37	5,9135	5,9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375
38	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636
39	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890
40	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
41	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
42	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6,0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
43	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
44	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
45	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
46	6,1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506
47	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
48	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
49	6,1944	6,1964	6,1985	6,2025	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126

Tabela 8 *(continuare)*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
51	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
52	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
53	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
54	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
55	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
56	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
57	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
58	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784
59	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
60	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118
61	6.4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
62	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
63	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
64	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
65	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
66	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
67	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206
68	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
69	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
70	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
71	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779
72	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
73	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6,6039	6,6053
74	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187
75	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
76	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
77	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580
78	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
79	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834
80	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
81	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
82	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
83	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
84	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
85	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
86	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
87	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
88	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
89	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
90	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
91	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
92	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
93	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448
94	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554
95	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659
96	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763
97	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865
98	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967
99	6,8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9048	6,9058	6,9068

Tabela 9. Funcţii exponenţiale şi hiperbolice

Sinus hiperbolic: $\text{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Cosinus hiperbolic: $\text{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Tangentă hiperbolică: $\text{th}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x
0	1,000	1,000	0,000	1,000	0,000	3	20,09	0,0498	10,02	10,07
0,1	1,105	0,905	0,100	1,005	0,100	3,1	22,20	0,0450	11,08	11,12
0,2	1,221	0,819	0,201	1,020	0,197	3,2	24,53	0,0408	12,25	12,29
0,3	1,350	0,741	0,305	1,045	0,291	3,3	27,11	0,0369	13,54	13,57
0,4	1,492	0,670	0,411	1,081	0,380	3,4	29,96	0,0334	14,97	15,00
0,5	1,649	0,607	0,521	1,128	0,462	3,5	33,12	0,0302	16,54	16,57
0,6	1,822	0,549	0,637	1,185	0,537	3,6	36,60	0,0273	18,22	18,31
0,7	2,014	0,497	0,759	1,255	0,604	3,7	40,45	0,0247	20,21	20,24
0,8	2,226	0,449	0,888	1,337	0,664	3,8	44,70	0,0221	22,34	22,36
0,9	2,460	0,470	1,027	1,433	0,716	3,9	49,40	0,0202	24,69	24,71
1	2,718	0,368	1,175	1,543	0,762	4	54,60	0,0183	27,29	27,31
1,1	3,004	0,333	1,336	1,669	0,800	4,1	60,34	0,0166	30,16	30,18
1,2	3,320	0,301	1,509	1,811	0,834	4,2	66,69	0,0150	33,34	33,35
1,3	3,669	0,273	1,698	1,971	0,862	4,3	73,70	0,0136	36,84	36,86
1,4	4,055	0,247	1,904	2,151	0,885	4,4	81,45	0,0123	40,72	40,73
1,5	4,482	0,223	2,129	2,352	0,905	4,5	90,02	0,0111	45,00	45,01
1,6	4,953	0,202	2,376	2,577	0,922	4,6	99,48	0,0101	49,74	49,75
1,7	5,474	0,183	2,646	2,828	0,935	4,7	109,9	0,0091	54,97	54,98
1,8	6,050	0,165	2,942	3,107	0,947	4,8	121,5	0,0082	60,75	60,76
1,9	6,686	0,150	3,268	3,418	0,956	4,9	134,3	0,0074	67,14	67,15
2	7,389	0,135	3,627	3,762	0,964	5	148,4	0,0067	74,20	74,21
2,1	8,166	0,122	4,022	4,144	0,970	5,1	164,0	0,0061	82,10	82,01
2,2	9,025	0,111	4,457	4,568	0,976	5,2	181,3	0,0055	90,63	90,64
2,3	9,974	0,100	4,937	5,037	0,980	5,3	200,3	0,0050	100,2	100,2
2,4	11,02	0,0907	5,466	5,557	0,984	5,4	221,4	0,0045	110,7	110,7
2,5	12,18	0,0821	6,050	6,132	0,987	5,5	244,7	0,0041	122,3	122,3
2,6	13,46	0,0743	6,695	6,769	0,989	5,6	270,4	0,0037	135,2	135,2
2,7	14,88	0,0672	7,406	7,473	0,991	5,7	298,9	0,0033	149,4	149,4
2,8	16,44	0,0608	8,192	8,253	0,993	5,8	330,3	0,0030	165,1	165,2
2,9	18,17	0,0550	9,060	9,115	0,994	5,9	365,0	0,0027	182,5	182,5
3	20,09	0,0498	10,02	10,07	0,995	6	403,4	0,0025	201,7	201,7

th x: Pentru $x > 3$, th x poate fi considerat = 1

Formule algebrice uzuale

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,ab + b^3;$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3;$

$(a + b + c + \ldots + l + m)^2 \quad a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + l^2 + m^2 + 2ab + 2ac + \ldots$
$\ldots + 2al + 2\,am + 2bc + \ldots + 2bl + 2bm + \ldots + 2\,lm;$

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2;$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\,(a^2 \mp ab + b^2);$

$a^n - n^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right);$

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}\,b + a^{2n-2}\,b^2 - \ldots + b^{2n}\right);$

$a^{2n} - b^{2n} = (a + b)\left(a^{2n-1} - a^{2n-2}\,b + a^{2n-3}\,b^2 \ldots - b^{2n-1}\right);$

$(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}\,b + C_n^2\,a^{n-2}\,b^2 \pm C_n^3\,a^{n-3}\,b^3 + \ldots + (\pm 1)^n\,b^n$ (n întreg şi pozitiv),

unde C_n^k sunt coeficienţii binomiali. Valorile coeficienţilor binomiali C_n^k, pentru $n = 1, 2, 3, \ldots 10$ sunt:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Permutări, aranjamente, combinări.

1. **Permutări.** Numărul permutărilor a n elemente deosebite (gruparea acelor n elemente în toate ordinele posibile):

$$P_n = n\,! = 1.\,2.\,3 \ldots n.$$

Dacă între cele n elemente sunt α, β, $\gamma \ldots$ elemente identice, numărul permutărilor va fi:

$$\frac{n\,!}{\alpha\,!\;\beta\,!\;\gamma\,!\;\ldots}.$$

2. **Aranjamente (combinări permutate) a n elemente luate câte k**

α) *Fără repetiţie:*

$$A_n^k = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n - k + 1) = C_n^k \cdot k\,!$$

β) *Cu repetiţie:*

$$n^k.$$

3. **Combinări.** Numărul de combinări a n elemente luate câte k (grupări de k elemente, indiferent de ordinea lor);

α) *Fără repetiție*:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^{n-k} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

β) *Cu repetiție*:

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Intre coeficienții binomiali C_n^k există următoarele relații:

$$C_n^1 = n \;;\quad C_n^n = 1 \;;\quad C_n^0 = 1.$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k-1} + C_n^{k-2} + \ldots + C_k^k.$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Pentru valori mari ale lui n și k se aplică următoarele formule:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \ldots\right) \;;\quad \text{(formula lui Stirling)}$$

$$C_n^k = \frac{e^{-z^2}\cdot 2^n}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}},$$

unde

$$z = \frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}\;;$$

$$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi pq}},$$

unde

$$q = 1 - p \quad \text{și} \quad z = \frac{k - np}{\sqrt{2\pi n pq}}.$$

Dacă n este foarte mare și în raport cu k, se poate aplica formula

$$C_n^k = \frac{n^k}{k!}.$$

Tabela 10. Rădăcinile ecuațiilor sau sistemelor de ecuații uzuale

Ecuația sau sistemul de ecuații	Rădăcinile
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ In general: $\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_k = b_i \; (i=1, 2, \ldots n)$	$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ $x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & b_2 & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n(k-2)} & b_n & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\lvert a_{ik} \rvert}$ unde $\lvert a_{ik} \rvert$ este determinantul coeficienților necunoscutelor x_k ($\lvert a_{ik} \rvert \neq 0$)
$ax^2 = 0$	$x_{1,2} = 0$
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0 \;;\; x_2 = -\frac{b}{a}.$
$ax^2 + c = 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$
$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$
$ax^2 + 2bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$	Făcând substituția: $x = y - \frac{a}{3}.$ ecuația este adusă la forma $y^3 + py + q = 0.$ Se disting următoarele cazuri: *a)* Dacă $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, se obțin o rădăcină reală și două imaginare. Notând cu: $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\;;\quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$

Tabela 10 *(continuare)*

Ecuaţia sau sistemul de ecuaţii	Rădăcinile
	rădăcinile sunt (formulele lui Cardan): $y_1 = u + v;\ y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}(u-v).$ *b)* Dacă $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, toate rădăcinile sunt reale. Se consideră funcţia trigonometrică $\cos 3\varphi = -\frac{q}{2r^3},$ unde $r = \pm\sqrt{\left\lvert \frac{p}{3} \right\rvert}.$ Rădăcinile se obţin cu ajutorul următoarelor formule: $y_1 = 2r\cos\varphi \quad ; \quad y_2 = 2r\cos\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right);$ $y_3 = 2r\cos\left(\varphi + \frac{4}{3}\pi\right).$ *c)* Dacă $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, două rădăcini sunt egale: $y_1 = 2r \quad ; \quad y_2 = y_3 = -r.$

Formule trigonometrice uzuale

1. Relaţii între funcţiile aceluiaşi arc:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

2. Valorile funcţiilor trigonometrice ale sumei sau diferenţei a două arce:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta}.$$

3. Valorile funcţiilor multiplilor unui arc:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

4. Valorile funcţiilor jumătăţilor unui arc:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

5. Valorile sumei sau diferenţei funcţiilor a două arce:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

6. **Valorile puterilor funcţiilor unui arc:**

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha);$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha).$$

Mărimi şi relaţii uzuale într'un triunghi

Notaţii:

a, b, c = laturile triunghiului;

A, B, C = unghiurile;

h_a, h_b, h_c = înălţimile;

m_a, m_b, m_c = medianele;

l_a, l_b, l_c = bisectoarele;

$p = \frac{a+b+c}{2}$ = semiperimetrul;

R = raza cercului circumscris;

r = raza cercului înscris;

S = suprafaţa triunghiului.

Intre aceste mărimi există relaţiile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \qquad A + B + C = 180°;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \qquad a = b \cos C + c \cos B$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A};$$

(m_b şi m_a se obţin prin permutări circulare).

$$l_a = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c} = \frac{2bc \cos\frac{A}{2}}{b+c};$$

(l_b şi l_c se obţin prin permutări circulare).

$$h_a = b \sin C = c \sin B.$$

(h_b şi h_c se obţin prin permutări circulare)

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C};$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = p \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Tabela 11. Formule pentru rezolvarea triunghiurilor

[a, b şi c — laturile triunghiului; A, B şi C — unghiurile acestuia ($A + B + C = 180°$)]

Se dau:	Se determină:
a, A, B	$C = 180° - A - B$ $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ $\quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
a, b, C	$\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
a, b, A	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, $\quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$ $C = 180 - (A + B)$ Pentru $a > b$: o singură soluţie „ $b > a > b \sin A$: două soluţii „ $b \sin A > a$: nicio soluţie.
a, b, c	Insemnând cu $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, $r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c):p}$, ($r$ = raza cercului înscris). $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$; $\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$; $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$.

Tabela 12. Ecuațiile și formulele uzuale din geometria analitică

Punctul și dreapta în plan

Ecuația sau relația cerută	Expresia analitică	Observații
Ecuația generală a unei drepte	$Ax + By + C = 0$	
Forma explicită a ecuației unei drepte ($B \neq 0$)	$y = kx + b$	$k = \operatorname{tg} \alpha$ α — unghiul pe care dreapta îl face cu orientarea pozitivă a axei Ox. b — ordonata intersecției cu axa Oy.
Ecuația prin intersecție a unei drepte	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a — abscisa intersecției cu axa Ox. b — ordonata intersecției cu axa Oy
Forma normală (Hesse) a ecuației unei drepte	$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ $\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ $p = -\frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} > 0$	α — unghiul dintre perpendiculara dusă din origine la dreaptă cu orientarea pozitivă a axei Ox p — distanța dela origine la dreaptă.
Ecuația dreptelor care trec printr'un punct dat	$y - y_1 = m(x - x_1)$	x_1, y_1 — coordonatele punctului dat $m = \operatorname{tg} \alpha$
Ecuația dreptei care trece prin două puncte date	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$\left.\begin{matrix} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \end{matrix}\right\}$ coordonatele punctelor date
Condiția ca trei puncte să fie colineare	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 1$	$\left.\begin{matrix} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \\ x_3, y_3 \end{matrix}\right\}$ coordonatele punctelor date
Unghiul a două drepte	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ sau $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$	k_1, k_2 — coeficienții unghiulari ai dreptelor date: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$
Condiția ca două drepte să fie paralele	$k_1 = k_2$ sau $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	
Condiția ca două drepte să fie perpendiculare	$k_1 k_2 = -1$ sau $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$	

Tabela 12 *(continuare)*

Ecuația sau relația cerută	Expresia analitică	Observații
Distanța dela un punct la o dreaptă dată sub forma normală	$d = \lvert x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p \rvert$	d — distanța dela punctul de coordonate (x_1, y_1) la dreaptă.
Coordonatele punctului de intersecție a două drepte	$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$; $y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$	x_0, y_0 — coordonatele punctului de intersecție
Condiția ca trei drepte să fie concurente	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$	$A_i x + B_i y + C_i = 0$; $(i = 1, 2, 3)$ ecuațiile dreptelor
Transformarea axelor de coordonate	Translația axelor: $x' = x - x_0$; $y' = y - y_0$. Rotația axelor: $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$; $y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$.	x_0, y_0 — coordonatele noii origini α — unghiul de rotație al orientării pozitive a axei Ox, pentru a se suprapune axei Ox' x, y — coordonatele în vechiul sistem x', y' — coordonatele în noul sistem
Transformarea coordonatelor rectangulare în coordonate polare	a) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\cos \varphi = \frac{x}{r}$; $\sin \varphi = \frac{y}{r}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. b) $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$	r — raza vectoare φ — unghiul polar Polul coincide cu originea, iar axa polară cu orientarea pozitivă a axei Ox.

Cercul

Ecuația sau relația cerută	Expresia analitică	Observații
Ecuația cercului cu centrul în origine	$x^2 + y^2 = R^2$	R — raza cercului
Ecuația cercului cu centrul într'un punct oarecare	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$	a, b — coordonatele centrului
Ecuațiile cercului în coordonate polare	$r^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 = R^2$	r_0 — raza vectoare a centrului φ_0 — unghiul polar al centrului R — raza cercului

Conicele (exclusiv cercul)

Ecuația sau relația cerută	Expresia analitică	Observații
Ecuațiile elipsei și hiperbolei raportate la centru	$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$	Semnul superior se referă la elipsă, iar cel inferior la hiperbolă. a, b — semiaxele

Tabela 12 *(continuare)*

Ecuaţia sau relaţia cerută	Expresia analitică	Observaţii
Coordonatele focarelor	$x_1 = \pm\sqrt{a^2 \mp b^2};\ y_1 = 0.$	x_1, y_1 — coordonatele focarelor Semnul — de sub radical pentru elipsă Semnul + de sub radical pentru hiperbolă
Excentricitatea	$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = \frac{c}{a}.$	ε — excentricitatea $\varepsilon < 1$ pentru elipsă $\varepsilon > 1$ pentru hiperbolă
Mărimea razelor vectoare duse din focare la un punct al conicei	$r_2 = a \mp \varepsilon x;$ $r_1 = \pm a + \varepsilon x;$ $r_1 + r_2 = 2a$, pentru elipsă; $r_1 - r_2 = \pm 2a$, pentru hiperbolă.	r_1, r_2 — razele vectoare duse din focare la un punct al conicei
Ordonata corespunzătoare unui focar	$p = \pm a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}.$	Mărimea $2p$ se numeşte parametru
Ecuaţia polară a elipsei şi a hiperbolei	$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \pm\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$	p — parametrul Ecuaţia este raportată (ca pol) la focarul din dreapta axei y pentru elipsă şi la focarul din stânga pentru hiperbolă. Orientarea axei polare coincide cu sensul pozitiv al axei Ox
Ecuaţia la centru a hiperbolei echilatere	$x^2 - y^2 = a^2$	$a = b$; $\varepsilon = \sqrt{2}$; $2p = 2a.$
Ecuaţia hiperbolei echilatere raportată la cele două asimptote perpendiculare	$x\,y = \frac{1}{2}a^2$	
Ecuaţiile asimptotelor unei hiperbole	$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$	
Ecuaţia parabolei raportată la creştet	$y^2 = 2px$	$2p$ — parametrul
Coordonata focarului unei parabole	$x_1 = \frac{p}{2}$; $y_1 = 0.$	x_1, y_1 — coordonatele focarului
Ecuaţia directoarei parabolei	$x = -\frac{p}{2}.$	
Ecuaţia parabolei în coordonate polare	$r = p(1 + \cos\varphi)$ $(\varepsilon = 1)$	Polul este în focar, iar axa polară este dreapta care uneşte focarul cu creştetul

Tabela 12 *(continuare)*

Curbe uzuale în plan

Ecuaţia sau relaţia cerută	Expresia analitică	Observaţii
Ecuaţia lănţişorului	$y = \frac{1}{2}h\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h\,\mathrm{ch}\frac{x}{h}$ sau $x = h\,\mathrm{arg\,ch}\,\frac{y}{h}$	h — ordonata punctului celui mai de jos al lănţişorului. Axa Oy trece prin creştet şi este perpendiculară pe tangentă în acest punct.
Ecuaţia tractoarei (desfăşurătoarea lănţişorului)	$x = h\ln\frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{y} - \sqrt{h^2 - y^2} = h\,\mathrm{arg\,ch}\frac{h}{y} - \sqrt{h^2 - y^2}.$	Inceputul desfăşurării se socoteşte din creştetul lănţişorului
Ecuaţia cicloidei	$x = a(t - \sin t),$ $y = a(1 - \cos t);$	a — raza cercului care se rostogoleşte t — unghiul de rostogolire, măsurat la centrul cercului rostogolitor din punctul de plecare
Ecuaţia epicicloidei şi hipocicloidei	$x = (a \pm b)\cos\frac{b}{a}t \mp b\cos\frac{a \pm b}{a}t;$ $y = (a \pm b)\sin\frac{b}{a}t - b\sin\frac{a \pm b}{a}t.$	a — raza cercului fix b — raza cercului rostogolitor t — unghiul de rostogolire, măsurat la centrul cercului rostogolitor. Originea este în centrul cercului fix iar axa Ox trece prin punctul iniţial de rostogolire. Semnele superioare se referă la epicicloidă, iar cele inferioare la hipocicloidă.
Ecuaţia astroidei	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$	Ecuaţia hipocicloidei pentru $b = \frac{a}{4}$
Ecuaţia desfăşurătorii cercului	$x = a(\cos t + t\sin t);$ $y = a(\sin t - t\cos t).$	a — raza cercului t — unghiul la centrul cercului, măsurat din punctul iniţial de desfăşurare. Axa Ox trece prin O (centrul cercului) şi prin punctul iniţial
Ecuaţia spiralei lui Arhimede (în coordonate polare)	$r = a\varphi$	
Ecuaţia spiralei logaritmice (în coordonate polare)	$r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$	Pentru $\varphi = 0$, $r = a$; Pentru $\varphi \to \infty$, $r \to 0$. Polul este deci un punct asimptotic

BIBLIOGRAFIE

Matematici

A. Angot, Complements de Mathématiques, Ed. de la Revue d'optique, Paris, 1949.

L. Brillouin, Les tenseurs en mécanique et en elasticité, Masson, Paris, 1946.

M. I. Contorovici, Opieraţionnoe iscislienie i nestaţionarnîie isvlieniia electricieschih ţepiah, Gostehizdat, Leningrad-Moscva, 1949.

R. Courant und *D. Hilbert*, Methoden der Mathematischen Physik (2 vol.) Iulius Springer, Berlin, 1937.

H. Ertel, Elemente der Operatorenrechnung, Iulius Springer, Berlin, 1940.

G. Kron, A short course in tensor analysis for electrical engineers, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1942.

I. F. Ladon, Bazele calculului vectorial (2 vol.), Editura de Stat, 1949 (Trad. din limba rusă).

N. N. Luzin, Calculul diferenţial şi integral, Editura de stat, 1950 (Trad. din limba rusă).

M. T. Serebrennicov, Garmoniceschi analiz, Gostehizdat, Moscva, 1948.

K. W. Wagner, Operatorenrechnung nebst Anwendung in Physik und Technik, Iohann Barth, Leipzig, 1940.

Mărimi şi Unităţi
şi
Bazele teoretice şi fizice ale Electrotehnicei

I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de electrotehnică (Institutul Politehnic Bucureşti, ediţie poligrafiată, 1952).

I. S. Antoniu, Studiul funcţionării aparatelor de măsură în regim deformat (Teză Bucureşti — 1948).

R. Becker, Theorie des Elektrizität (Leipzig-Berlin).

R. Becker, Théorie des électrons (traducere în limba franceză) Alcan Paris, 1938.

A. Blondel, Les courants alternatifs (I. B. Baillère & Fils, Paris, 1933).

G. Bruhat, Cours de physique générale: Électricité, (Masson, Paris, 1944).

C. Budeanu, Puissances réactives et fictives (Institutul Român de Energie I.R.E., Bucureşti, 1927).

C. Budeanu, Grandeurs et unités électromagnetiques (I.R.E. Comitet Electrotehnic român; publicaţiile nr. 21 din 1934, nr. 28 din 1935, nr. 33 din 1938).

C. Budeanu, Confirmations expérimentales de la théorie des phénomènes déformants. (Memoriile Secţiei Ştiinţifice Academia Română, 1939).

C. Budeanu, Systèmes électromagnétiques symétriques et le système Calantarov (Academia Română, 1945).

C. Budeanu, Electricitatea şi electrotehnica. partea I: electrocinetica şi electrostatica (Institutul Politehnic Bucureşti, ediţie poligrafiată, 1950).

P. L. Calantarov şi *L. P. Neiman*, Teoreticieschie osnovâ electrotehnichi. Gosenergoizdat, Moscva, 1951.

C. A. Crug, Bazele electrotehnicei (Traducere din limba rusă, Vol. I 1952, Editura Tehnică, vol. II, 1953 Editura Energetică).

C. A. Crug, A. I. Darevschii, G. V. Zeveche, P. A. Ionchin, B. Iu. Lomonosov, A. V.

Netuşil, S. V. Strahov, Osnovă electrotehnichi, (Gosenergoizdat, Moscva-Leningrad, 1952).

J. Fallou, Léçons d'électrotechnique générale, vol. I şi II, (Edit. Gauthier Villars, Paris, 1949).

R. Feldtheller, Vierpoltheorie, (S. Hirzel, Leipzig, 1943).

A. Fraenkel, Theorie der Wechselströme, (Springer, Berlin, 1930).

D. Hurmuzescu, Nouvelle détermination du rapport entre les unités électrostatiques et électromagnétiques (Teză) Paris, 1896.

N. Mansurov şi *V. Popov*, Electrotehnica teoretică (Traducere din limba rusă, Editura energetică, 1952).

J. C. Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, (Clarendon Press, Oxford, 1904).

V. Mitchevici. Fluxul magnetic şi transformările lui (în limba rusă. Edit. Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. 1946).

M. A. Perecalin, Electricieschie ţepi (Gosenergoizdat, Moscva-Leningrad, 1950).

C. M. Polivanov, Fiziceschie osnovă electrotehniche, (Gosenergoizdat, Moscva-Leningrad, 1950).

St. Procopiu, Electricitate şi magnetism, Vol. I şi II (Universitatea Iaşi 1939).

R. Răduleţ, Bazele teoretice ale electrotehnicei, Vol. I. Calculul vectorial. electrostatica şi magnetostatica (Institut Politehnic Bucureşti. Ediţie poligrafiată 1953).

I. Tamm, Bazele teoriei electricităţii (traducere din limba rusă) (Editura Tehnică 1952).

N. Vasilescu-Karpen, Electricitatea, (Imprimeria Naţională Bucureşti 1942).

N. Vasilescu-Karpen, Recherches sur l'effet magnétique des corps électrisés en mouvement (Teză) Paris, 1904.

N. Vasilescu-Karpen, Nouvelle théorie des piles électriques, (Memorii Academia Română, 1944).

C. Wagner a. R. Evans, Symmetrical components (Mc. Graw-Hill Book Company Inc., New York, 1933).

Măsurători electrice şi magnetice

I. S. Antoniu, Instrumente de măsură electrice industriale în exploatările de electricitate, Bucureşti, 1948.

V. O. Arutiunov, Instrumente şi aparate electrice de măsurat, (Editura Tehnică, Bucureşti, 1952).

B. O. Arutiunov i *B. P. Valiţkii*, Electroizmeritelnâie pribori. Gosenergoizdat, 1949.

*** Archiv für technisches Messen: Toată colecţia începând din 1931 — Berlin.

L. I. Baida, H. C. Dobrotvorschi, L. L. Orşanschi, S. N. Pcelinscaia, N. N. Razumovschi, E. A. Svirschi, A. V. Fremchel, Curs general de măsurări electrice, (Ed. Energetică Bucureşti, 1952).

R. Bigorgne, Mesures électriques (3 vol.); Eyrolles, Paris, 1946—1948.

G. Brion und *V. Vierweg*, Starkstrommesstechnik, (Springer, Berlin 1933).

C. Budeanu, Curs de măsuri electrice, 2 vol. (Institut Politehnic Bucureşti, 1946).

E. Blechschmidt, Präzisionsmessungen von Kapazitäten, dielektrischen Verlusten und Dielektrizitätskonstanten; F. (Vieweg, Braunschweig, 1940).

A. Curchod, Memento d'électrotechnique (4 vol. + Index alphabétique), Dunod, Paris, 1935.

Curtis, Electrical measurements (Mc. Graw-Hill Book Co., New York and London 1937).

I. Goldstein, Die Messwandler; (Springer — Berlin, 1952).

P. H. Gorianov, S. M. Pigin, N. N. Şumilovschi. Electriceschie scetcichi (Gosenergoizdat, Leningrad, Moscva, 1951).

B. Hague, Alternating current bridge methods (Issac Pitman, London, 1932).

K. P. Iacovlev, Matematicescaia obrabotca rezultatov izmerenii; (Gosudarstvennoe izdatelstvo tehnico-teoreticescoi literaturî, Moscva-Leningrad, 1950).

K. B. Karandeev, Metodî electriceschih izmerenii; (Gosenergoizdat, Moscva-Leningrad, 1952).

G. Jahn, Messungen an elektrischen Maschinen (Springer, Berlin, 1925).

A. E. Knowlton, Standard handbook for electrical engineers 8[th] edition, (Mc. Graw-Hill Book Co., New York, Toronto and London, 1949).

G. Keinsth, Die Technik elektrischer Messgeräte, 2. vol. (Oldenbourg, München und Berlin, 1928).

W. v. Krukowschi, Grundzüge der Zählertechnik (Springer, Berlin, 1930).

F. A. Laws, Electrical Measurements (Mc. Graw-Hill Book Co., New York and London, 1938).

P. B. A. Linker, Elektrische Messkunde, (Springer, Berlin, 1932).

L. M. Malicov, Osnovî construirovania izmeritelnîh priborov (Maşghiz, 1950).

S. F. Malicov, Vvedenie v tehnicu izmerenii, (Maşghiz, 1949).

M. F. Malicov, Osnovî metrologhii, (Moscva, 1949).

A. Palm, Elektrische Messgeräte und Messeinrichtungen (Springer, Berlin, 1937).

P. M. Pelier, Elektrische Messgeräte und Messverfahren (Springer — Berlin, 1951).

V. C. Popov, Electrotehniceschie izmerenia i pribori (Gosenergoizdat, Moscva-Leningrad, 1952).

N. N. Ponomarev i *drughie*, Teoriia, rascet i construirovanie electroizmeritelnâh priborov (Leningrad, 1943).

G. L. Şcurin, Spravocinic po electroizmeritelnîm i radioizmeritelnîm priboram, Voenno-Morscoe izdatelstvo (Voenno-Morscovo Ministerstva Soiuza SSR, Moscva, 1950).

M. S. Şilonosov, Electriceschie controlno-izmeritelnâie pribori (Maşghiz, Moscva, Sverdlovsk, 1951).

E. G. Şramcov i *drughie*, Electriceschie i magnitnâie izmerenia (ONTI NKTP SSSR, 1937).

E. A. Şvirschii, Obşcii curs electriceschih i magnitnâh izmerenii (Oboronghiz, 1939).

W. Schwerdtfeger, Elektrische Messtechnik (Leipzig, 1941).

W. Skirl, Elektrische Messungen (W. de Gruyter, Berlin u. Leipzig, 1936).

F. E. Tennicov i *R. R. Harcenco*, Electriceschie izmereniia] neelectriceschih velicin (Gosenergoizdat, 1948).

N. G. Vostroknutov, Tehnica măsurării mărimilor electrice şi magnetice (Editura Tehnică, Bucureşti, 1951).

N. G. Vostroknutov, Contoare electrice şi exploatarea lor (Editura Tehnică, Bucureşti, 1951).

Iu. G. Tolstov, Izmeritelnâie transformatori postoiannovo toka (Gosenergoizdat, Moscva, Leningrad, 1951).

B. A. Volohova i *I. N. Oter*, Mostă postoiannovo i peremennovo toka (Gosenergoizdat, Moscva Leningrad, 1951).

Stubbings, Commercial A. C. Measurements (Chapman & Hall, London, 1930).

Redactor responsabil: Ing. Farago Eva
Tehnoredactor: Rădulescu Gh.
Corector resp.: Ing. Cristea Miron

Dat la cules la 10.IV.1953. Bun de tipar 12.XII.1953. Hârtie velină 61×86/16, 50 gr/m². Coli editoriale 55. Coli tipar 43,25. Planşe tipo 2. Preţul unui exemplar legat 1/1 pânză lei 33,50. Comanda 196. A.0.1044/1952. Pentru bibliotecile mici, indicele de clasificare 621. Pentru bibliotecile mari indicele de clasificare 621.3 (021).

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Nr. 4, Bucureşti, Calea Şerban-Vodă 133 — R.P.R.

ERATĂ

Pag.	Rând	In loc de	Se citeşte	Această greşeală s'a făcut din vina
42	12 sus	$y = \chi(t)$	$z = \chi(t)$	Editurii
119	1 jos coloana 1	$\frac{a}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{a^2}{4t}}}{t\sqrt{t}}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{t\sqrt{t}}$	Tipografiei
119	coloana 2	$pe^{=a\sqrt{p}}$	$pe^{-a\sqrt{p}}$	Tipografiei
159	14 sus	$= \sum_k \beta_k^M x^k$	$= \sum_k \beta_k^M X^k$	Tipografiei
257	21 sus	un tor omogen şi conductor	un tor omogen şi un conductor	Tipografiei
413	5 sus	celor două simetrice	celor două sisteme	Tipografiei

C. 573. — Manualul Inginerului Electrician, vol. I.